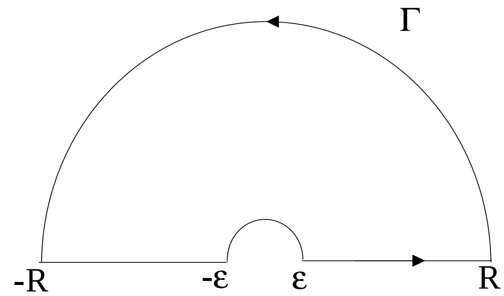
Lemmes de Jordan

Exercice 1

En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ sur le contour Γ ci-contre, calculer la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$



On admettra que

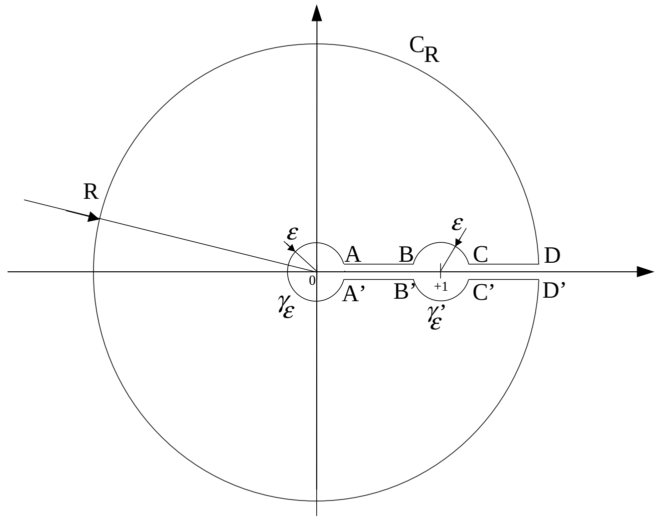
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi} \left(\lim_{\varepsilon \to 0} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} \right) d\theta$$

Exercice 2

On se propose de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log|1-x|}{x^{1+\alpha}} dx \qquad 0 < \alpha < 1$$

en utilisant le contour Γ ci-contre et la détermination de $\frac{\log(1-z)}{z^{1+\alpha}}$ à valeurs réelles sur AB définie dans l'exercice 1 de la première semaine.



1) En supposant que le premier lemme de Jordan s'applique sur les parties circulaires du contour, déterminer la valeur de I.
2) Démontrer que le premier lemme de Jordan peut effectivement s'appliquer sur C_R.

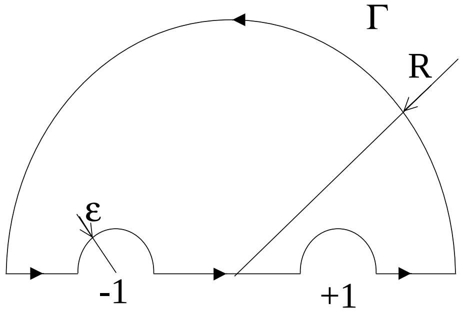
Exercice 3

En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction

$$f(z) = \frac{ze^{2iz}}{z^2 - 1}$$

sur le contour Γ ci-contre, calculer la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(2x)}{x^2 - 1} \, dx$$



On admettra que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\pi} \frac{\left(-1 + \varepsilon e^{i\theta}\right) e^{2i\varepsilon e^{i\theta}}}{(-2 + \varepsilon e^{i\theta})} d\theta = \int_0^{\pi} \left\{ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\left(-1 + \varepsilon e^{i\theta}\right) e^{2i\varepsilon e^{i\theta}}}{(-2 + \varepsilon e^{i\theta})} \right\} d\theta$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\pi} \frac{\left(1 + \varepsilon e^{i\theta}\right) e^{2i\varepsilon e^{i\theta}}}{(2 + \varepsilon e^{i\theta})} d\theta = \int_0^{\pi} \left\{ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\left(1 + \varepsilon e^{i\theta}\right) e^{2i\varepsilon e^{i\theta}}}{(2 + \varepsilon e^{i\theta})} \right\} d\theta$$