Correction d'Examen Variable Complexe

Samedi 7 Novembre 2009

Exercice 1

1) Pour définir les déterminations de $f(z) = \log z$ ayant pour coupure le demi axe des réels positifs, il suffit de poser $z = \rho e^{i(\theta+2k\pi)}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$ pour obtenir :

$$f_k(z) = \log\left[\rho e^{i(\theta+2k\pi)}\right] = \log \rho + i(\theta + 2k\pi)$$

Sur le bord inférieur de la coupure, nous avons $\theta=2\pi$, d'où la partie imaginaire de la détermination-*k*

$$2(1+k)\pi$$

Le choix de $k = -1$ permet donc d'annuler la partie imaginaire. Nous avons donc

$$f_{-1}(z) = \log \rho + i(\theta - 2\pi)$$

Sur le bord supérieur de la coupure, on a $\theta = 0$ et $\rho = x$, d'où

$$f_{-1}(z) = \log x - 2\pi i$$

Sur le bord inférieur de la coupure, on a $\theta = 2\pi$ et $\rho = x$, d'où

$$f_{-1}(z) = \log x$$

2) Les points singuliers isolés de $g(z) = \dfrac{[\log z]^2}{z^4+1}$ sont les racines de $z^4 + 1 = 0$, c'est-à-dire

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}},\ z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ et } z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Ce sont tous des pôles d'ordre 1. En utilisant la détermination de *f*(z) définie en 1), les résidus de *g* en ces points se calculent alors facilement à l'aide de l'expression :

$$resg(z_n) = \frac{P(z_n)}{Q'(z_n)} = \frac{[\log z_n]^2}{4z_n{}^3} = \frac{-(\theta_n - 2\pi)^2}{4z_n{}^3}$$

On obtient $$resg(z_1) = \frac{-\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi\right)^2}{4\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3} = -\frac{49}{64}\pi^2 e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \frac{49}{64}\pi^2 e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$resg(z_2) = \frac{-\left(\frac{3\pi}{4} - 2\pi\right)^2}{4\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^3} = -\frac{25}{64}\pi^2 e^{-i\frac{9\pi}{4}} = -\frac{25}{64}\pi^2 e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$resg(z_3) = \frac{-\left(\frac{5\pi}{4} - 2\pi\right)^2}{4\left(e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^3} = -\frac{9}{64}\pi^2 e^{-i\frac{15\pi}{4}} = -\frac{9}{64}\pi^2 e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$resg\left(z_4\right)=\frac{-\left(\frac{7\pi}{4}-2\pi\right)^2}{4\left(e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)^3}=-\frac{1}{64}\pi^2 e^{-i\frac{21\pi}{4}}=\frac{1}{64}\pi^2 e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

3) La fonction ***g*** est holomorphe sur $C\setminus\left(\left[0,+\infty\right[\cup\left\{z_1,z_2,z_3,z_4\right\}\right)$. Donc le théorème des résidus peut s'appliquer à la fonction ***g*** sur le contour proposé (qui contient les 4 points singuliers isolés) et s'écrit

$$\int_{AB\cup C_R^+\cup DC\cup\gamma_\varepsilon^-} g\left(z\right)dz=2i\pi\sum_{n=1}^{4} resg\left(z_n\right)=\frac{2i\pi\pi^2}{64}(49e^{i\frac{\pi}{4}}-25e^{-i\frac{\pi}{4}}-9e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}})$$

$$=\frac{i\pi^3}{64}\sqrt{2}\left(40+40i-24+24i\right)=\frac{i\pi^3}{4}\sqrt{2}-\pi^3\sqrt{2}$$

On décrit le cercle γ_ε par $z=\varepsilon e^{i\theta}$ avec $\theta\in\,]0,2\pi[$. On a dans ce cas $\rho=\varepsilon$ et donc :

$$\left|zg\left(z\right)\right|=\left|\varepsilon\frac{\left[\log\varepsilon+i\left(\theta-2\pi\right)\right]^2}{\varepsilon^4 e^{4i(\theta-2\pi)}+1}\right|$$

En utilisant les majorations classiques

$$\left|\varepsilon^4 e^{4i(\theta-2\pi)}+1\right|\geq\left|1-\left|\varepsilon^4 e^{4i(\theta-2\pi)}\right|\right|=1-\varepsilon^4\text{ (car } \varepsilon \text{ “petit”)}$$

$$\left|\log\varepsilon+i\left(\theta-2\pi\right)\right|\leq\left|\log\varepsilon\right|+\left|\theta-2\pi\right|\leq-\log\varepsilon+2\pi$$

on obtient sur le cercle γ_ε la majoration quand $\varepsilon\to0$

$$0\leq\left|zg\left(z\right)\right|\leq\frac{\varepsilon\left(-\log\varepsilon+2\pi\right)}{1-\varepsilon^4}\to0,\ \lim_{\varepsilon\to0}\sup\left|zg(z)\right|=0$$

Le premier lemme de Jordan permet alors de conclure à

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon} g\left(z\right)dz=0$$

Sur le cercle CR on a $z=Re^{i\theta}$. Or

$$\left|R^4 e^{4i(\theta-2\pi)}+1\right|\geq\left|1-\left|R^4 e^{4i(\theta-2\pi)}\right|\right|=R^4-1\text{ (car R “grand”)}$$

$$\left|\log R+i\left(\theta-2\pi\right)\right|\leq\left|\log R\right|+\left|\theta-2\pi\right|\leq\log R+2\pi$$

on a quand $R\to\infty$:

$$0\leq\left|zg\left(z\right)\right|\leq\frac{R\left(\log R+2\pi\right)^2}{R^4-1}\to0$$

d'où $$\lim_{R\to\infty}\sup\left|zg(z)\right|=0$$

D'après le premier lemme de Jordan, on en déduit :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g\left(z\right)dz=0$$

Puisque les intégrales sur C_R et sur γ_ε tendent vers 0, lorsque $R\to+\infty$ et $\varepsilon\to0$, on obtient par passage à la limite dans l'égalité provenant du théorème des résidus

$$\lim_{R\to\infty,\varepsilon\to0}\int_{AB} g\left(z\right)dz+0-\lim_{R\to\infty,\varepsilon\to0}\int_{CD} g\left(z\right)dz+0=\frac{i\pi^3}{4}\sqrt{2}-\pi^3\sqrt{2}$$

Mais sur AB, on a d'après ce qui précède

$$g\left(z\right)=\frac{\left(\log x-2\pi i\right)^2}{x^4+1}=\frac{\left(\log x\right)^2}{x^4+1}-\frac{4\pi^2}{x^4+1}-i\frac{4\pi\log x}{x^4+1}$$

De même sur CD

$$g(z)=\frac{(\log x)^2}{x^4+1}$$

On obtient donc

$$\int_0^\infty\left[\frac{(\log x)^2}{x^4+1}-\frac{4\pi^2}{x^4+1}-i\frac{4\pi\log x}{x^4+1}\right]dx-\int_0^\infty\frac{(\log x)^2}{x^4+1}dx=\frac{i\pi^3}{4}\sqrt{2}-\pi^3\sqrt{2}$$

$$-4\pi^2\int_0^\infty\frac{1}{x^4+1}dx-i4\pi\int_0^\infty\frac{\log x}{x^4+1}dx=\frac{i\pi^3}{4}\sqrt{2}-\pi^3\sqrt{2}$$

Par identification on trouve

$$I=-\left(\frac{\pi^3}{4}\sqrt{2}\right)\Big/4\pi=-\frac{\pi^2}{16}\sqrt{2}\,;\qquad J=\left(\pi^3\sqrt{2}\right)\Big/4\pi^2=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

Exercice 2

1) En prenant la transformée en Z de l’équation récurrente

$$y(n+2)-5y(n+1)+6y(n)=x(n),\qquad n>0$$

on obtient

$$z^2Y(z)-5zY(z)+6Y(z)=X(z)$$

d'où la fonction de transfert définie par : $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1}{z^2-5z+6}$

La factorisation du dénominateur de cette fonction de transfert donne

$$H(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}$$

Afin d'identifier les coefficients a_1 et a_2 dans $H(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-a_1z^{-1}}-\dfrac{z^{-1}}{1-a_2z^{-1}}$

On divise les numérateurs et les dénominateurs par la variable z, d'où

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-3z^{-1}}-\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

Les coefficients sont : $a_1=3$, $a_2=2$.

2) La transformée en Z de u(n-1) s'écrit :

$$TZ\left[u(n-1)\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}u(n-1)z^{-n}=\sum_{n=1}^{+\infty}z^{-n}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

3) En comparant H(z) et TZ[u(n-1)], on a amené à étudier la fonction $\dfrac{az^{-1}}{1-az^{-1}}=\dfrac{a/z}{1-a/z}$

Or, $F\left(\dfrac{z}{a}\right)\Leftrightarrow a^n f(n)$, d'où

$$TZ^{-1}\left[\frac{a/z}{1-a/z}\right]=a^nTZ^{-1}\left[\frac{1/z}{1-1/z}\right]=a^nu(n-1)$$

L'utilisation de cette relation permet l'identification de la réponse impulsionnelle de ce système :

$$h(n) = TZ^{-1}\left[H(z)\right] = 3^{n-1}u(n-1) - 2^{n-1}u(n-1) = \left(3^{n-1} - 2^{n-1}\right)u(n-1)$$

Exercice 3

On considère l’équation différentielle

$$\frac{d^3}{dt^3} f(t) + \frac{d}{dt} f(t) = g(t), \qquad t > 0$$

avec les conditions initiales suivantes

$$f(0) = 1, \quad \frac{d}{dt} f(0) = -2, \quad \frac{d^2}{dt^2} f(0) = 3$$

1) On sait que pour une fonction f définie de R+ dans R, le théorème de dérivation s'écrit

$$TL\left[f'(t)\right] = pF(p) - f\left(0^+\right)$$

$$TL\left[f''(t)\right] = p^2F(p) - pf\left(0^+\right) - f'\left(0^+\right)$$

$$TL\left[f^{(3)}(t)\right] = p^3F(p) - p^2 f\left(0^+\right) - pf'\left(0^+\right) - f''\left(0^+\right)$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle, on obtient

$$p^3F(p) - p^2 + 2p - 3 + pF(p) - 1 = G(p)$$

$$p\left(p^2+1\right)F(p) - p^2 + 2p - 4 = G(p)$$

d'où

$$F(p) = \frac{p^2 - 2p + 4}{p\left(p^2+1\right)} + \frac{G(p)}{p\left(p^2+1\right)}$$

Par identification nous avons

$$A(p) = \frac{p^2 - 2p + 4}{p\left(p^2+1\right)} \text{ et } B(p) = \frac{1}{p\left(p^2+1\right)}$$

2) Nous avons :

$$A(p) = \frac{a_1 + \ a_2 p}{p^2+1} + \frac{a_3}{p} = \frac{\left(a_2 + a_3\right)p^2 + a_1 p + a_3}{p\left(p^2+1\right)}$$

Par identification, nous avons

$$a_3 = 4\,, a_2 + a_3 = 1, \ a_1 = -2$$

d'où $a_1 = -2, \ a_2 = -3, \ a_3 = 4$

On en déduit, à l'aide des tables de transformation :

$$a(t) = \left(4 - 2\sin t - 3\cos t\right)u(t)$$

3) La fonction $g(t) = u(t)$, admet pour transformée de Laplace $G(p) = \frac{1}{p}$, donc

$$G(p)B(p)=\frac{1}{p^2\left(p^2+1\right)}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}$$

On désire appliquer la formule d'inversion de la transformée de Laplace à la fonction $G(p)B(p)$.

• Les trois PSI de la fonction $G(p)B(p)e^{pt}$ sont $p_1=0,\ p_2=i,\ p_3=-i$. Afin qu'ils se trouve à gauche du segment AB le contour de BROWICH correspondant à ce problème est celui ci-contre où le segment AB est défini par x=c, avec c>0

• $G(p)B(p)$ s'écrit $N(p)/D(p)$, avec deg(N)=0 et deg(D)=4. L'intégrale sur le contour circulaire tend vers 0 lorsque $R\to\infty$.

• p_1=0 est un pôle d'ordre 2. Nous avons

$$res\left\{G(p)B(p)e^{pt}\right\}(0)=\lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}p^2G(p)B(p)e^{pt}$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\frac{e^{pt}}{p^2+1}=\lim_{p\to 0}\frac{te^{pt}\left(p^2+1\right)-2pe^{pt}}{\left(p^2+1\right)^2}=t$$

pour les deux autres pôles simples, nous avons

$$res\left\{G(p)B(p)e^{pt}\right\}(i)=\lim_{p\to i}(p-i)G(p)B(p)e^{pt}=\lim_{p\to i}\frac{e^{pt}}{p^2(p+i)}=-\frac{1}{2i}e^{it}$$

$$res\left\{G(p)B(p)e^{pt}\right\}(-i)=\lim_{p\to -i}(p+i)G(p)B(p)e^{pt}=\lim_{p\to -i}\frac{e^{pt}}{p^2(p-i)}=\frac{1}{2i}e^{-it}$$

• La solution de l'équation différentielle $f(t)$ s'écrit

$$f(t)=a(t)+\frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow}G(p)B(p)e^{pt}dp$$

$$=a(t)+\sum_{p_i\text{PSI de GB situé à l'intérieur de BJCKLAB}}res\left\{G(p)B(p)e^{pt}\right\}(p_i)$$

$$=\left(4-2\sin t-3\cos t\right)u(t)+\left(t-\frac{1}{2i}e^{it}+\frac{1}{2i}e^{-it}\right)u(t)$$

$$=(4+t-3\sin t-3\cos t)u(t)$$