

**Correction Examen Formation à distance**  
**11 février 2006**

**Exercice 1**

1) Pour définir les déterminations de  $f(z) = [\log z]^2$ , il suffit de poser  $z = \rho e^{i(\theta+2k\pi)}$  et de choisir comme coupure l'axe  $[0, +\infty[$ , ce qui correspond à  $\theta \in ]0, 2\pi[$  pour obtenir :

$$f_k(z) = [\ln \rho + i(\theta + 2k\pi)]^2$$

On choisit par exemple la détermination principale du logarithme qui correspond à  $k = 0$ . Sur le bord supérieur de la coupure, on a  $\theta = 0$  et  $\rho = x$ , d'où

$$f_0(z) = [\ln x]^2$$

Sur le bord inférieur de la coupure, on a  $\theta = 2\pi$  et  $\rho = x$ , d'où

$$f_0(z) = [\ln x + 2i\pi]^2$$

2) Les points singuliers isolés de  $g(z) = \frac{[\log z]^2}{z^4+1}$  sont les racines de  $z^4 + 1 = 0$ , c'est-à-dire

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ et } z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Ce sont tous des pôles d'ordre 1. En utilisant la détermination de  $f(z) = [\log z]^2$  définie ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} [\log z_1]^2 &= \left(i\frac{\pi}{4}\right)^2 = -\frac{\pi^2}{16} \\ [\log z_2]^2 &= \left(i\frac{3\pi}{4}\right)^2 = -\frac{9\pi^2}{16} \\ [\log z_3]^2 &= \left(i\frac{5\pi}{4}\right)^2 = -\frac{25\pi^2}{16} \\ [\log z_4]^2 &= \left(i\frac{7\pi}{4}\right)^2 = -\frac{49\pi^2}{16} \end{aligned}$$

Les résidus de  $g$  en ces points se calculent alors facilement à l'aide de l'expression :

$$\operatorname{resg}(z_k) = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \frac{[\log z_k]^2}{4z_k^3}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{resg}(z_1) &= -\frac{\pi^2}{4 \times 16} \exp\left(-3i\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{64 \cdot 2} (-1 - i) \\ \operatorname{resg}(z_2) &= -\frac{9\pi^2}{4 \times 16} \exp\left(-9i\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{9\pi^2}{64} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{9\pi^2 \sqrt{2}}{64 \cdot 2} (1 - i) \\ \operatorname{resg}(z_3) &= -\frac{25\pi^2}{4 \times 16} \exp\left(-15i\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{25\pi^2}{64} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{25\pi^2 \sqrt{2}}{64 \cdot 2} (1 + i) \\ \operatorname{resg}(z_4) &= -\frac{49\pi^2}{4 \times 16} \exp\left(-21i\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{49\pi^2}{64} \exp\left(3i\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{49\pi^2 \sqrt{2}}{64 \cdot 2} (-1 + i) \end{aligned}$$

3) La fonction  $g$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus ([0, +\infty[ \cup \{z_1, z_2, z_3, z_4\})$ . Donc le théorème des résidus peut s'appliquer à la fonction  $g$  sur le contour proposé (qui contient les quatre points singuliers isolés) et s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{ABUC_R^+ \cup DC \cup \gamma_\varepsilon^-} g(z) dz &= (2i\pi) \sum_{k=1}^4 \text{res} g(z_k) \\ &= \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{64} (2i\pi) [1 + i - 9 + 9i - 25 - 25i + 49 - 49i] \\ &= \frac{i\pi^3 \sqrt{2}}{64} [16 - 64i] \\ &= \frac{i\pi^3 \sqrt{2}}{4} + \pi^3 \sqrt{2} \end{aligned}$$

De manière très classique, on paramètre le cercle  $\gamma_\varepsilon$  par  $z = \varepsilon e^{i\theta}$  avec  $\theta \in ]0, 2\pi[$ . On a dans ce cas  $\rho = \varepsilon$  et donc :

$$|zg(z)| = \left| \varepsilon \frac{(\ln \varepsilon + i\theta)^2}{\varepsilon^4 e^{4i\theta} + 1} \right|$$

En utilisant les majorations classiques

$$\begin{aligned} |\ln \varepsilon + i\theta| &\leq |\ln \varepsilon| + 2\pi = -\ln \varepsilon + 2\pi \text{ (car } \varepsilon \text{ "petit")} \\ |\varepsilon^4 e^{4i\theta} + 1| &\geq |1 - |\varepsilon^4 e^{4i\theta}|| = 1 - \varepsilon^4 \text{ (car } \varepsilon \text{ "petit")} \end{aligned}$$

on obtient sur le cercle  $\gamma_\varepsilon$  la majoration

$$0 \leq |zg(z)| \leq \frac{\varepsilon (-\ln \varepsilon + 2\pi)^4}{1 - \varepsilon^4} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

d'où

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} |zg(z)| = 0$$

Le premier lemme de Jordan permet alors de conclure à

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} g(z) dz = 0}$$

On fait de même sur le cercle  $C_R$  avec  $z = R e^{i\theta}$ . Puisque  $|\varepsilon^4 e^{4i\theta} + 1| \geq |R^4 - 1| = R^4 - 1$  (car  $R$  "grand"), on a :

$$0 \leq |zg(z)| \leq \frac{R (\ln R + 2\pi)^2}{R^4 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

d'où

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{C_R} |zg(z)| = 0$$

D'après le premier lemme de Jordan, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} g(z) dz = 0}$$

Puisque les intégrales sur  $C_R$  et sur  $\gamma_\varepsilon$  tendent vers 0, lorsque  $R \rightarrow +\infty$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient par passage à la limite dans l'égalité provenant du théorème des résidus

$$\lim_{R \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0} \int_{AB} g(z) dz + 0 - \lim_{R \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0} \int_{CD} g(z) dz + 0 = \frac{i\pi^3\sqrt{2}}{4} + \pi^3\sqrt{2}$$

Mais sur  $AB$ , on a d'après ce qui précède

$$g(z) = \frac{[\ln x]^2}{x^4 + 1}$$

De même, sur  $CD$

$$g(z) = \frac{[\ln(x) + 2i\pi]^2}{x^4 + 1}$$

On en déduit

$$\int_0^{+\infty} \frac{[\ln x]^2}{x^4 + 1} dx - \int_0^{+\infty} \frac{[\ln x + 2i\pi]^2}{x^4 + 1} dx = \frac{i\pi^3\sqrt{2}}{4} + \pi^3\sqrt{2}$$

On obtient donc

$$-4i\pi \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4 + 1} dx + 4\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{i\pi^3\sqrt{2}}{4} + \pi^3\sqrt{2}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires de l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4 + 1} dx = -\frac{\pi^2}{16}\sqrt{2} \\ J &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{4}\sqrt{2} \end{aligned}$$

## Exercice 2

1) On sait que pour une fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ , le théorème de dérivation s'écrit

$$\begin{aligned} TL[f'(t)] &= pF(p) - f(0^+) \\ TL[f''(t)] &= p[pF(p) - f(0^+)] - f'(0^+) \\ &= p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+) \end{aligned}$$

donc en prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle, on obtient

$$\begin{aligned} p^2F(p) - p - 2 + 3(pF(p) - 1) + 2F(p) &= G(p) \\ (p^2 + 3p + 2)F(p) - p - 5 &= G(p) \end{aligned}$$

d'où

$$F(p) = \frac{p + 5}{p^2 + 3p + 2} + \frac{G(p)}{p^2 + 3p + 2} \quad (1)$$

Le trinôme  $p^2 + 3p + 2$  se factorise de la façon suivante

$$p^2 + 3p + 2 = (p + 2)(p + 1)$$

On a donc

$$A(p) = \frac{p + 5}{(p + 2)(p + 1)} \text{ et } B(p) = \frac{1}{(p + 2)(p + 1)}$$

2) La décomposition en éléments simples de  $A(p)$  conduit à

$$A(p) = \frac{a_1}{p + 1} + \frac{a_2}{p + 2},$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{p \rightarrow -1} (p + 1) A(p) = \frac{5 - 1}{2 - 1} = 4 \\ a_2 &= \lim_{p \rightarrow -2} (p + 2) A(p) = \frac{5 - 2}{1 - 2} = -3 \end{aligned}$$

On en déduit

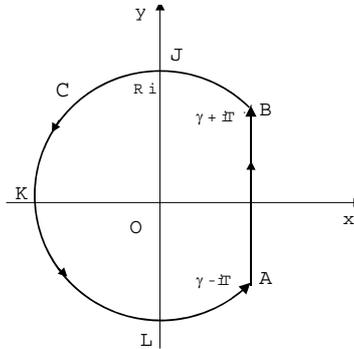
$$a(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t}) u(t)$$

3) La fonction  $g(t) = e^{-3t}u(t)$  admet pour transformée de Laplace  $G(p) = \frac{1}{p+3}$ , donc

$$G(p)B(p) = \frac{1}{(p + 3)(p + 2)(p + 1)}$$

On désire appliquer la formule d'inversion de la transformée de Laplace à la fonction  $G(p)B(p)$ . Répondre aux questions suivantes :

- Le contour de Bromwich correspondant à ce problème est



Contour de Bromwich

où le segment  $AB$  est d'équation  $x = c$ , avec  $c > -1$ ,

- $G(p)B(p)$  s'écrit  $\frac{N(p)}{D(p)}$  avec

$$N(p) = 1 \text{ et } D(p) = (p + 3)(p + 2)(p + 1)$$

Puisque  $\deg(N) = 0 < \deg(D) = 3$ , l'intégrale sur le contour circulaire tend vers 0 lorsque  $R \rightarrow \infty$ ,

- La fonction  $G(p)B(p)e^{pt}$  admet comme points singuliers isolés  $p_1 = -1, p_2 = -2$  et  $p_3 = -3$ . Les résidus en ces points se calculent simplement car ces points singuliers sont des pôles simples

$$\operatorname{res} \{G(p)B(p)e^{pt}\} (-1) = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1) G(p)B(p)e^{pt} = \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$\operatorname{res} \{G(p)B(p)e^{pt}\} (-2) = \lim_{p \rightarrow -2} (p+2) G(p)B(p)e^{pt} = -e^{-2t}$$

$$\operatorname{res} \{G(p)B(p)e^{pt}\} (-3) = \lim_{p \rightarrow -3} (p+3) G(p)B(p)e^{pt} = \frac{1}{2}e^{-3t}$$

- La solution de l'équation différentielle  $f(t)$  s'écrit finalement

$$\begin{aligned} f(t) &= a(t) + \frac{1}{2i\pi} \int_{D^\uparrow} G(p)B(p)e^{pt} dp \\ &= a(t) + \sum_{p_i \text{ psi de } GB \text{ situé à l'intérieur de } BJCKLAB} \operatorname{res} \{G(p)B(p)e^{pt}\} (p_i) \\ &= (4e^{-t} - 3e^{-2t}) u(t) + \left[ \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \right] u(t) \\ &= \left( \frac{9}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \right) u(t) \end{aligned}$$

### Exercice 3

- 1) En prenant la transformée en Z de l'équation récurrente

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = x(n), \quad n > 0$$

on obtient

$$z^2 Y(z) - 3z Y(z) + 2Y(z) = X(z)$$

d'où

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \boxed{\frac{1}{z^2 - 3z + 2}}$$

Le dénominateur de cette fonction de transfert se factorise comme suit

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 1} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

La fonction de transfert  $H(z)$  possède donc deux pôles simples  $z = 1$  et  $z = 2$ . Elle ne possède pas de zéro.

- 2) La formule d'inversion de la transformée en Z s'écrit :

$$\begin{aligned} h(n) &= \sum \operatorname{res} \{H(z)z^{n-1}\} \\ &= \sum \operatorname{res} \left\{ \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)} \right\} \end{aligned}$$

où les résidus sont calculés en tous les points singuliers isolés de  $H(z)z^{n-1}$  situés à l'intérieur d'un contour fermé entourant le domaine de convergence. Dans cet exercice, le domaine de convergence est  $|z| \geq 2$ .

- Pour  $n = 0$ , on a

$$h(0) = \sum \operatorname{res} \left\{ \frac{1}{z(z-1)(z-2)} \right\}$$

Les points singuliers de  $H(z)z^{n-1}$  sont  $z = 0$ ,  $z = 1$  et  $z = 2$ . Les résidus en ces points sont

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \{H(z)z^{n-1}\} (0) &= \lim_{z \rightarrow 0} z [H(z)z^{n-1}] = \frac{1}{2} \\ \operatorname{res} \{H(z)z^{n-1}\} (1) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) [H(z)z^{n-1}] = -1 \\ \operatorname{res} \{H(z)z^{n-1}\} (2) &= \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) [H(z)z^{n-1}] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On voit donc que

$$h(0) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

- Pour  $n \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} h(n) &= \operatorname{res} \left\{ \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)} \right\} (1) + \operatorname{res} \left\{ \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)} \right\} (2) \\ &= -1 + 2^{n-1} \end{aligned}$$

4) La sortie du système notée  $y(n)$  est telle que

$$y(n) = x(n) * h(n) \Leftrightarrow Y(z) = X(z)H(z)$$

Lorsque l'entrée est  $x(n) = u(n)$ , on a

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ pour } |z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1 \\ &= \frac{z}{z-1} \text{ pour } |z| > 1 \end{aligned}$$

On en déduit

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)}$$

Pour trouver la sortie  $y(n)$ , il suffit d'inverser la transformée en Z ci-dessus. On a alors

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum \operatorname{res} \{Y(z)z^{n-1}\} \\ &= \sum \operatorname{res} \left\{ \frac{z^n}{(z-1)^2(z-2)} \right\} \end{aligned}$$

Pour  $n \geq 0$ , la fonction  $\frac{z^n}{(z-1)^2(z-2)}$  admet un pôle simple  $z = 2$  et un pôle double  $z = 1$ . Le résidu en  $z = 2$  se calcule simplement

$$\operatorname{res} \left\{ \frac{z^n}{(z-1)^2(z-2)} \right\} (2) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^n}{(z-1)^2} = 2^n$$

En utilisant le rappel, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \left\{ \frac{z^n}{(z-1)^2(z-2)} \right\} (1) &= \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \frac{z^n}{(z-1)^2(z-2)} \right] \Big|_{z=1} \\ &= \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^n}{z-2} \right] \Big|_{z=1} \\ &= \frac{nz^{n-1}(z-2) - z^n}{(z-2)^2} \Big|_{z=1} \\ &= -n - 1 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\boxed{y(n) = -n - 1 + 2^n, \quad \forall n \geq 0}$$