## Correction d'Examen Variable Complexe — Samedi 19 Janvier 2008

### Exercice 1

1) Pour définir les déterminations de $f(z)=\sqrt{z}$ ayant pour coupure le demi axe des réels positifs, il suffit de poser $z=\rho e^{i(\theta+2k\pi)}$ avec $\theta\in\left]0,2\pi\right[$ pour obtenir :

$$f_k(z)=\left[\rho e^{i(\theta+2k\pi)}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\rho}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)}$$

Au point z=-1 on a ρ=1 et θ=π, d'où

$$f_k(z=-1)=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}=ie^{ik\pi}$$

On choisira la détermination principale correspondant à k = 0, $f_0(z)=\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$, sachant que toutes les déterminations de rang pair conviennent.

Sur le bord supérieur de la coupure, on a θ = 0 et ρ = x, d'où

$$f_0(z)=\sqrt{x}$$

Sur le bord inférieur de la coupure, on a θ = 2π et ρ = x, d'où

$$f_0(z)=\sqrt{x}e^{i\pi}=-\sqrt{x}$$

2) Les points singuliers isolés de $g(z)=\dfrac{\sqrt{z}}{z^3+1}$ sont les racines de $z^3+1=0$, c'est-à-dire

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{3}},\ z_2=e^{i\pi}\ \text{et}\ z_3=e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Ce sont tous des pôles d'ordre 1. En utilisant la détermination de $f(z)=\sqrt{z}$ a définie ci-dessus, on a $\sqrt{z_1}=e^{i\frac{\pi}{6}}$, $\sqrt{z_2}=i$ et $\sqrt{z_3}=e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Les résidus de *g* en ces points se calculent alors facilement à l'aide de l'expression :

$$resg(z_k)=\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}=\frac{\sqrt{z_k}}{3{z_k}^2}$$

On obtient

$$resg(z_1)=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{3\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}=\frac{1}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}=-\frac{i}{3}$$

$$resg(z_2)=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{3\left(e^{i\pi}\right)^2}=\frac{1}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\pi\right)}=\frac{1}{3}e^{-i\frac{3\pi}{2}}=\frac{i}{3}$$

$$resg(z_3)=\frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}}{3\left(e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)^2}=\frac{1}{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{10\pi}{3}\right)}=\frac{1}{3}e^{-i\frac{5\pi}{2}}=-\frac{i}{3}$$

3) La fonction g est holomorphe sur $C\setminus\left([0,+\infty[\cup\{z_1,z_2,z_3\}\right)$. Donc le théorème des résidus peut s'appliquer à la fonction g sur le contour proposé (qui contient les 3 points singuliers isolés) et s'écrit

$$\int_{AB\cup C_R^+\cup DC\cup\gamma_\varepsilon^-} g(z)dz=2i\pi\sum_{k=1}^{3}resg(z_k)$$

$$=2i\pi\left(-\frac{i}{3}+\frac{i}{3}-\frac{i}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

On décrit le cercle $\gamma_\varepsilon$ par $z=\varepsilon e^{i\theta}$ avec $\theta\in\,]0,2\pi[$. On a dans ce cas $\rho=\varepsilon$ et donc :

$$|zg(z)|=\left|\varepsilon\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon^3e^{3i\theta}+1}\right|$$

En utilisant les majorations classiques

$$\left|\varepsilon^3e^{3i\theta}+1\right|\geq\left|1-\left|\varepsilon^3e^{3i\theta}\right|\right|=1-\varepsilon^3 \text{ (car } \varepsilon \text{ “petit”)}$$

on obtient sur le cercle $\gamma_\varepsilon$ la majoration quand $\varepsilon\to 0$

$$0\leq|zg(z)|\leq\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon^3}\to 0,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\sup|zg(z)|=0$$

Le premier lemme de Jordan permet alors de conclure à

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}g(z)dz=0$$

Sur le cercle CR on a $z=Re^{i\theta}$. Puisque $\left|R^3e^{3i\theta}+1\right|\geq\left|1-\left|R^3e^{3i\theta}\right|\right|=R^3-1$ (car R “grand”), on a quand $R\to\infty$ :

$$0\leq|zg(z)|\leq\frac{R\sqrt{R}}{R^3-1}\to 0$$

d'où

$$\lim_{R\to\infty}\sup|zg(z)|=0$$

D'après le premier lemme de Jordan, on en déduit :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}g(z)dz=0$$

Puisque les intégrales sur $C_R$ et sur $\gamma_\varepsilon$ tendent vers 0, lorsque $R\to+\infty$ et $\varepsilon\to 0$, on obtient par passage à la limite dans l'égalité provenant du théorème des résidus

$$\lim_{R\to\infty,\varepsilon\to 0}\int_{AB}g(z)dz+0-\lim_{R\to\infty,\varepsilon\to 0}\int_{CD}g(z)dz+0=\frac{2\pi}{3}$$

Mais sur AB, on a d'après ce qui précède

$$g(z)=\frac{\sqrt{x}}{x^3+1}$$

De même sur CD

$$g(z)=-\frac{\sqrt{x}}{x^3+1}$$

On obtient donc

$$\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^3+1}dx-\int_0^{\infty}\frac{-\sqrt{x}}{x^3+1}dx=\frac{2\pi}{3}$$

d'où le résultat de l'intégral recherché

$$I=\frac{\pi}{3}$$

**Exercice 2**

On considère l'équation différentielle

$$f''(t)+4f'(t)+4f(t)=g(t), \qquad t>0$$

avec les conditions initiales suivantes

$$f(0) = -2 \text{ et } f'(0) = 8$$

1) On sait que pour une fonction f définie de R+ dans R, le théorème de dérivation s'écrit

$$TL\left[f'(t)\right]=pF(p)-f\left(0^+\right)$$

$$TL\left[f''(t)\right]=p^2F(p)-pf\left(0^+\right)-f'\left(0^+\right)$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle, on obtient

$$p^2F(p)+2p-8+4\left(pF(p)+2\right)+4F(p)=G(p)$$

$$\left(p^2+4p+4\right)F(p)+2p=G(p)$$

d'où

$$F(p)=-\frac{2p}{p^2+4p+4}+\frac{G(p)}{p^2+4p+4}$$

On a par factorisation $p^2+4p+4=(p+2)^2$

d'où

$$A(p)=-\frac{2p}{(p+2)^2} \text{ et } B(p)=\frac{1}{(p+2)^2}$$

2) Première méthode :

$$A(p)=\frac{a_1}{p+2}+\frac{a_2}{(p+2)^2}=\frac{a_2+a_1p+2a_1}{(p+2)^2}$$

Par identification, nous avons

$$a_1=-2\,,\, a_2+2a_1=0$$

d'où $a_1=-2, a_2=4$

Deuxième méthode pour un pôle d'ordre 2 :

$$\lim_{p\to-2}\frac{d}{dp}(p+2)^2 A(p)=a_1=-2$$

$$\lim_{p\to-2}(p+2)^2\left(A(p)-\frac{a_1}{p+2}\right)=a_2=\lim_{p\to-2}(p+2)^2\left(\frac{-2p}{(p+2)^2}+\frac{2(p+2)}{(p+2)^2}\right)=4$$

Cette deuxième méthode est généralisable à un pôle d'ordre n sans la résolution d'un système d'équation linéaire, mais avec des calculs de limites et de dérivations supplémentaires.

On en déduit, à l'aide des tables de transformation :

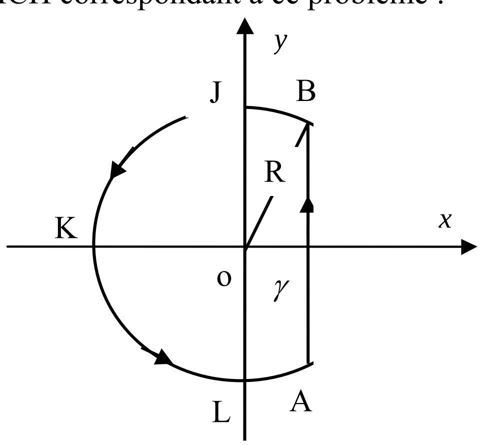
$$a(t)=\left(-2e^{-2t}+4te^{-2t}\right)u(t)$$

3) La fonction $g(t) = 6e^{-2t}u(t)$ , admet pour transformée de Laplace $G(p)=\frac{6}{p+2}$, donc

$$G(p)B(p)=\frac{6}{(p+2)^3}$$

On désire appliquer la formule d'inversion de la transformée de Laplace à la fonction $G(p)B(p)$.

• Le contour de BROWICH correspondant à ce problème :




où le segment AB est défini par x=c, avec c>-2

• $G(p)B(p)$ s'écrit $N(p)/D(p)$, avec deg($N$)=0 et deg($D$)=3. L'intégrale sur le contour circulaire tend vers 0 lorsque $R\to\infty$.

• la fonction $G(p)B(p)e^{pt}$ admet comme point singulier isolé $p_1$=-2. Il s'agit d'un pôle d'ordre 3. D'où

$$res\left\{G(p)B(p)e^{pt}\right\}(-2) = \frac{1}{2}\lim_{p\to -2}\frac{d^2}{dp^2}(p+2)^3 G(p)B(p)e^{pt}$$

$$= 3\lim_{p\to -2}\frac{d^2}{dp^2}e^{pt} = 3t^2e^{-2t}$$

• La solution de l'équation différentielle $f(t)$ s'écrit

$$f(t) = a(t) + \frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} G(p)B(p)e^{pt}dp$$

$$= a(t) + \sum_{p_i \text{PSI de GB situé à l'intérieur de BJCKLAB}} res\left\{G(p)B(p)e^{pt}\right\}(p_i)$$

$$= \left(-2e^{-2t} + 4te^{-2t}\right)u(t) + 3t^2e^{-2t}u(t)$$

$$= (3t^2 + 4t - 2)e^{-2t}u(t)$$

**Exercice 3**

1) a) On a

$$y_1(n) = x(n-1) + ... + x(n-L)$$

donc, d'après le théorème du retard,

$$Y_1(z) = X(z)z^{-1} + ... + X(z)z^{-L} = X(z)\left[z^{-1} + ... + z^{-L}\right]$$

On voit donc que $Y_1(z)$ s'écrit $X(z)H(z)$, ce qui signifie que $y_1(n)$ est le résultat d'un filtrage linéaire de $x(n)$. La fonction de transfert de ce filtre est :

$$H(z) = z^{-1} + ... + z^{-L} = \boxed{z^{-1}\frac{1-z^{-L}}{1-z^{-1}}}$$

La réponse impulsionnelle du filtre est

$$\begin{aligned} h(n) &= TZ^{-1}\left[H(z)\right] = TZ^{-1}\left[z^{-1} + ... + z^{-L}\right] \\ &= \boxed{\delta(n-1) + ... + \delta(n-L)} \end{aligned}$$

b) La transformée en Z du signal $s_1(n)$ est

$$S_1(z) = \sum_{i=1}^{L} iz^{-i} + \sum_{i=L+1}^{+\infty} Lz^{-i}$$

Or, en dérivant

$$1 + x + x^2 + ... + x^L = \frac{1-x^{L+1}}{1-x},$$

on obtient

$$1 + 2x + ... + Lx^{L-1} = \frac{-(L+1)x^L(1-x) + 1 - x^{L+1}}{(1-x)^2}$$

d'où en multipliant tout par $x$ et en posant $x = z^{-1}$

$$\sum_{i=1}^{L} iz^{-i} = z^{-1}\frac{-(L+1)z^{-L}(1-z^{-1}) + 1 - z^{-(L+1)}}{(1-z^{-1})^2}$$

Par ailleurs

$$\sum_{i=L+1}^{+\infty} Lz^{-i} = Lz^{-(L+1)}\frac{1}{1-z^{-1}} \text{ pour } \left|z^{-1}\right| < 1$$

En regroupant les expressions des deux sommes $\sum_{i=1}^{L} iz^{-i}$ et $\sum_{i=L+1}^{+\infty} Lz^{-i}$, on obtient :

$$\boxed{S_1(z) = \frac{z^{-1}(1-z^{-L})}{(1-z^{-1})^2}}$$

c) Lorsque $x(n) = u(n)$, on a

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)U(z) \\ &= z^{-1}\frac{1-z^{-L}}{1-z^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}} \\ &= S_1(z) \end{aligned}$$

La réponse indicielle du filtre est donc le signal $s_1(n)$ représenté ci-dessous pour $L = 5$ :

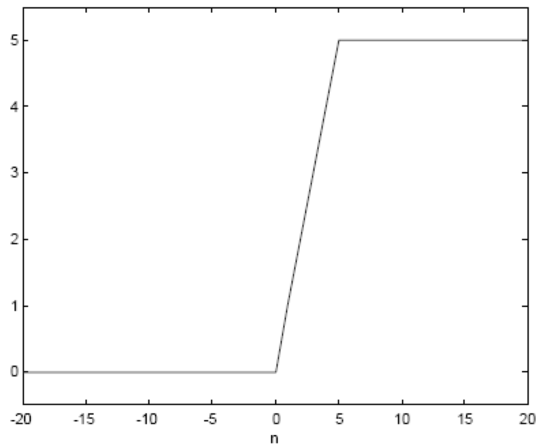



Figure 1 : Réponse Indicielle du système 1

2) La réponse indicielle du $2^{ème}$ système s'écrit

$$u(n+1)+...+u(n+L)=\begin{cases} 0 \text{ si } n<-L \\ L+n+1 \text{ si } n\in\{-L,...,-1\} \\ L \text{ si } n\geq 0 \end{cases}$$

et est représentée ci-dessous pour $L=5$ :

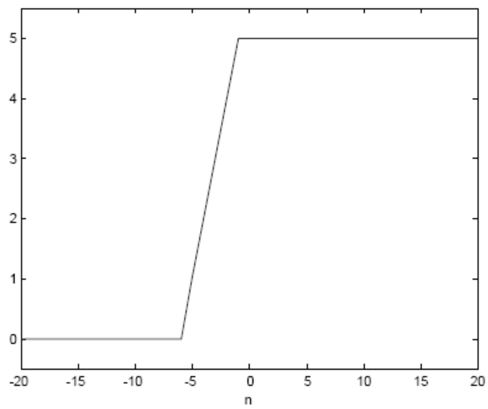



Figure 2 : Réponse Indicielle du système 2

3) La réponse indicielle de cette opération est la différence entre les réponses déterminées aux questions 1) et 2) représentée ci dessous :

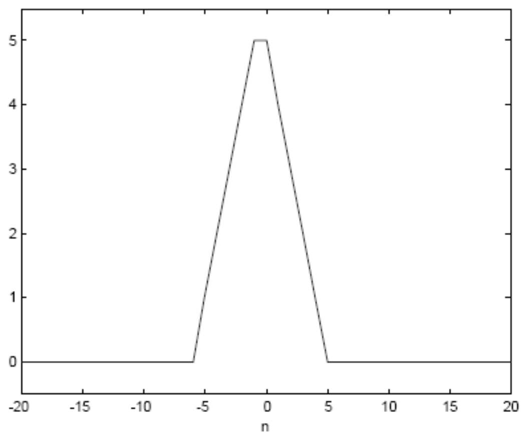



Figure 3 : Réponse Indicielle du système 3

On voit donc qu'un pic apparait à l'instant de la discontinuité. Ce filtre permet de déterminer les ruptures dans un signal. Les applications sont diverses et variées : détection de contours en traitement d'images, détection de défaillances, ... L'effet du filtre sur le signal de l'énoncé est illustré ci-dessous :

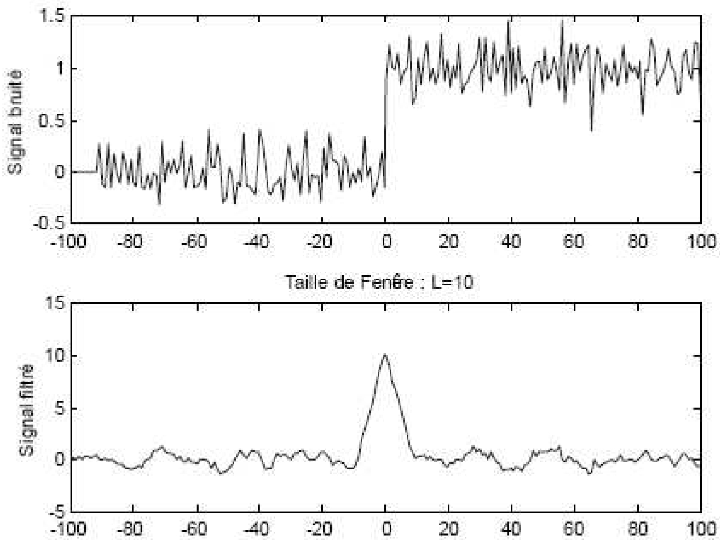



Figure 3. Détection de rupture