Cours de la Semaine 3

- Le chapitre 6 s'intéresse tout d'abord au domaine d'existence (de convergence) de la transformée de Laplace : le résultat important est le théorème fondamental de la page 2. *La recherche de ce domaine de convergence ne sera pas un objectif de ce chapitre et ne sera donc pas une compétence exigible.* Les propriétés sur la transformée de Laplace sont ensuite énoncées sans démonstration. Un résultat important est que la transformée de Laplace transforme le produit de convolution en un produit de transformées de Laplace. Cette propriété est démontrée car elle est importante et sa preuve n'est pas si simple. Dans la suite du chapitre, nous étudions la formule d'inversion de la transformée de Laplace. Comme vous le découvrirez, l'application de cette formule d'inversion nécessite d'utiliser le théorème des résidus, ce qui explique le fait que la transformée de Laplace soit si souvent enseignée dans le cours des fonctions de la variable complexe. La fin du chapitre traite la résolution d'équations différentielles à l'aide de la transformée de Laplace. Ce genre de problème sera utilisé dans les cours de $2^{ème}$ année pour étudier des signaux à temps continus tels que le courant $i(t)$ et la tension $u(t)$ dans un circuit. Dans un premier temps, on s'intéresse aux équations différentielles à coefficients constants puis aux équations spatio-temporelles. Ce dernier problème peut être plus compliqué comme l'illustre un exemple traité dans les compléments de cours (qu'il n'est pas indispensable de comprendre).

Pour résumer, après avoir étudié cette partie du cours, vous devez **savoir appliquer la formule d'inversion (déterminer x(t) à partir de sa transformée de Laplace X(p))** et **résoudre des équations différentielles à coefficients constants ou des équations différentielles spatio-temporelles**. Ces deux points font l'objet des exercices de la troisième semaine.

CHAPITRE 6 - TRANSFORMEE DE LAPLACE

1. Définitions et Propriétés

1-1 Ensemble des fonctions transformables

E est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que
- f est localement intégrable i.e. $\int_0^A f(t)dt < \infty, \forall A \in \mathbb{R}^+$
- Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^\infty e^{-x_0 t} f(t)dt < \infty$

1-2 -Transformée de Laplace

Pour $f \in E$, on définit sa transformée de Laplace

$$\boxed{F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \qquad p \in \mathbb{C}}$$

Notation : $F(p) = TL(f(t))$. Il est clair d'après la définition de $F(p)$ que les valeurs de $f(t)$ pour $t < 0$ n'ont pas d'effet sur la valeur de $F(p)$. Seules les valeurs de $f(t)$ pour $t \geq 0$ importent et donc dans certains cas pour insister sur ce fait, nous noterons $F(p) = TL(f(t)u(t))$ au lieu de $F(p) = TL(f(t))$, où $u(t)$ représente l'échelon unité défini par $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et $u(t) = 0$ sinon.

1-3 - Convergences

*** Convergence simple**

Théorème 1
Si $F(p)$ existe pour $p = p_0 = x_0 + iy_0$ alors
$F(p)$ existe $\forall p$ tel que $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0 = x_0$

Conséquence : $\{x \in \mathbb{R}, F(p) < \infty\}$ admet une borne inférieure notée x_c appelée abscisse de convergence simple de F.

*** Convergence absolue**

De manière similaire, on montre que $\left\{x \in \mathbb{R}, \int_0^\infty |e^{-pt} f(t)|\, dt < \infty\right\}$ admet une borne inférieure notée x_{ca} appelée abscisse de convergence absolue de F (on a bien sûr $x_c \leqslant x_{ca}$).
Remarque : en pratique, on a le plus souvent $x_c = x_{ca}$

Théorème fondamental
Si $f(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$,
alors $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ est holomorphe sur $\{z / \operatorname{Re}(z) > x_c\}$ et donc indéfiniment dérivable sur $\{z / \operatorname{Re}(z) > x_c\}$ avec

$$\frac{d^n F(p)}{dp^n} = \int_0^\infty \frac{d^n}{dp^n} \left[e^{-pt} f(t)\right] dt$$

Conséquence :

Si $F(p)$ fonction de la variable complexe p est la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ qui admet dans $\mathbb{C}$ des psi s_k et des points de ramification r_j, alors $\sup\{\operatorname{Re}(s_k), \operatorname{Re}(r_j)\} = x_c$

1-4 - Propriétés usuelles

Dans ce paragraphe, on considère que les fonctions f et g satisfont les conditions d'existence des transformées de Laplace présentées .

a) Linéarité

$$TL\,(\lambda f+\mu g)=\lambda F(p)+\mu G(p)$$

En général, $x_c=\sup(x_{c_f},x_{c_g})$

b) Dérivation

*** par rapport à p**

$$TL\,\{(-1)^n t^n f(t)\}=\tfrac{d^n}{dp^n}F(p)$$

*** par rapport à t**

$$TL\,[f'(t)]=pF(p)-f(0^+) \qquad \text{avec } f(0^+)=\lim_{t\to0^+}f\,(t)$$

Généralisation

$$TL\left[f^{(n)}(t)\right]=p^nF(p)-p^{n-1}f(0^+)-...-f^{(n-1)}(0^+)$$

Application : résolution d'équations différentielles linéaires

c) Intégration

*** TL d'une primitive**

$$TL\left[\int_0^t f(u)du\right]=\frac{F(p)}{p}$$

Abscisse de convergence : $\sup(x_c,0)$

*** Intégrale de la transformée**

$$TL\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_p^\infty F(p)dp$$

d) Translations

*** par rapport à p**

$$TL\left[e^{at}f(t)\right]=F(p-a)$$

Abscisse de convergence : $x_c+\mathrm{Re}(a)$

*** par rapport à t**

$$TL\left[f(t-a)u(t-a)\right]=e^{-ap}F(p)\qquad \text{avec } u\left(t\right)=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si} \;\; t\geqslant 0\\ 0 & \text{si} \;\; t<0\end{array}\right.$$

Abscisse de convergence : x_c
Application aux fonctions périodiques

e) Similitude

$$TL\left[f\left(\frac{t}{k}\right)\right]=kF(kp)\qquad k>0$$

Abscisse de convergence : $\frac{x_c}{k}$

f) Convolution

$$TL\left[\int_0^t f(u)g(t-u)du\right]=F(p)G(p)$$

Preuve
On rappelle que :

$$f\left(t\right)*g\left(t\right)=\int_{\mathbb{R}}f\left(s\right)g\left(t-s\right)ds$$

alors pour des fonctions causales :

$$\begin{aligned} f\left(s\right) &= 0 \text{ si } s<0\\ g\left(t-s\right) &= 0 \text{ si } t-s<0 \text{ soit } s>t\end{aligned}$$

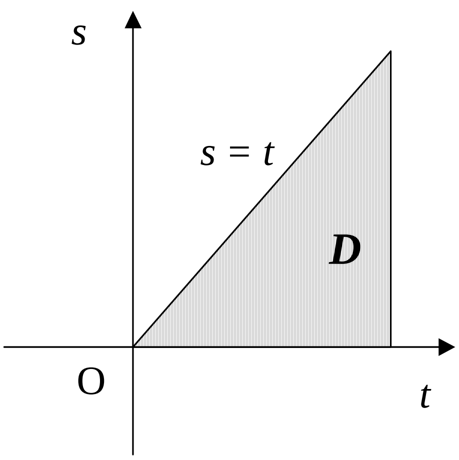
on a donc :

$$f\left(t\right)*g\left(t\right)=\int_0^t f\left(s\right)g\left(t-s\right)ds$$

ainsi :

$$\begin{aligned} TL\left[f\left(t\right)*g\left(t\right)\right] &= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f\left(s\right)g\left(t-s\right)ds\right]e^{-pt}dt\\ &= \int\int_D f\left(s\right)g\left(t-s\right)e^{-pt}dtds\end{aligned}$$

D étant le domaine du plan (Ot, Os) défini par $0\leq s\leq t$ représenté ci-dessous



On fait le changement de variables

$$\left\{\begin{array}{c} u = s \\ v = t - s \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} s = u \\ t = u + v \end{array}\right.$$

On a donc un changement de variables bijectif de D dans un domaine défini par :

$$0 \leq s \leq t \Longleftrightarrow 0 \leq u \leq u + v \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u \geqslant 0 \\ v \geqslant 0 \end{array}\right.$$

c'est-à-dire bijectif de D dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
Alors

$$TL\left[f(t) * g(t)\right] = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(u)\, g(v)\, e^{-p(u+v)} \left|J\right| du dv$$

avec

$$J = \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u} \\ \frac{\partial s}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right| = 1$$

Finalement :

$$TL\left[f(t) * g(t)\right] = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-pu} g(v)\, e^{-pv} du dv = F(p)\, G(p)$$

g) Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) & = & \lim\limits_{p\to\infty} pF(p) \\ \lim\limits_{t\to\infty} f(t) & = & \lim\limits_{p\to 0} pF(p) \end{array}$$

h) Transformée des séries
Séries de terme général $a_n \frac{t^n}{n!}$ de rayon de convergence $R_c = \infty$

$$TL\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}$$

1-5 - Quelques transformées de Laplace

Fonction	TL	Convergence
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$x_c = 0$
$e^{\alpha t}u(t),\ \alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$x_c = \mathrm{Re}\,\alpha$
$e^{i\omega t}u(t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{p-i\omega}$	$x_c = 0$
$ch\,(\alpha t)\,u(t),\ \alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup\left(\mathrm{Re}\,(\alpha)\,, \mathrm{Re}\,(-\alpha)\right)$
$sh\,(\alpha t)\,u(t),\ \alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup\left(\mathrm{Re}\,(\alpha)\,, \mathrm{Re}\,(-\alpha)\right)$
$\cos\,(\omega t)\,u(t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
$\sin\,(\omega t)\,u(t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
$t^n u(t),\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$x_c = 0$
$t^n e^{\alpha t}u(t),\ n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$x_c = \mathrm{Re}\,\alpha$
$t^\alpha u(t),\ \alpha \in \left]-1, +\infty\right[$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$x_c = 0$

avec $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ et $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

1-6 - Formule d'inversion

$$X(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty x(t)e^{-at}e^{-i2\pi st}dt$$

avec $p = a + i2\pi s$, a et s étant des réels.

Analogie avec la transformée de Fourier TF

$$X(s) = TF(x(t))\,(s) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi st}dt \qquad \text{avec } s \in \mathbb{R}$$
$$x(t) = TF^{-1}(X(s)) = \int_{\mathbb{R}} X(s)e^{+i2\pi st}ds$$

Donc :

$$X(p) = TF\left[x(t)e^{-at}u(t)\right]$$

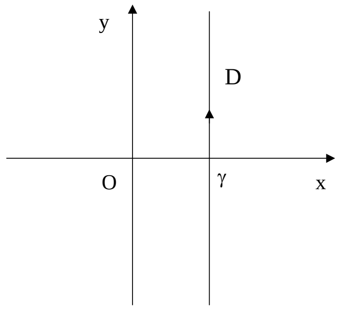
et

$$x(t)e^{-at}u(t) = TF^{-1}\left[X(p)\right]$$

avec $p = a+i2\pi s$. Après quelques calculs, on obtient la formule d'inversion dite *formule intégrale de Bromwich* :

$$\boxed{x(t)u(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} X(p)e^{pt}dp}$$

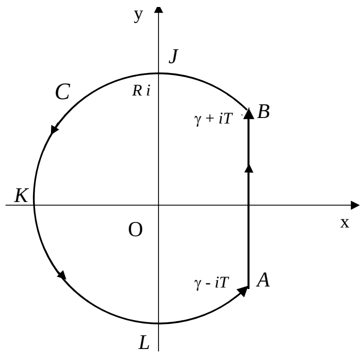
$D\uparrow$ désignant une droite parallèle à l'axe Oy parcourue dans le sens des y croissants et d'équation $x = \gamma$ avec : $\gamma > x_c$ (x_c abscisse de convergence simple de $X\,(p)$) :



Ainsi :

$$\boxed{x(t)u(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} X(p)e^{pt}dp}$$

Soit le contour $ABJKLA$, appelé le *contour de Bromwich,* constitué de $[AB]$ et de l'arc de cercle C de rayon R centré en O nommé $BJKLA$ comme représenté ci-dessous :



Contour de Bromwich

On a :

$$\begin{aligned} x(t)u(t) &= \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} X(p)e^{pt}dp \quad \text{avec} \quad T=\sqrt{R^2-\gamma^2} \\ &= \lim_{R\to+\infty}\left[\frac{1}{2i\pi}\int_{ABJKLA} X(p)e^{pt}dp - \frac{1}{2i\pi}\int_C X(p)e^{pt}dp\right] \end{aligned}$$

On choisit le *contour de Bromwich* de telle sorte que tous les psi de $X(p)$ soient situés à gauche de la droite d'équation : $x=\gamma$

On applique alors le théorème des résidus à $X(p)e^{pt}$ sur le *contour de Bromwich* pour obtenir :

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{ABJKLA} X(p)e^{pt}dp = \sum \text{résidus de } X(p)e^{pt} \text{ aux psi de } X(p)$$

Et donc, si :

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_C X(p)e^{pt}dp = 0$$

On a :

$$\boxed{x(t)u(t) = \sum \text{résidus de } X(p)e^{pt} \text{ aux psi de } X(p)}$$

Ce résultat sera utilisé pour calculer la fonction $x(t)$ à partir de $X(p)$!

Résultats importants admis:

Théorème

Si $\exists M > 0, \exists k > 0$,tels que $\forall p \in C, |X(p)| < \frac{M}{R^k}$,
alors $\forall t > 0,\ \lim\limits_{R \to +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_C X(p)e^{pt}dp = 0.$

Corollaire

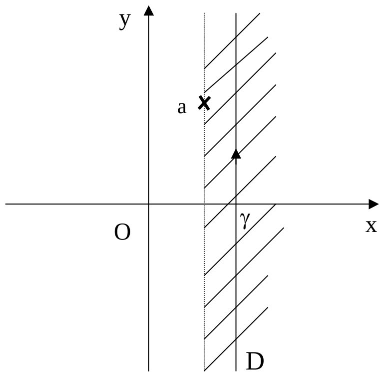
Si $X(p) = \frac{N(p)}{D(p)}, N(p)$ et $D(p)$ étant des polynômes tels que deg(N) <deg(D),
alors les hypothèses du théorème précédent sont réalisées et donc :
$\forall t > 0,\ \lim\limits_{R \to +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_C X(p)e^{pt}dp = 0.$

Exemple 1:

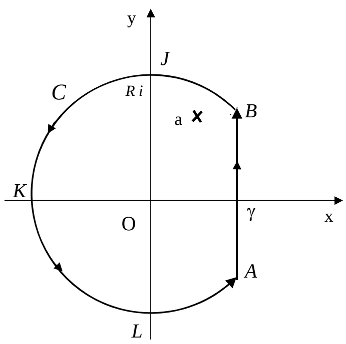
$$F(p) = \frac{1}{p-a}$$

Correction :

Le domaine de convergence de $F(p)$ est le demi-plan hachuré limité par la droite d'équation $x = \text{Re}(a)$.



On choisit une droite D dans ce domaine et on applique le théorème des résidus à $F(p)\,e^{pt}$ sur le contour de Bromwich :



Or

$$F\left(p\right)=\frac{N\left(p\right)}{D\left(p\right)} \text{ avec } \deg\left(N\right)<\deg\left(D\right)$$

donc (voir corollaire) :

$$\forall t>0, \lim_{R\to+\infty}\int_{BJKLA}e^{pt}F\left(p\right)dp=0$$

Le théorème des résidus appliqué à $e^{pt}F\left(p\right)$ sur $ABJKLA$ donne :

$$\int_{AB}e^{pt}F\left(p\right)dp+\int_{BJKLA}e^{pt}F\left(p\right)dp=\left(2i\pi\right)\quad \text{Res } e^{pt}F\left(p\right)\Big|_{p=a}$$

en faisant tendre R vers $+\infty$, on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{D}e^{pt}F\left(p\right)dp+0=\text{ Res } e^{pt}F\left(p\right)\Big|_{p=a}$$

d'où :

$$\forall t>0,\quad f\left(t\right)u\left(t\right)=\lim_{p\to a}\left(p-a\right)e^{pt}F\left(p\right)=e^{at}$$

On en déduit :

$$f\left(t\right)=e^{at}u\left(t\right)$$

Exemple 2 : $X(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$ (voir exercice 1 de la semaine 3)

2 - Applications

2-1 - Equations différentielles à coefficients constants

$$y^{(n)}\left(t\right)+a_1y^{(n-1)}\left(t\right)+...+a_ny(t)=f(t) \qquad (E)$$

Conditions initiales

$$y(0)=b_0, y'(0)=b_1, ..., y^{(n-1)}(0)=b^{(n-1)}$$

Notation :

$$\begin{aligned} D &= \frac{d^n}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+...+a_{n-1}\frac{d}{dt}+a_n \\ \Omega_n\left(p\right) &= p^n+a_1p^{n-1}+...+a_{n-1}p+a_n \qquad \text{avec } p\in\mathbb{C} \end{aligned}$$

Alors (E) s'écrit :

$$D\left(y\right)=f$$

Transformation par Laplace

$$TL\left[a_n y(t)\right] = a_n Y(p)$$
$$TL\left[y^{(n)}(t)\right] = p^n Y(p) - p^{n-1} y(0^+) - ... - y^{(n-1)}(0^+)$$
$$TL\left[D(y)\right] = \Omega_n(p) Y(p) - Q_{n-1}(p), \qquad Q_{n-1}(p) \text{ polynôme de degré } \leq n-1$$
$$TL\left[f(t)\right] = F(p)$$

En prenant la transformée de Laplace des deux membres de l'équation (E),
on obtient une équation algébrique pour déterminer $Y(p)$:

$$\Omega_n(p) Y(p) = Q_{n-1}(p) + F(p)$$

soit :

$$Y(p) = \tfrac{Q_{n-1}(p)}{\Omega_n(p)} + \tfrac{F(p)}{\Omega_n(p)} = Y_1(p) + Y_2(p)$$

a) $Y_1(p)$ est une **fraction rationnelle**

$$Y_1(p) = \frac{Q_{n-1}(p)}{\prod\limits_{i=1}^{r} (p - p_i)^{k_i}}$$

où p_i est une racine d'ordre k_i avec $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i = n$
Sa décomposition en éléments simples donne :

$$Y_1(p) = \sum_{i=1}^{r} \left\{ \frac{A_{i1}}{p - p_i} + \frac{A_{i2}}{(p - p_i)^2} + ... + \frac{A_{ik_i}}{(p - p_i)^{k_i}} \right\}$$

or :

$$TL^{-1}\left[\frac{1}{(p - p_i)^k}\right] = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_i t} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

donc :

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{p_i t} \left[B_{i1} + B_{i2} t + ... + B_{ik_i} t^{k_i - 1}\right]$$

b) $Y_2(p) = \frac{F(p)}{\Omega_n(p)} = F(p) \times \frac{1}{\Omega_n(p)}$
donc :

$$y_2(t) = \int_0^t f(u) R_n(t-u) du \qquad (1)$$

où $R_n(t) = TL^{-1}\left[\frac{1}{\Omega_n(p)}\right]$
La solution du problème est alors

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Remarque :
l'expression de $y_2(t)$ dans l'équation (1) s'écrit

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \int_0^t f(u)R_n(t-u)du \\ &= f(t) * R_n(t) \end{aligned}$$

On dit que $y_2(t)$ est la sortie d'un filtre de réponse impulsionnelle $R_n(t)$ et d'entrée $f(t)$.

$\boxed{\textbf{Exemple}}$

$$y''(t) + a^2 y(t) = f(t) \text{ avec } \begin{cases} y(0^+) = 1 \\ y'(0^+) = -2 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(t) &\longleftrightarrow Y(p) \\ y'(t) &\longleftrightarrow pY(p) - y\left(0^+\right) = pY(p) - 1 \\ y''(t) &\longleftrightarrow p\left[pY(p) - 1\right] - y'\left(0^+\right) = p^2 Y(p) - p + 2 \end{aligned}$$

d'où :

$$p^2 Y(p) - p + 2 + a^2 Y(p) = F(p)$$

c'est-à-dire :

$$Y(p)\left(p^2 + a^2\right) = p - 2 + F(p)$$

Donc :

$$Y(p) = \frac{p-2}{p^2+a^2} + \frac{F(p)}{p^2+a^2}$$

A l'aide des tables

$$\begin{aligned} TL^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right] &= \sin(\omega t)\ \ u(t) \\ TL^{-1}\left[\frac{p}{p^2+\omega^2}\right] &= \cos(\omega t)\ \ u(t) \end{aligned}$$

d'où :

$$y(t) = \cos(at)\, u(t) - \frac{2}{a}\sin(at)\, u(t) + f(t) * \frac{1}{a}\sin(at)\, u(t)$$

Donc :

$$y(t) = \left[\cos(at) - \frac{2}{a}\sin(at)\right] u(t) + \frac{1}{a}\int_0^t f(u)\sin\left[a(t-u)\right] du$$

En général, l'intégrale apparaissant dans le second membre de $y(t)$ se calcule numériquement.

2-2 - Equations aux dérivées partielles

La TL permet de **réduire l'équation d'une dimension.**
Exemple :
Problème à 2 dimensions spatio-temporel (dit problème de la corde vibrante)
$f(x,t)$ est la position verticale d'une corde à l'intant t et à l'abscisse x

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Conditions initiales

$$\begin{array}{c} f(x,0) = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \end{array}$$

Conditions aux limites

$$\begin{array}{c} f(\infty,t) = 0 \\ f(0,t) = g(t) \end{array}$$

Solution à l'aide de la TL
On travaille pour un abscisse x fixé

$$F(x,p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(x,t)dt$$

$$\begin{aligned} TL\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right] &= pF(x,p) - f(x,0) \\ &= pF(x,p) - \varphi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TL\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)\right] &= p^2F(x,p) - pf(x,0) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) \\ &= p^2F(x,p) - p\varphi(x) - \psi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TL\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right] &= \int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}dt \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{-pt}f(x,t)dt = \frac{d^2F(x,p)}{dx^2} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$c^2\frac{d^2F(x,p)}{dx^2} - p^2F(x,p) = -p\varphi(x) - \psi(x)$$

avec

$$\begin{aligned} F(\infty,p) &= TL\left[f(\infty,t)\right] = 0 \\ F(0,p) &= TL\left[f(0,t)\right] = TL\left[g(t)\right] = G(p) \end{aligned}$$

En considérant p comme un paramètre (une constante), on obtient un problème à une dimension (voir exemple dans les compléments)

Compléments

Inversion de la transformée de Laplace

Ce complément explique comment on obtient la formule d'inversion de la transformée de Laplace. On remarque que

$$X(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty x(t)e^{-at}e^{-i2\pi st}dt$$

avec $p = a + i2\pi s$, a et s étant des réels.

Analogie avec la transformée de Fourier TF

Pour des paramètres réels s et t, on a

$$\begin{aligned} X(s) &= TF(x(t))(s) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi st}dt \\ x(t) &= TF^{-1}(X(s)) = \int_{\mathbb{R}} X(s)e^{i2\pi st}ds \end{aligned}$$

Donc :

$$X(p) = X(a + i2\pi s) = TF\left[x(t)e^{-at}u(t)\right]$$

et

$$\begin{aligned} x(t)e^{-at}u(t) &= TF^{-1}\left[X(a + i2\pi s)\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} X(a + i2\pi s)e^{i2\pi st}ds \end{aligned}$$

On en déduit

$$x(t)u(t) = \int_{\mathbb{R}} X(a + i2\pi s)e^{at}e^{i2\pi st}ds$$

Mais le nombre complexe $p = a + i2\pi s$ parcourre la droite d'équation $x = a$, lorsque s décrit $\mathbb{R}$. En effectuant le changement de variables $p = a + 2i\pi s$, on obtient $dp = 2i\pi ds$ et donc on obtient la *formule intégrale de Bromwich* :

$$\boxed{x(t)u(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} X(p)e^{pt}dp}$$

Cable de téléphonie

Enoncé

On considère le système d'équations aux dérivées partielles suivant, qui régit les valeurs de la tension et du courant pour un cable de téléphonie "idéal" :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) &= Ri(x,t) \\ -\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) &= C\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \end{aligned}$$

pour $t > 0$ et $x \in]0, L[$, avec les conditions initiales (CI) et les conditions limites (CL) suivantes :

CI	**CL**
$v(x,0)=0$	$v(0,t)=1$
$i(x,0)=0$	$v(L,t)=0$

1. Montrer que la transformée de Laplace de $v(x,t)$ notée $V(x,p)$ vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on précisera. On notera $V(x,p) = A(p)e^{\alpha x} + B(p)e^{-\alpha x}$ (où α dépend de R, C et p) la solution de cette équation différentielle.

2. En utilisant les conditions aux limites CL, donner le système d'équations vérifié par $A(p)$ et $B(p)$.

3. On admet qu'en utilisant les résultats des questions 1) et 2), on obtient :

$$V(x,p) = \frac{1}{p}\frac{\operatorname{sh}\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{\operatorname{sh}\left[\tau\sqrt{p}\right]} \qquad 0 < x < L$$

   (a) Définir les déterminations de $\sqrt{p}$ et montrer que ces déterminations donnent la même valeur de $V(x,p)$ sur les bords supérieur et inférieur de la coupure. Dans ces conditions, il n'est plus nécessaire de couper le plan complexe et la fonction $V(x,p)$ est définie sur $\mathbb{C}$ privé des points singuliers isolés annulant son dénominateur $D(p) = p\operatorname{sh}\left[\tau\sqrt{p}\right]$.

   (b) Déterminer les points singuliers isolés de $V(x,p)$ et les résidus en ces points singuliers isolés.

   (c) A l'aide de la formule d'inversion, donner l'expression de $v(x,t)$ sous la forme d'un développement en séries (on admettra que les intégrales sur les parties circulaires du contour de Bromwich tendent vers 0 lorsque le rayon $R \to \infty$).

   (d) Déduire des résultats précédents la valeur de :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \qquad 0 < x < L$$

Solution

1) A x fixé, on pose $V(x,p) = TL\left[v(x,t)\right]$ et $I(x,p) = TL\left[i(x,t)\right]$. On sait que

$$TL\left[f'(t)\right] = pF(p) - f(0^+)$$

donc

$$TL\left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right] = pV(x,p) - v(x,0^+) = pV(x,p)$$

En prenant la transformée de Laplace des équations différentielles liant la tension et le courant, on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V(x,p)}{\partial x} &= RI(x,p) \\ -\frac{\partial I(x,p)}{\partial x} &= CpV(x,p) \end{aligned}$$

d'où l'équation

$$\frac{\partial^2 V(x,p)}{\partial x^2} - RCpV(x,p) = 0$$

On sait résoudre cette équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$V(x,p) = A(p)e^{\sqrt{RCp}x} + B(p)e^{-\sqrt{RCp}x}$$

2) Puisque $v(0,t) = 1$, on a $V(0,p) = \frac{1}{p}$, donc

$$A(p) + B(p) = \frac{1}{p}$$

Puisque $v(L,t) = 0$, on a $V(L,p) = 0$ donc

$$A(p)e^{\sqrt{RCp}L} + B(p)e^{-\sqrt{RCp}L} = 0$$

Quelques calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$A(p) = \frac{e^{\tau\sqrt{p}}}{2psh\left(\tau\sqrt{p}\right)} \text{ et } B(p) = -\frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{2psh\left(\tau\sqrt{p}\right)} \text{ avec } \tau = L\sqrt{RC}$$

d'où

$$V(x,p) = \frac{1}{p}\frac{sh\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{sh\left[\tau\sqrt{p}\right]}$$

3) a) Pour définir les déterminations de $\sqrt{p}$, on pose $p = re^{i(\theta+2k\pi)}$ et on obtient :

$$\sqrt{p} = p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}e^{ik\pi} = (-1)^k\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

On voit donc que les déterminations correspondant à k pair ou k impair sont opposées. Puisque $sh(-x) = sh(x)$, $V(x,p)$ prend les mêmes valeurs pour toutes les déterminations de $\sqrt{p}$. De plus, supposons qu'on choisisse $\theta = 0$ sur la partie supérieure de l'axe des abscisses (notée $p = x + i0$) et $k = 0$. Lorsque $p = x + i0$, on a $\theta = 0$ et donc $\sqrt{p} = \sqrt{x}$. Sur la partie inférieure de l'axe des abscisses ($p = x - i0$), on a $\theta = 0$ et donc $\sqrt{p} = -\sqrt{x}$. Quelle que soit la détermination choisie pour $\sqrt{p}$, on a la même valeur de $V(x,p)$ au dessus et en dessous de la coupure. Donc, il n'est pas nécessaire de couper le plan complexe pour définir $V(x,p)$.

b) Les singularités isolées de $V(x,p)$ sont les racines de $sh\left[\tau\sqrt{p}\right] = 0$ et $p = 0$, c'est-à-dire

$$p = -\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}, k \in \mathbb{N}^* \text{ et } p = 0$$

La calcul du résidu de $V(x,p)$ en $p = 0$ ne pose pas de problème :

$$\begin{aligned}\text{res}V\,(0) &= \lim_{p\to 0} pV(x,p) \\ &= \lim_{p\to 0}\frac{sh\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{sh\left[\tau\sqrt{p}\right]}\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}sh\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right] &= \tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right) + o\left(\sqrt{p}\right) \\ sh\left[\tau\sqrt{p}\right] &= \tau\sqrt{p} + o\left(\sqrt{p}\right)\end{aligned}$$

et par suite

$$\text{res}V\,(0) = \boxed{1-\frac{x}{L}}$$

Le calcul du résidu en $p = -\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}$ peut se faire de deux manières :

- Utilisation de la formule $\frac{P\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)}{Q'\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)}$:

  En remarquant que $V(x,p) = \frac{P(x,p)}{Q(x,p)}$ avec $P(x,p) = sh\left[\tau\sqrt{p}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]$ et $Q(x,p) = psh\left[\tau\sqrt{p}\right]$, on a

$$Q'(x,p) = sh\left[\tau\sqrt{p}\right] + \frac{\tau\sqrt{p}}{2} ch\left[\tau\sqrt{p}\right]$$

  obtient

$$\text{res } V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right) = \frac{P\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)}{Q'\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)}$$

  Avec $p = -\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}$ et en choisissant la détermination de $\sqrt{p}$ définie précédemment, on a $\sqrt{p} = i\frac{k\pi}{\tau}$ et donc

$$\begin{aligned}
\text{res } V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right) &= \frac{sh\left[ik\pi\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{sh\left[ik\pi\right] + \frac{ik\pi}{2} ch\left[ik\pi\right]} \\
&= \frac{i\sin\left[k\pi\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{0 + \frac{ik\pi}{2}\cos\left[k\pi\right]} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}{\frac{k\pi}{2}(-1)^k} \\
&= \boxed{-\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}
\end{aligned}$$

- Développement limité

$$\text{res}V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right) = \lim_{p\to-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\left(p + \frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right)V(x,p)$$

  En posant $u = p + \frac{k^2\pi^2}{\tau^2}$, on a

$$\text{res}V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right) = \lim_{u\to 0}\frac{u}{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\frac{sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]}{sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\right]}$$

  On choisit la détermination de $\sqrt{p}$ telle que $\sqrt{-1} = i$. Alors

$$\begin{aligned}
\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}} &= \tau i\frac{k\pi}{\tau}\sqrt{1-\frac{u}{\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}} \\
&= ik\pi\left(1-\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)
\end{aligned}$$

  Donc

$$\begin{aligned}
sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\right] &= \frac{1}{2}\left[e^{ik\pi\left(1-\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)} - e^{-ik\pi\left(1-\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)}\right] \\
&= i\sin\left[k\pi\left(1-\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)\right]
\end{aligned}$$

Mais $\sin(k\pi - v) = (-1)^{k+1}\sin(v)$, donc

$$sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\right] = i\,(-1)^{k+1}\sin\left[k\pi\left(\frac{u\tau^2}{2k^2\pi^2}+o(u)\right)\right]$$

Il vient alors

$$\frac{u}{sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\right]} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} \boxed{\frac{1}{i}\frac{2k^2\pi^2}{k\pi\tau^2}(-1)^{k+1}}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0} sh\left[\tau\sqrt{u-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right] &= sh\left[\tau\sqrt{-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]\\
&= sh\left[i\tau\frac{k\pi}{\tau}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]\\
&= i\sin\left[k\pi\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]\\
&= \boxed{i\sin\left[k\pi\frac{x}{L}\right](-1)^{k+1}}
\end{aligned}$$

En regroupant les différents termes, on obtient

$$\mathrm{res}V\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right) = \boxed{-\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}$$

En posant $G(p) = V(x,p)e^{pt}$, on a

$$\mathrm{res}G\left(-\frac{k^2\pi^2}{\tau^2}\right) = -\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)e^{-\frac{k^2\pi^2 t^2}{\tau^2}}$$

c) En admettant que les intégrales définies sur les parties circulaires du contour de Bromwich tendent vers 0 lorsque le rayon $R\to\infty$, on obtient en appliquant la formule d'inversion à $V(x,p)$:

$$v(x,t) = 1-\frac{x}{L}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}e^{-\frac{k^2\pi^2 t^2}{\tau^2}}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

d) En utilisant $v(x,0)=0$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{L}\right)$$