Partiel de Variable Complexe

(Une feuille A4 recto-verso autorisée) Samedi 12 février 2005

Exercice 1

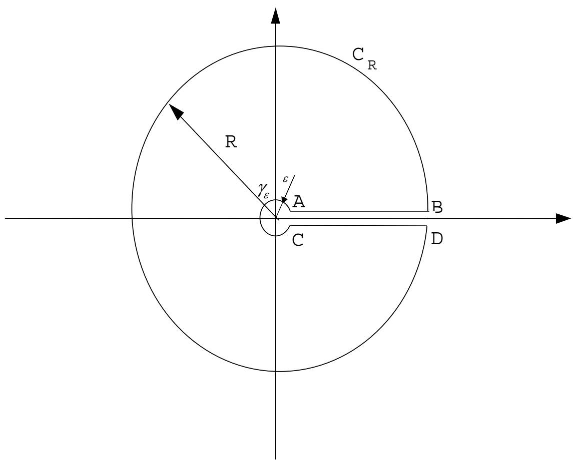
Le but de cet exercice est de déterminer les deux intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4+1} dx \text{ et } J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$$

1) Définir les déterminations de $f(z) = [\log z]^2$ ayant pour coupure le demi axe des réels positifs et en choisir une pour la suite de cet exercice. Déterminer les valeurs de cette détermination sur le bord supérieur et le bord inférieur de cette coupure.
2) Déterminer les résidus de la fonction

$$g(z) = \frac{[\log z]^2}{z^4+1}$$

en ses points singuliers isolés.
3) Appliquer le théorème des résidus à la fonction g sur le contour $AB \cup C_R \cup DC \cup \gamma_\varepsilon$:



Démontrer avec soin que les intégrales de g sur les contours circulaires C_R et γ_ε tendent vers 0, lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ respectivement. En déduire la valeur des intégrales I et J recherchées.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$f''(t) + 3f'(t) + 2f(t) = g(t), \qquad t > 0$$

avec les conditions initiales suivantes

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 2$$

1) En prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente, montrer que $F(p) = TL\left[f(t)\right]$ peut s'écrire sous la forme

$$F(p) = A(p) + G(p)B(p),$$

où $G(p) = TL\left[g(t)\right]$ et où $A(p)$ et $B(p)$ sont deux fonctions à préciser.
2) Montrer que $A(p)$ s'écrit sous la forme

$$A(p) = \frac{a_1}{p+1} + \frac{a_2}{p+2},$$

où a_1 et a_2 sont deux réels à préciser. En déduire à l'aide des tables $a(t) = TL^{-1}\left[A(p)\right]$
3) On considère la fonction $g(t) = e^{-3t}u(t)$, où $u(t)$ est l'échelon de Heaviside. Déterminer $G(p)B(p)$. On désire appliquer la formule d'inversion de la transformée de Laplace à la fonction $G(p)B(p)$. Répondre aux questions suivantes :

- définir le contour de Bromwitch correspondant à ce problème,
- justifier brièvement que l'intégrale sur le contour circulaire tend vers 0 lorsque $R \to \infty$,
- calculer les résidus de la fonction $G(p)B(p)e^{pt}$ en ses points singuliers isolés,
- déterminer la solution de l'équation différentielle $f(t)$.

Exercice 3

On considère l'équation récurrente

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = x(n), \quad n > 0 \tag{1}$$

modélisant un système d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$. On supposera dans cet exercice que l'entrée et la sortie du système sont des fonctions causales.
1) Déterminer la fonction de transfert (appelée aussi transmittance) $H(z)$ de ce système et préciser les pôles et zéros de $H(z)$
2) On rappelle que la région de convergence d'un système dont la sortie et l'entrée sont causales (ce qui est le cas ici) est $|z| > \rho$, où ρ est le maximum des modules des pôles de ce système. La formule d'inversion de la transformée en Z inverse s'écrit alors :

$$h(n) = \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} H(z) z^{n-1} dz$$

où C est un contour fermé inclus dans l'anneau de convergence et entourant l'origine. Déterminer $h(0)$ puis de manière plus générale $h(n)$ pour $n \geq 1$ en utilisant la formule d'inversion de la transformée en Z rappelée ci-dessus.
3) Soit $u(n)$ l'échelon de Heaviside défini par :

$$u(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Déterminer $y(n)$ pour $n \geq 1$ lorsque l'entrée du sytème (1) est $x(n) = u(n)$.
Rappel : on rappelle que le résidu d'une fonction f en un pôle d'ordre p noté $z = a \in \mathbb{C}$ est défini par

$$\text{res} f(a) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left[(z-a)^p f(z) \right] \Big|_{z=a}$$

Rappels

Fonction	TL
$f(t)$	$F(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{dp^n} F(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(p)dp$
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-ap} F(p)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$kF(kp)$
$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$

Fonction	TL	Convergence
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$x_c = 0$
$e^{\alpha t} u(t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$x_c = \mathrm{Re}\,\alpha$
$e^{i\omega t} u(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{p-i\omega}$	$x_c = 0$
$ch\,(\alpha t)\,u(t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup\left(\mathrm{Re}\,(\alpha)\,, \mathrm{Re}\,(-\alpha)\right)$
$sh\,(\alpha t)\,u(t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup\left(\mathrm{Re}\,(\alpha)\,, \mathrm{Re}\,(-\alpha)\right)$
$\cos(\omega t)\,u(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
$\sin(\omega t)\,u(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
$t^n u(t)$, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$x_c = 0$
$t^n e^{\alpha t} u(t)$, $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$x_c = \mathrm{Re}\,\alpha$
$t^\alpha u(t)$, $\alpha \in \left]-1, +\infty\right[$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$x_c = 0$

Fonction	TZ
$f(n)$	$F(z)$
$f(n-n_0)$	$z^{-n_0} F(z)$
$a^n f(n)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
$nf(n)$	$-z\frac{dF(z)}{dz}$
$f(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n-k)$	$F(z)G(z)$