

Semaine 1 : Fonctions Multiformes

Exercice 1 : Etude de la fonction multiforme

$$f(z) = \frac{\log(1-z)}{z^{1+\alpha}} \quad \alpha \in]0, 1[$$

1) Définir dans $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$, la détermination de $f(z)$ qui prend des valeurs réelles sur le bord supérieur de la coupure correspondant à $z = x + iy$, avec $0 < x < 1$ et $y \rightarrow 0^+$.

2) Calculer les valeurs de cette détermination sur les autres bords de la coupure, ainsi que pour $z = x$, $x < 0$.

Exercice 2 : Etude de la fonction multiforme

$$f(z) = \sqrt[3]{z-1}$$

1) Définir les déterminations de la fonction $f(z) = \sqrt[3]{z-1}$. On retiendra pour la suite de cet exercice la détermination qui prend la valeur $\sqrt[3]{2}$ au point $z = 3$ et qui admet pour domaine de définition \mathbb{C} privé de $]-\infty, 1]$.

2) Quelles sont les valeurs de la détermination choisie précédemment sur les bords supérieurs et inférieurs de la coupure ?

Exercice 3 : Etude de la fonction multiforme

$$f(z) = \sqrt{z-1} \log(3-z)$$

1) Définir les déterminations de la fonction $f(z) = \sqrt{z-1} \log(3-z)$. On retiendra pour la suite de cet exercice une détermination qui prend la valeur $-i\pi\sqrt{3}$ au point $z = 4$ et qui admet pour domaine de définition \mathbb{C} privé de $]-\infty, 3]$.

2) Quelles sont les valeurs de la détermination choisie précédemment sur les bords supérieurs et inférieurs de la coupure ?