Application du théorème des résidus au calcul intégral

Exercice 1 : Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx$$

en appliquant le théorème des résidus à la fonction

$$f(z) = \frac{\log z}{(1+z^2)^2}$$

sur le demi cercle centré sur l'origine de rayon R fermé par les deux intervalles $[-R, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, R]$ et par le demi cercle de rayon ε centré sur l'origine qui exclut le point $z = 0$.

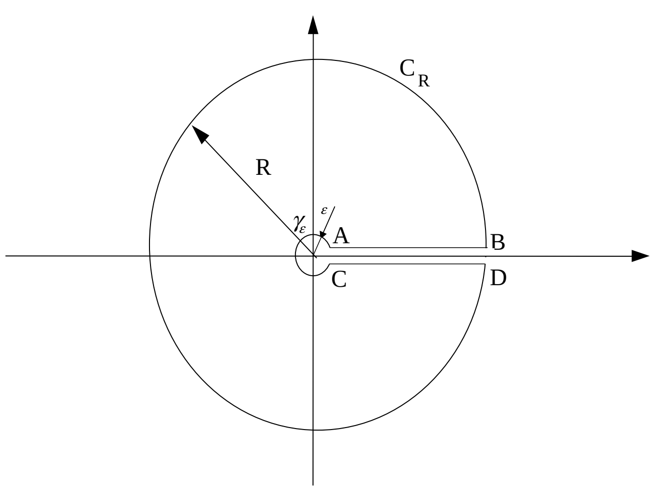
Exercice 2 **:** Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\, dx$$

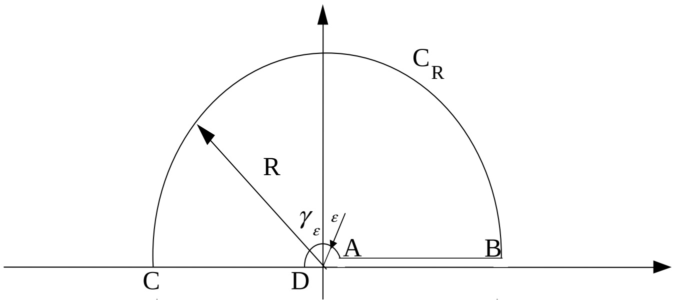
en appliquant le théorème des résidus à la fonction

$$f(z) = \left(\frac{\log z}{1+z}\right)^2$$

sur le domaine suivant :



Exercice 3 : On considère le contour suivant dans le plan complexe :



1) Définir la détermination de

$$f(z) = \frac{\log z}{1+z^4}$$

telle que $\log z = \ln x$ sur AB.
2) Calculer la valeur de cette détermination sur CD.
3) Calculer les résidus de la fonction f associés aux pôles situés à l'intérieur du contour $\Gamma = AB \cup C_R \cup CD \cup \gamma_\varepsilon$.
4) Etudier avec soin $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon$ et $\lim\limits_{R \to +\infty} J_R$ avec

$$I_\varepsilon = \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz, \qquad J_R = \int_{C_R} f(z)dz$$

5) En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4} dx$$