Théorème de Cauchy

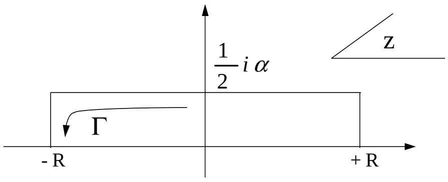
Exercice 1

En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction e^{-z^2} sur le contour Γ ci-contre, calculer la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\alpha x)\ dx$$

On rappelle le résultat classique

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



Exercice 2

1) On désire calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_\Gamma \frac{dz}{z-a}$$

pour différents contours Γ.

a) Calculer I lorsque Γ est le cercle de centre a et de rayon r noté $C(a,r)$ (on pourra utiliser le paramètrage $z - a = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$).

b) On considère un contour Γ' contenant $C(a,r)$ et on note D' et $D(a,r)$ les domaines du plan complexe dont les frontières sont Γ' et $C(a,r)$ ($D(a,r)$ est le disque de centre a et de rayon r). Appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $\dfrac{1}{z-a}$ sur $D' \backslash D(a,r)$. En déduire $\displaystyle\int_{\Gamma'} \frac{dz}{z-a}$ lorsque Γ' est un contour entourant le point $z = a$.

c) Déterminer I lorsque Γ est un contour n'entourant pas le point $z = a$.

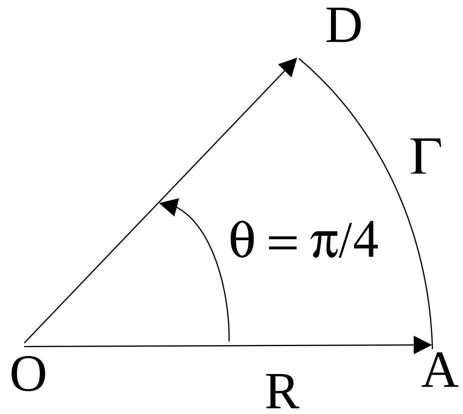
2) Après avoir effectué une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $f(z) = \dfrac{3z-2}{z^2 - z}$ et en utilisant les résultats de la question 1), déterminer

$$\int_\Gamma f(z) dz$$

lorsque Γ est un contour entourant les points $z = 0$ et $z = 1$.

Exercice 3

On considère les points O d'affixe $z = 0$, A d'affixe $z = R$, D d'affixe $z = Re^{i\pi/4}$ et le contour $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, où γ_1 est le segment liant les points O et A, γ_2 est l'arc de cercle de rayon R liant les points A et D et γ_3 est le segment liant les points D et O :



Appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $f(z) = e^{-z^2}$ sur le contour Γ. Montrer ensuite que

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

En admettant que $\int_{\gamma_2} f(z)dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, déterminer les intégrales de Fresnel suivantes

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \cos x^2 \; dx \\ J &= \int_0^{+\infty} \sin x^2 \; dx \end{aligned}$$