Correction Examen Formation à distance
12 février 2005

Exercice 1

1) Pour définir les déterminations de $f(z) = \log z$, il suffit de poser $z = \rho e^{i(\theta+2k\pi)}$ pour obtenir :

$$f(z) = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi)$$

On choisit comme coupure l'axe $[0, +\infty[$, ce qui correspond à $\theta \in]0, 2\pi[$. Au point $z = -1$, on a $\theta = \pi$ et $\rho = 1$, d'où

$$f(-1) = i(\pi + 2k\pi)$$

Pour avoir $i\pi$ au point $z = -1$, il suffit donc de choisir $k = 0$ et donc

$$f(z) = \boxed{\ln \rho + i\theta}$$

avec $\theta = 0$ sur le bord supérieur de la coupure $[0, +\infty[$. Sur le bord supérieur de la coupure, on a $\theta = 0, \rho = x$ et $z = x$, d'où

$$\boxed{f(z) = \ln x}$$

Sur l'axe $]-\infty, 0[$, on a $\theta = \pi$ et $\rho = -x$, d'où

$$\boxed{f(z) = \ln(-x) + i\pi}$$

2)Les points singuliers isolés de $g(z) = \frac{[\log z]^2}{z^2+1}$ sont $z = i$ et $z = -i$, qui sont tous les deux des pôles d'ordre 1. En utilisant la détermination de $f(z) = \log z$ définie ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \log i &= \ln(1) + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2} \\ \log(-i) &= \ln(1) + i\frac{3\pi}{2} = i\frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Les résidus de g en ces points se calculent alors facilement :

$$\begin{aligned} \text{res} g\,(i) &= \lim_{z\to i} (z-i)\,g(z) \\ &= \lim_{z\to i} \frac{[\log z]^2}{z+i} \\ &= \frac{-\pi^2/4}{2i} = \boxed{\frac{\pi^2}{8} i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{res} g\,(-i) &= \lim_{z\to -i} (z+i)\,g(z) \\ &= \lim_{z\to -i} \frac{[\log z]^2}{z-i} \\ &= \frac{-9\pi^2/4}{-2i} = \boxed{-\frac{9\pi^2}{8} i} \end{aligned}$$

3) La fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus([0,+\infty[\cup\{-i,i\})$. Donc le théorème des résidus peut s'appliquer à la fonction g sur le contour proposé (qui contient un seul point singulier isolé $z=i$) et s'écrit

$$\int_{AB\cup C_R^+\cup DC\cup\gamma_\varepsilon^-} g(z)dz = (2i\pi)\,\mathrm{res}g\,(i)$$

De manière très classique, on paramètre le cercle γ_ε par $z=\varepsilon e^{i\theta}$ avec $\theta\in\,]0,2\pi[$. On a dans ce cas $\rho=\varepsilon$ et donc :

$$|zg(z)| = \left|\varepsilon\frac{(\ln\varepsilon+i\theta)^2}{\varepsilon^2e^{2i\theta}+1}\right|$$

En utilisant les majorations classiques

$$\begin{array}{rcl} |\ln\varepsilon+i\theta| & \leq & |\ln\varepsilon|+2\pi = -\ln\varepsilon+2\pi \text{ (car } \varepsilon \text{ “petit”)} \\ \left|\varepsilon^2e^{2i\theta}+1\right| & \geq & \left|1-\left|\varepsilon^2e^{2i\theta}\right|\right| = 1-\varepsilon^2 \text{ (car } \varepsilon \text{ “petit”)} \end{array}$$

on obtient sur le cercle γ_ε la majoration

$$0\leq|zg(z)|\leq\frac{\varepsilon\left(-\ln\varepsilon+2\pi\right)^2}{1-\varepsilon^2}\underset{\varepsilon\to0}{\to}0$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\gamma_\varepsilon}|zg(z)|=0$$

Le premier lemme de Jordan permet alors de conclure à

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}g(z)dz=0}$$

On fait de même sur le cercle C_R avec $z=Re^{i\theta}$. Puisque $\left|\varepsilon^2e^{2i\theta}+1\right|\geq|R^2-1|=R^2-1$ (car R “grand”), on a :

$$0\leq|zg(z)|\leq\frac{R\left(\ln R+2\pi\right)^2}{R^2-1}\underset{R\to\infty}{\to}0,$$

d'où

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{C_R}|zg(z)|=0$$

D'après le premier lemme de Jordan, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}g(z)dz=0}$$

Puisque les intégrales sur C_R et sur γ_ε tendent vers 0, lorsque $R\to+\infty$ et $\varepsilon\to0$, on obtient par passage à la limite dans l'égalité provenant du théorème des résidus

$$\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to0}\int_{AB}g(z)dz+0+\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to0}\int_{DC}g(z)dz+0=(2i\pi)\frac{\pi^2}{8}i$$

Mais sur AB, on a d'après ce qui précède

$$g(z)=\frac{[\ln x]^2}{x^2+1}$$

De même, sur CD

$$g(z) = \frac{[\ln(-x) + i\pi]^2}{x^2+1}$$

On en déduit

$$\int_0^{+\infty} \frac{[\ln x]^2}{x^2+1} dx + \lim_{R\to+\infty, \varepsilon\to 0} \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{[\ln(-x) + i\pi]^2}{x^2+1} dx = -\frac{\pi^3}{4}$$

En faisant le changement de variables $u = -x$ dans la seconde intégrale, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{[\ln x]^2}{x^2+1} dx + \lim_{R\to+\infty, \varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{[\ln(u) + i\pi]^2}{u^2+1} du = -\frac{\pi^3}{4}$$

soit

$$I + \int_0^{+\infty} \frac{[\ln u]^2}{u^2+1} du + (2i\pi) \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1} du - \pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+1} du = -\frac{\pi^3}{4}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires de l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} 2I - \pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+1} du &= -\frac{\pi^3}{4} \\ (2i\pi) \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1} du &= 0 \end{aligned}$$

La première égalité donne

$$\begin{aligned} 2I &= -\frac{\pi^3}{4} + \pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+1} du \\ &= -\frac{\pi^3}{4} + \pi^2 \left[\mathrm{Arctgu}\right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{\pi^3}{4} + \pi^2 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{4} \end{aligned}$$

d'où

$$I = \frac{\pi^3}{8}$$

Exercice 2

1) On sait que pour une fonction f définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, le théorème de dérivation s'écrit

$$TL\left[f'(t)\right] = pF(p) - f(0^+)$$

donc en prenant la transformée de Laplace des deux équations du système

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(t) = 2f(t) - 3g(t) \\ g'(t) = -2f(t) + g(t) \end{array} \right. ,$$

on a

$$\left\{ \begin{array}{l} pF(p) - f(0) = 2F(p) - 3G(p) \\ pG(p) - g(0) = -2F(p) + G(p) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} (p-2)\, F(p) + 3G(p) = f(0) = 8 \\ 2F(p) + (p-1)\, G(p) = g(0) = 3 \end{array}} \right. \qquad (1)$$

2) Le système précédent peut se réécrire comme suit

$$\begin{gathered}2\,(p-2)\,F(p)+6G(p)=16\\ 2\,(p-2)\,F(p)+(p-1)\,(p-2)\,G(p)=3\,(p-2)\end{gathered}$$

d'où après soustraction

$$[6-(p-2)\,(p-1)]\,G(p)=16-3\,(p-2)$$

soit

$$G(p)=\frac{-3p+22}{-p^2+3p+4}$$

De la même façon, on obtient :

$$\begin{gathered}(p-1)\,(p-2)\,F(p)+3\,(p-1)\,G(p)=8\,(p-1)\\ 6F(p)+3\,(p-1)\,G(p)=9\end{gathered}$$

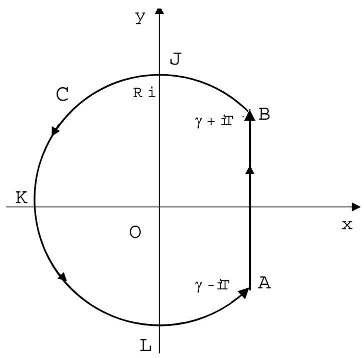
d'où après soustraction

$$[(p-1)\,(p-2)-6]\,F(p)=8\,(p-1)-9$$

soit

$$F(p)=\frac{8p-17}{p^2-3p-4}$$

2) En utilisant l'égalité $p^2-3p-4=(p+1)\,(p-4)$, on remarque que F et G ont les mêmes points singuliers isolés $p=-1$ et $p=4$ qui sont des pôles d'ordre 1. La formule d'inversion de la transformée de Laplace appliquée aux fonctions $F(p)$ et $G(p)$ sur le contour de Bromwich représenté ci-dessous :



Contour de Bromwich

permet d'obtenir

$$\begin{aligned}f(t) &= \int_{D\uparrow} F(p)e^{pt}dp\\ &= \sum_{p_i \text{ psi de } F \text{ situé à l'intérieur de } BJCKLAB} \operatorname{res}\left\{F(p)e^{pt}\right\}(p_i)\\ &= \operatorname{res}\left\{F(p)e^{pt}\right\}(-1)+\operatorname{res}\left\{F(p)e^{pt}\right\}(4)\\ &= \lim_{p\to-1}(p+1)\,F(p)e^{pt}+\lim_{p\to4}(p-4)\,F(p)e^{pt}\\ &= \lim_{p\to-1}\frac{8p-17}{p-4}e^{pt}+\lim_{p\to4}\frac{8p-17}{p+1}e^{pt}\\ &= 5e^{-t}+3e^{4t}\end{aligned}$$

L'intégrale de $F(p)e^{pt}$ sur l'arc de cercle $BJKLA$ tend vers 0 lorsque $p \to +\infty$ car $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ est une fraction rationnelle avec

$$\deg(N) = 1 < \deg(D) = 2$$

Puisque l'expression de $f(t)$ est valable pour $t > 0$ et qu'on s'intéresse aux fonctions causales, on obtient

$$\boxed{f(t) = \left[5e^{-t} + 3e^{4t}\right] u(t)}$$

De même

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_{D\uparrow} G(p)e^{pt}dp \\
&= \sum_{p_i \text{ psi de } F \text{ situé à l'intérieur de } BJCKLAB} \operatorname{res}\left\{G(p)e^{pt}\right\}(p_i) \\
&= \operatorname{res}\left\{G(p)e^{pt}\right\}(-1) + \operatorname{res}\left\{G(p)e^{pt}\right\}(4) \\
&= \lim_{p\to-1} (p+1)\,G(p)e^{pt} + \lim_{p\to4} (p-4)\,G(p)e^{pt} \\
&= \lim_{p\to-1} \frac{3p-22}{p-4}e^{pt} + \lim_{p\to4} \frac{3p-22}{p+1}e^{pt} \\
&= 5e^{-t} - 2e^{4t}
\end{aligned}$$

L'intégrale de $G(p)e^{pt}$ sur l'arc de cercle $BJKLA$ tend vers 0 lorsque $p \to +\infty$ car $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ est une fraction rationnelle avec

$$\deg(N) = 1 < \deg(D) = 2$$

Puisque l'expression de $g(t)$ est valable pour $t > 0$ et qu'on s'intéresse aux fonctions causales, on obtient

$$\boxed{g(t) = \left[5e^{-t} - 2e^{4t}\right] u(t)}$$

Exercice 3

1) En prenant la transformée en Z de l'équation récurrente

$$y(n+3) - 2y(n+2) + y(n+1) = x(n), \qquad n > 0$$

on obtient

$$z^3Y(z) - 2z^2Y(z) + zY(z) = X(z)$$

d'où

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \boxed{\frac{1}{z^3 - 2z^2 + z}}$$

Le dénominateur de cette fonction de transfert se factorise comme suit

$$H(z) = \frac{1}{z\left(z^2 - 2z + 1\right)} = \frac{1}{z\left(z-1\right)^2}$$

La fonction de transfert $H(z)$ possède donc un pôle simple $z = 0$ et un pôle double $z = 1$. Elle ne possède pas de zèro.

2) La formule d'inversion de la transformée en Z s'écrit :

$$\begin{aligned} h(n) &= \sum \text{res}\left\{H(z)z^{n-1}\right\} \\ &= \sum \text{res}\left\{\frac{z^{n-2}}{(z-1)^2}\right\} \end{aligned}$$

où les résidus sont calculés en tous les points singuliers isolés de $H(z)z^{n-2}$ situés à l'intérieur d'un contour fermé entourant le domaine de convergence. Dans cet exercice, le domaine de convergence est $|z| \geq 1$ et pour $n \geq 2$, la fonction $H(z)z^{n-1}$ possède un seul point singulier isolé qui est $z = 1$. Donc, on a

$$h(n) = \text{res}\left\{\frac{z^{n-2}}{(z-1)^2}\right\}(1), \qquad \forall n \geq 2$$

Le point $z = 1$ étant un pôle double de $\frac{z^{n-2}}{(z-1)^2}$, le résidu se calcule comme suit

$$\begin{aligned} \text{res}\left\{\frac{z^{n-2}}{(z-1)^2}\right\}(1) &= \lim_{z\to 1}\frac{d\left\{(z-1)^2 H(z)z^{n-1}\right\}}{dz} \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{d\left\{z^{n-2}\right\}}{dz} \\ &= \boxed{n-2} \end{aligned}$$

3) Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned} h(1) &= \sum \text{res}\left\{H(z)z^{1-1}\right\} \\ &= \sum \text{res}\left\{\frac{1}{z(z-1)^2}\right\} \end{aligned}$$

où les résidus sont calculés en tous les points singuliers isolés de $\frac{1}{z(z-1)^2}$ situés à l'intérieur d'un contour fermé entourant le domaine de convergence. Dans cet exercice, le domaine de convergence est $|z| \geq 1$ et la fonction $\frac{1}{z(z-1)^2}$ possède deux points singuliers isolés $z = 0$ et $z = 1$. On a donc

$$h(1) = \text{res}\left\{\frac{1}{z(z-1)^2}\right\}(0) + \text{res}\left\{\frac{1}{z(z-1)^2}\right\}(1)$$

Puisque $z = 0$ est un pôle simple de $\frac{1}{z(z-1)^2}$, on a

$$\text{res}\left\{\frac{1}{z(z-1)^2}\right\}(0) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(z-1)^2} = 1$$

De même, $z = 1$ étant un pôle double de $\frac{1}{z(z-1)^2}$, on a

$$\text{res}\left\{\frac{1}{z(z-1)^2}\right\}(1) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z}\right] = -1$$

On en conclut

$$\boxed{h(1) = 0}$$

Pour $n = 0$, on obtient de la même manière

$$\begin{aligned}
h(2) &= \sum \text{res}\left\{H(z)z^{0-1}\right\} \\
&= \sum \text{res}\left\{\frac{1}{z^2\left(z-1\right)^2}\right\} \\
&= \text{res}\left\{\frac{1}{z^2\left(z-1\right)^2}\right\}(0) + \text{res}\left\{\frac{1}{z^2\left(z-1\right)^2}\right\}(1) \\
&= 2 - 2 = 0
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{h\left(0\right) = 0}$$

et par suite

$$\boxed{h\left(n\right) = \left(n-2\right)u(n-2)}$$

4) La sortie du système notée $y(n)$ est telle que

$$y(n) = x(n) * h(n) \Leftrightarrow Y(z) = X(z)H(z)$$

Lorsque l'entrée est $x(n) = u(n)$, on a

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ pour } \left|z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1 \\
&= \frac{z}{z-1} \text{ pour } |z| > 1
\end{aligned}$$

On en déduit

$$Y(z) = \frac{z}{z-1}\frac{1}{z\left(z-1\right)^2} = \frac{1}{\left(z-1\right)^3}$$

Pour trouver la sortie $y(n)$, il suffit d'inverser la transformée en Z ci-dessus. On a alors

$$\begin{aligned}
y(n) &= \sum \text{res}\left\{Y(z)z^{n-1}\right\} \\
&= \sum \text{res}\left\{\frac{z^{n-1}}{\left(z-1\right)^3}\right\}
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$, la fonction $\frac{z^{n-1}}{(z-1)^3}$ admet un unique pôle $z = 1$ d'ordre $p = 3$. En utilisant le rappel, on a

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}\left\{\frac{z^{n-1}}{(z-1)^3}\right\}(1) &= \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-1)^3\,\frac{z^{n-1}}{(z-1)^3}\right]\Bigg|_{z=1} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dz^2}\left[z^{n-1}\right]\Big|_{z=1} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[(n-1)\,(n-2)\,z^{n-3}\right] \\
&= \frac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2)
\end{aligned}
$$

On en déduit

$$
\boxed{y(n) = \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2)\,, \qquad \forall n \geq 1}
$$