Partiel de Variable Complexe

(Une feuille A4 recto-verso autorisée) Samedi 12 février 2005

Exercice 1

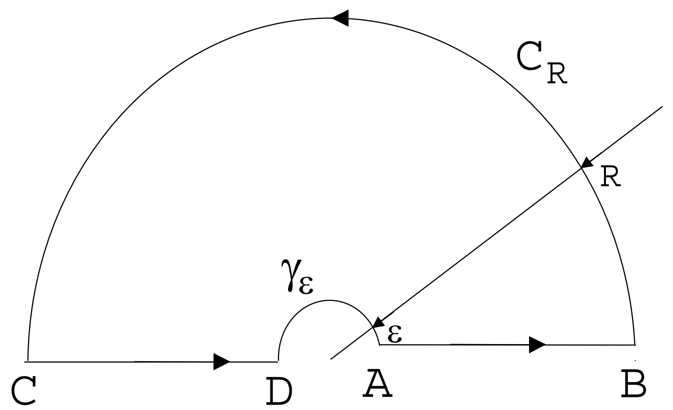
Le but de cet exercice est de déterminer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{[\ln x]^2}{x^2+1} dx$$

1) Définir la détermination de $f(z) = \log z$ qui prend la valeur $i\pi$ en $z = -1$ et qui admet comme coupure $[0, +\infty[$. Déterminer ensuite les valeurs de cette détermination sur le bord supérieur de la coupure ainsi que sur le demi axe $]-\infty, 0[$.
2) Déterminer les résidus de la fonction

$$g(z) = \frac{[\log z]^2}{z^2+1}$$

en ses.points singuliers isolés.
3) Appliquer le théorème des résidus à la fonction g sur le contour $AB \cup C_R \cup DC \cup \gamma_\varepsilon$ représenté ci-dessous (le segment AB se trouve sur le bord supérieur de la coupure tandis que le segment CD se trouve exactement sur l'axe des réels négatifs) :



Démontrer avec soin que les intégrales de g sur les contours circulaires C_R et γ_ε tendent vers 0 lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ respectivement. En déduire la valeur de l'intégrale I recherchée.

Exercice 2

On considère le système d'équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(t) = 2f(t) - 3g(t) \\ g'(t) = -2f(t) + g(t) \end{array} \right. \qquad t > 0,$$

avec les conditions initiales suivantes

$$f(0) = 8 \text{ et } g(0) = 3$$

1) En prenant la transformée de Laplace des deux équations précédentes, donner un système d'équations vérifié par $F(p) = TL\,[f(t)]$ et $G(p) = TL\,[g(t)]$. En utilisant les conditions initiales, résoudre ce système et déterminer $F(p)$ et $G(p)$.
2) On rappelle que $p^2 - 3p - 4 = (p+1)(p-4)$. Utiliser la formule d'inversion de la transformée de Laplace et en déduire une expression de $f(t)$ et de $g(t)$. On prendra soin de justifier le fait que les intégrales sur les parties circulaires intervenant dans la formule inverse tendent vers 0 lorsque $p \to \infty$.

Exercice 3

On considère l'équation récurrente

$$y(n+3) - 2y(n+2) + y(n+1) = x(n), \qquad n > 0 \tag{1}$$

modélisant un système d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$. On supposera dans cet exercice que l'entrée et la sortie du système sont des fonctions causales.
1) Déterminer la fonction de transfert (appelée aussi transmittance) $H(z)$ de ce système et préciser les pôles et zéros de $H(z)$
2) On rappelle que la région de convergence d'un système dont la sortie et l'entrée sont causales (ce qui est le cas ici) est $|z| > \rho$, où ρ est le maximum des modules des pôles de ce système. Déterminer la réponse impulsionnelle du système notée $h(n)$ pour $n \geq 2$ en utilisant la formule d'inversion de la transformée en Z.
3) Déterminer la réponse impulsionelle $h(n)$ pour $n = 1$ et $n = 0$. En déduire $h(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) Soit $u(n)$ l'échelon de Heaviside défini par :

$$u(n) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Déterminer $y(n)$ pour $n \geq 1$ lorsque l'entrée du sytème (1) est $x(n) = u(n)$.
Rappel : on rappelle que le résidu d'une fonction f en un pôle d'ordre p noté $z = a \in \mathbb{C}$ est défini par

$$\text{res} f(a) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left[(z-a)^p f(z) \right] \Big|_{z=a}$$

Rappels

Fonction	TL
$f(t)$	$F(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{dp^n} F(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(p)dp$
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-ap} F(p)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$kF(kp)$
$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$

Fonction	TZ
$f(n)$	$F(z)$
$f(n-n_0)$	$z^{-n_0} F(z)$
$a^n f(n)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
$nf(n)$	$-z\frac{dF(z)}{dz}$
$f(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n-k)$	$F(z)G(z)$