Correction d'Examen Variable Complexe Samedi 5 novembre 2011

Exercice 1

1) on pose $z = \rho e^{j(\theta+2k\pi)}$ avec $\theta \in \left]0, 2\pi\right[$ dans le cas d'une coupure le demi axe des réels positifs ;

la détermination d'ordre k pour la fonction $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ est :

$$f_k(z) = \frac{1}{\left[\rho e^{j(\theta+2k\pi)}\right]^{1/2}} = \frac{e^{-j\frac{(\theta+2k\pi)}{2}}}{\sqrt{\rho}}$$

Au point z = -1, nous avons $\rho = 1$; $\theta = \pi$.

$$f_k(z=-1) = e^{-j\frac{(\pi+2k\pi)}{2}} = -j(-1)^k$$

Le choix de *k*=0 vérifie la condition imposée. Nous avons donc

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-j\frac{\theta}{2}}$$

Sur le bord supérieur : $\rho = x$ et $\theta = 0$, d'où

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Sur le bord inférieur de la coupure, on a $\theta = 2\pi$ et $\rho = x$, d'où

$$f_0(z) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

2) Le point *z*=-10 est un pôle simple pour la fonction $g(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(z+10)}$.

Les résidus de *f* en ce point se calculent facilement à l'aide de l'expression :

$$resg(z=-10) = \lim_{z\to-10} (z+10)g(z) = \lim_{z\to-10} f(z) = \frac{1}{\sqrt{10}e^{j\frac{\pi}{2}}} = -\frac{j}{\sqrt{10}}$$

3) La fonction *g*(*z*) avec le choix de $f_0(z)$ est holomorphe sur $AB \cup C_R \cup DC \cup \gamma_E$. Donc le théorème des résidus s'applique à la fonction *g* sur le contour proposé (le point singulier isolé *z*=-10 se trouve à l'intérieur) et s'écrit

$$\int_{AB\cup C_R^+\cup DC\cup\gamma_\varepsilon^-} g(z)dz = 2j\pi resg(z=-10) = \frac{2\pi}{\sqrt{10}}$$

On décrit le cercle γ_ε par $z = \varepsilon e^{j\theta}$ avec $\theta \in \left]0, 2\pi\right[$. On a dans ce cas $\rho = \varepsilon$ et donc :

$$|zg(z)| = \left|\frac{\sqrt{\varepsilon}}{(10+\varepsilon e^{j\theta})}\right|$$

En utilisant les majorations classiques

$$\left|\varepsilon e^{j\theta}+10\right|\geq\left|10-\left|\varepsilon e^{j\theta}\right|\right|=10-\varepsilon \text{ (car ε “petit”)}$$

On obtient sur le cercle γ_ε la majoration quand $\varepsilon \to 0$

$$0\leq\left|zg\left(z\right)\right|\leq\frac{\sqrt{\varepsilon}}{10-\varepsilon}\to 0\,,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left|zg(z)\right|=0$$

Le premier lemme de Jordan permet alors de conclure à

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} g\left(z\right)dz=0$$

Sur le cercle CR on a $z = Re^{j\theta}$. Puisque $\left|Re^{j\theta}+10\right|\geq\left|10-\left|Re^{j\theta}\right|\right|=R-10$ (car R “grand”), on a quand $R\to\infty$:

$$0\leq\left|zg\left(z\right)\right|\leq\frac{\sqrt{R}}{R-10}\to 0$$

D’où

$$\lim_{R\to\infty}\sup\left|zg(z)\right|=0$$

D’après le premier lemme de Jordan, on en déduit :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g\left(z\right)dz=0$$

Puisque les intégrales sur C_R et sur γ_ε tendent vers 0, lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$, on obtient par le passage à la limite dans l’égalité provenant du théorème des résidus

$$\lim_{R\to\infty,\varepsilon\to 0}\int_{AB} g\left(z\right)dz+0-\lim_{R\to\infty,\varepsilon\to 0}\int_{CD} g\left(z\right)dz+0=\frac{2\pi}{\sqrt{10}}$$

Mais sur AB, on a : $$g\left(z\right)=\frac{1}{\sqrt{x}\left(10+x\right)}$$

De même sur CD : $$g\left(z\right)=-\frac{1}{\sqrt{x}\left(10+x\right)}$$

On obtient donc

$$\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x}\left(10+x\right)}-\int_0^\infty\frac{-dx}{\sqrt{x}\left(10+x\right)}=\frac{2\pi}{\sqrt{10}}$$

D'où le résultat de l'intégral : $$I=\frac{\pi}{\sqrt{10}}$$

Exercice 2

1) En prenant la transformée en Z de l’équation récurrente

$$y\left(n\right)-\frac{y\left(n-2\right)}{4}=x\left(n-1\right)$$

On obtient

$$Y(z) = z^{-1}X(z) + \frac{1}{4}z^{-2}Y(z)$$

D'où la fonction de transfert définie par : $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{4z}{4z^2-1}$

2) La transformée en Z de $u(n)$ s'écrit :

$$U(z) = TZ\left[u(n)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

3) Connaissant $U(z)$ et $H(z)$, nous avons

$$H(z)U(z)z^{n-1} = \frac{4z}{4z^2-1}\frac{z}{z-1}z^{n-1} = \frac{4z^{n+1}}{(4z^2-1)(z-1)}$$

Pour tout $n >= -1$, les points singuliers sont 3 pôles simples : $z_1=1$; $z_2= -1/2$; $z_3=1/2$.

Pour $z=1$, $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)\dfrac{4z^{n+1}}{(4z^2-1)(z-1)} = \dfrac{4}{3}$

Pour $z=1/2$, $\lim\limits_{z\to 1/2}\left(z-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{4z^{n+1}}{(4z^2-1)(z-1)} = \lim\limits_{z\to 1/2}\dfrac{2z^{n+1}}{(2z+1)(z-1)} = -\dfrac{1}{2^n}$

Pour $z=-1/2$, $\lim\limits_{z\to -1/2}\left(z+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{4z^{n+1}}{(4z^2-1)(z-1)} = \lim\limits_{z\to -1/2}\dfrac{2z^{n+1}}{(2z-1)(z-1)} = -\dfrac{1}{3\times(-2)^n}$

Selon la formule d'inversion et à l'aide du théorème des résidus, nous avons :

$$r(n) = \frac{4}{3} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3}\frac{1}{(-2)^n}$$

4) A l'aide de la relation $\delta(n) = u(n)-u(n-1)$, on peut déduire la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système par $h(n) = r(n)-r(n-1)$

$$h(n) = \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3}\frac{1}{(-2)^n}\right] - \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3}\frac{1}{(-2)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{2}{2^n} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3}\frac{2}{(-2)^n} - \frac{1}{3}\frac{1}{(-2)^n} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{(-2)^n} = \frac{1}{2^n}\left(1-(-1)^n\right)$$

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$\frac{d^3}{dt^3}f(t) - 3\frac{d}{dt}f(t) - 2f(t) = g(t), \qquad t > 0$$

Avec les conditions initiales suivantes

$$f(0) = 0, \quad \frac{d}{dt}f(0) = \frac{d^2}{dt^2}f(0) = 1$$

1) Appliquons le théorème de dérivation :

$$TL\left[f'(t)\right] = pF(p) - f(0^+) = pF(p)$$

$$TL\left[f''(t)\right] = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

$$TL\left[f^{(3)}(t)\right] = p^3F(p) - p^2f(0^+) - pf'(0^+) - f''(0^+) = p^3F(p) - p - 1$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle, on obtient

$$p^3F(p) - p - 1 - 3pF(p) - 2F(p) = G(p)$$

$$\left(p^3 - 3p - 2\right)F(p) - p - 1 = G(p)$$

D'où

$$F(p) = \frac{p+1}{p^3 - 3p - 2} + \frac{G(p)}{p^3 - 3p - 2}$$

Par identification nous avons

$$A(p) = \frac{p+1}{p^3 - 3p - 2} \text{ et } B(p) = \frac{1}{p^3 - 3p - 2}$$

2) La factorisation de $p^3 - 3p - 2$ conduit à :

$$p^3 - 3p - 2 = (p+1)\left(p^2 - p - 2\right) = (p+1)^2(p-2)$$

Nous avons :

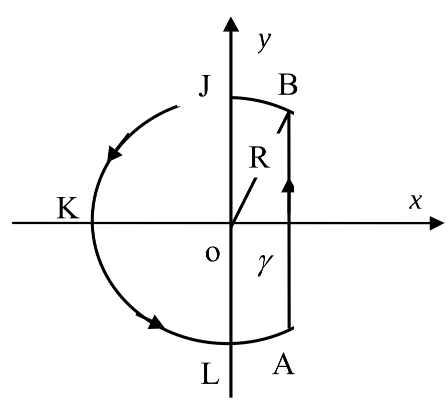
$$A(p) = \frac{1}{(p-2)(p+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+1}\right)$$

A l'aide des tables de transformation, nous avons

$$a(t) = \frac{1}{3}\left(e^{2t} - e^{-t}\right)u(t)$$

3) La fonction $g(t) = u(t)$, admet pour transformée de Laplace $G(p) = \frac{1}{p}$, donc

$$G(p)B(p) = \frac{1}{p(p+1)^2(p-2)}$$



a) Les 3 PSI de la fonction $G(p)B(p)e^{pt}$ sont $p_1 = 0,\ p_2 = -1,\ p_3 = 2$. Afin qu'ils se trouvent à gauche du segment AB le contour de BROWICH correspondant à ce problème est celui ci-contre où le segment AB est défini par x=c, avec c>0. Ici c=2, la partie réelle du PSI le plus à droite.

b) $G(p)B(p)$ s'écrit $N(p)/D(p)$, avec deg(N)=0 et deg(D)=4. L'intégrale sur le contour circulaire tend vers 0 lorsque $R \to \infty$.

c) p_2=-1 est un pôle d'ordre 2. Nous avons

$$res\left\{G(p)B(p)e^{pt}\right\}(-1)=\lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}(p+1)^2G(p)B(p)e^{pt}$$

$$=\lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\frac{e^{pt}}{p(p-2)}=\lim_{p\to-1}\frac{te^{pt}\left(p^2-2p\right)-(2p-2)e^{pt}}{\left(p^2-2p\right)^2}=\frac{1}{9}(3t+4)e^{-t}$$

Pour les deux autres pôles simples, nous avons

$$res\left\{G(p)B(p)e^{pt}\right\}(i)=\lim_{p\to0}pG(p)B(p)e^{pt}=\lim_{p\to0}\frac{e^{pt}}{(p+1)^2(p-2)}=-\frac{1}{2}$$

$$res\left\{G(p)B(p)e^{pt}\right\}(2)=\lim_{p\to2}(p-2)G(p)B(p)e^{pt}=\lim_{p\to2}\frac{e^{pt}}{p(p+1)^2}=\frac{1}{18}e^{2t}$$

d) La solution de l'équation différentielle $f(t)$ s'écrit

$$f(t)=a(t)+\frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow}G(p)B(p)e^{pt}dp$$

$$=a(t)+\sum_{p_i\text{PSI de GB situé à l'intérieur de BJCKLAB}}res\left\{G(p)B(p)e^{pt}\right\}(p_i)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{3t+1}{9}e^{-t}+\frac{7}{18}e^{2t}\right)u(t)$$