Transformation de Laplace

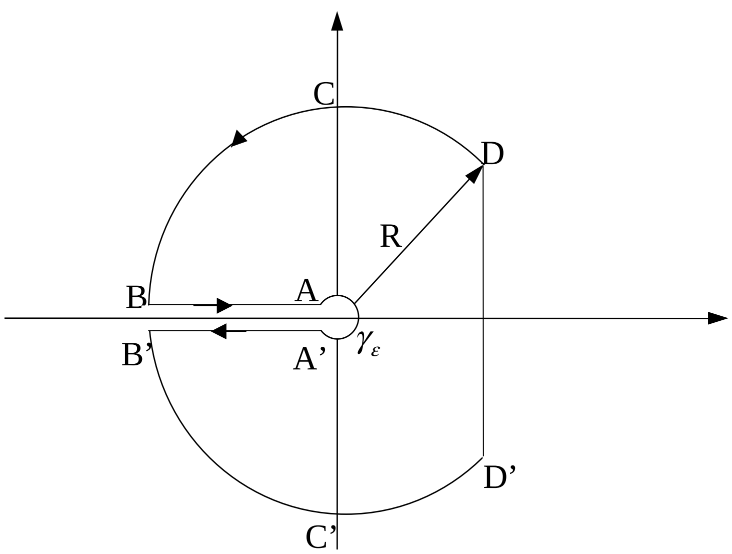
Exercice 1 : Transformée de Laplace inverse de $Y(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ (avec corrigés)

Méthode 1
1) Calculer $Y'(p)$ et en déduire une équation différentielle liant $Y'(p)$ et $Y(p)$.
2) En déduire une équation différentielle liant $y(t) = TL^{-1}[Y(p)]$ et $y'(t)$.
3) Déterminer $y(t)$ à une constante multiplicative près notée C.
4) En considérant $p = x > 0$ et en effectuant le changement de variable $u^2 = xt$, déterminer la constante C (on rappelle le résultat classique $\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Méthode 2
On considère la fonction de la variable complexe définie par :

$$g(z) = \frac{e^{zt}}{\sqrt{z}}, \qquad t \in \mathbb{R}^{+*}$$

1) Ecrire la forme générale des déterminations de $g(z)$ définies dans $\mathbb{C}\backslash\,]-\infty, 0]$. En déduire la détermination qui prend la valeur $\frac{e^{xt}}{i\sqrt{-x}}$ sur le bord supérieur de la coupure. On retiendra cette détermination pour la suite du problème.
2) Que vaut la détermination précédente de $g(z)$ sur le bord inférieur de la coupure ?
3) Appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $g(z)$ sur le contour suivant



4) Justifier le fait que les intégrales sur les arcs de cercle CB et $B'C'$ tendent vers 0 lorsque ε et R tendent respectivement vers 0 et ∞. En admettant que la limite des intégrales sur les arcs de cercle CD et $C'D'$ est nulle, en déduire une expression de la transformée de Laplace inverse de $Y(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ (pour $t > 0$) en fonction des intégrales de $g(z)$ sur les bords supérieur et inférieur de la coupure.
5) En utilisant les expressions de $g(z)$ sur les bords inférieur et supérieur de la coupure déterminées précédemment, retrouver l'expression de la transformée de Laplace inverse de $Y(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$(on fera un changement de variables adéquat et on rappelle le résultat classique $\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 2 (avec indications)

Soit l'équation différentielle

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 2\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \text{ pour } t > 0, x > 0$$

avec la condition initiale $u(x,0) = 6e^{-3x}$, $x > 0$ et la condition limite $u(0,t) = 6e^{-2t}$, $t > 0$.
1) Donner l'équation différentielle vérifiée par $U(x,p) = TL\left[u(x,t)\right]$.
2) On pose $F(x,p) = U(x,p)e^{-(2p+1)x}$. Montrer que

$$\frac{\partial F(x,p)}{\partial x} = -12e^{-(2p+4)x} \qquad x > 0$$

En déduire $F(x,p)$ à une fonction additive $C(p)$ près. Déterminer alors $U(x,p)$ en utilisant la condition limite.
3) Appliquer la formule d'inversion à l'expression de $U(x,p)$ déterminée à la question précédente et en déduire $u(x,t)$ pour $x > 0$, $t > 0$.

Exercice 3 : Transformée de Laplace inverse de $Y(p) = \exp\left(-\sqrt{p}\right)$ (à rendre)

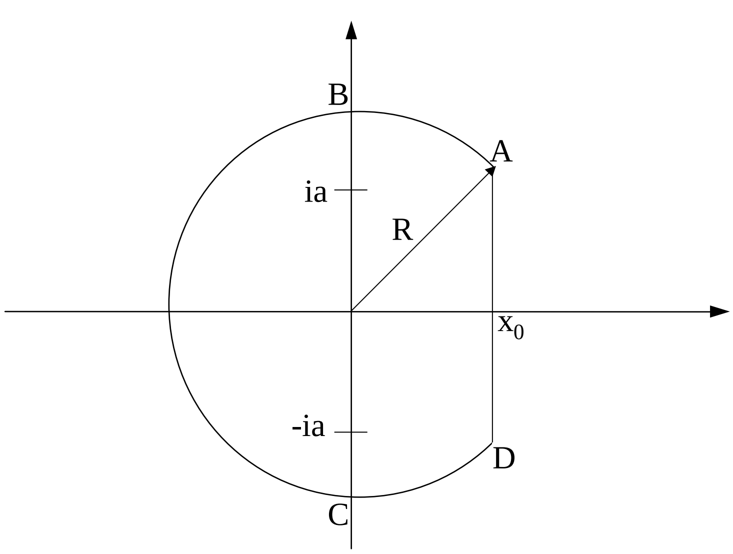
1) Montrer que $Y(p)$ vérifie l'équation différentielle

$$4pY''(p) + 2Y'(p) - Y(p) = 0$$

2) Déterminer les transformées de Laplace inverse de $Y'(p), Y''(p)$ et $pY''(p)$ en fonction de $y(t) = TL^{-1}\left[Y(p)\right]$ et de $y'(t)$. En déduire une équation différentielle du premier ordre liant $y(t)$ et $y'(t)$.
3) Déterminer $y(t)$ à une constante multiplicative près.

Exercice 4 : Transformée de Laplace inverse de $Y(p) = \dfrac{1}{p^2+a^2}, a > 0$ (à rendre)

On considère le contour suivant



En appliquant la formule d'inversion à $Y(p)$ sur ce contour, déterminer la fonction $y(t)$ dont la transformée de Laplace est $Y(p) = \dfrac{1}{p^2 + a^2}$ avec $a > 0$. On admettra que les intégrales définies sur les arcs de cercle AB et CD tendent vers 0 lorsque $R \to +\infty$..