Transformée en Z

Exercice 1 : Soit le système d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$ défini par l'équation aux différences

$$y\left(n\right)=x\left(n\right)-ax(n-1) \tag{1}$$

1) Déterminer la fonction de transfert de ce système définie par $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$.

2) Déterminer la TZ du signal

$$\delta\left(n\right)=\begin{cases}1 \text{ si } n=0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

puis la TZ de $\delta\left(n-1\right)$. En déduire la réponse impulsionnelle $h(n)=TZ^{-1}\left[H(z)\right]$ du système défini par (1).

3) La réponse indicielle d'un système, notée $r(n)$, est la réponse à un échelon $u(n)$ défini par :

$$u\left(n\right)=\begin{cases}1 \text{ si } n\geq 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

c'est-à-dire $r(n)=h(n)*u(n)$, où $*$ représente le produit de convolution. Déterminer la réponse indicielle du système défini par (1).

Exercice 2 : **Système du second ordre**

Soit le système du second ordre d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$ défini par l'équation aux différences

$$y\left(n\right)=x\left(n\right)-a_1y\left(n-1\right)-a_2y\left(n-2\right)$$

On supposera dans cet exercice que a_1 et a_2 sont deux nombres réels tels que $a_1^2-4a_2<0$.

1) Déterminer la fonction de transfert de ce système notée $H\left(z\right)$. On notera $p_1=re^{j\theta}$ et $p_2=re^{-j\theta}$ les pôles de $H\left(z\right)$. Quelle est l'expression de $H\left(z\right)$ en fonction de r et de θ ?

2) On suppose $r\in\left]0,1\right[$. Déterminer $TZ\left[p_1^n u(n)\right]$, où $u(n)$ est l'échelon défini à l'exercice précédent. En déduire la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système du second ordre en fonction de r et de θ.

Exercice 3 : On considère l'opération dite de "moyenne glissante" appliquée au signal discret $x(n)$:

$$y(n)=\frac{1}{n_0}\sum_{k=n-n_0}^{n}x(k)$$

où n_0 est un entier positif fixé.

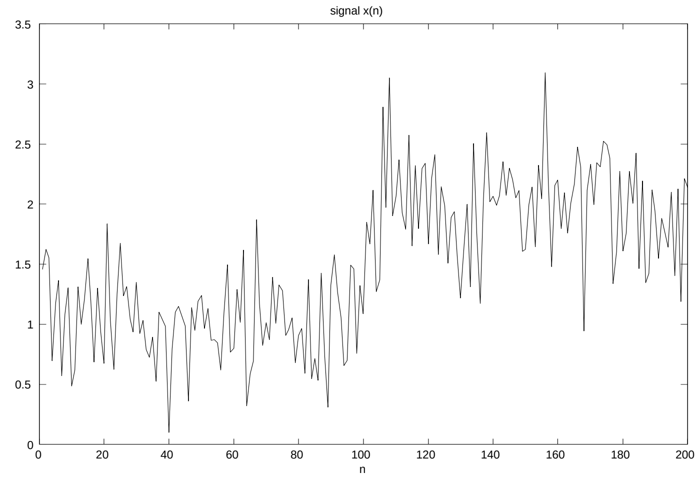
1) Montrer que $y(n)$ est la sortie d'un filtre linéaire dont on précisera la réponse impulsionnelle $h(n)$ et la fonction de transfert $H(z)=TZ\left[h(n)\right]$.

2) Déterminer $Y(z)$ lorsque $x(n)=a^n u(n)$, avec $|a|<1$ et

$$u(n)=\begin{cases}1 \text{ si } n\geq 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

En appliquant la formule d'inversion à l'expression de $Y(z)$ trouvée ci-dessus, déterminer $y(n)$ pour $n\geq n_0$. Peut-on trouver ce résultat plus simplement ?

3) On applique le filtre précédent au signal $x(n)$ suivant :



Expliquer qualitativement l'effet du filtre à "moyenne glissante" sur le signal $x(n)$. Avez-vous une idée d'une application où pourrait être utilisé ce filtre ?