

## Cours de la Semaine 2

- Le chapitre 5 commence par exposer le théorème des résidus qui est le résultat majeur de ce cours. L'application de ce théorème nécessite de savoir calculer les résidus d'une fonction en un point singulier isolé (typiquement un pôle d'une fraction rationnelle). Il est important de bien comprendre cette partie du cours. Le chapitre se poursuit alors par des exemples de calculs d'intégrales à partir du théorème des résidus. Les exercices de la semaine 2 sont très similaires à ces exemples et donc vous devez bien les comprendre. Les compléments de cours démontrent l'existence du développement de Laurent qui permet de définir le résidu d'une fonction en un point singulier isolé. On pourra évidemment passer assez vite sur ces compléments.
- Le chapitre 6 étudie la transformée en  $Z$  qui est un outil indispensable pour l'étude des signaux discrets. Pour ceux qui connaissent la transformée de Laplace que nous verrons ultérieurement, un parallèle avec la transformée en  $Z$  peut être utile. Lorsqu'on cherche une fonction à temps continu  $x(t)$  qui vérifie une équation différentielle, il est souvent utile de chercher  $X(p)$  en prenant la transformée de Laplace de cette équation, puis on applique une formule d'inversion qui donne  $x(t)$ . Dans le cas de signaux discrets (qui sont par exemple obtenus par échantillonnage de signaux à temps continu), on est souvent amené à chercher  $x(n)$  qui vérifie une équation récurrente de la forme

$$\sum_{i=0}^p a_i x(n-i) = \sum_{j=0}^q b_j y(n-j)$$

où  $y(n)$  est un signal connu. En prenant la transformée en  $Z$  de l'égalité ci-dessus, on peut déterminer la transformée en  $Z$  de  $x(n)$  notée  $X(z)$  et on peut alors calculer  $x(n)$  à l'aide d'une formule d'inversion. La transformée en  $Z$  est donc l'outil indispensable pour la résolution des équations récurrentes, comme est la transformée de Laplace pour la résolution des équations différentielles. On rappelle l'égalité classique suivante qui sera utilisée à de nombreuses reprises dans ce chapitre

$$\sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \forall x \in \mathbb{C} \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad \text{pour } |x| < 1$$

La première partie du chapitre étudie la région de convergence de la transformée en  $Z$  puis donne quelques propriétés élémentaires de cette transformée. Ces propriétés sont admises même si leur démonstration est en général très simple (en général, un changement de variables permet d'obtenir le résultat). La propriété la plus importante de la transformée en  $Z$  est qu'elle transforme un produit de convolution en un produit simple. Un tel résultat permet d'étudier les filtres pour signaux à temps discret (appelés filtres numériques). Dans la seconde partie de ce chapitre, la notion de filtre linéaire invariant dans le temps est introduite. Ces filtres sont très utilisés en traitement du signal et en automatique (cours de 2<sup>ième</sup> année à l'ENSEEIH) et donc il est important de bien comprendre cette partie du cours. En particulier, il est important de maîtriser les notions de réponse impulsionnelle, fonction de transfert et leur lien avec les équations récurrentes, ce qui termine le chapitre 6.

Pour résumer, après avoir étudié cette partie du cours, vous devez **savoir utiliser le théorème des résidus pour le calcul d'intégrales** et **savoir utiliser la transformée en  $Z$  pour étudier les filtres numériques** (définis généralement par des équations récurrentes)

**CHAPITRE 5 - THEOREME DES RESIDUS**

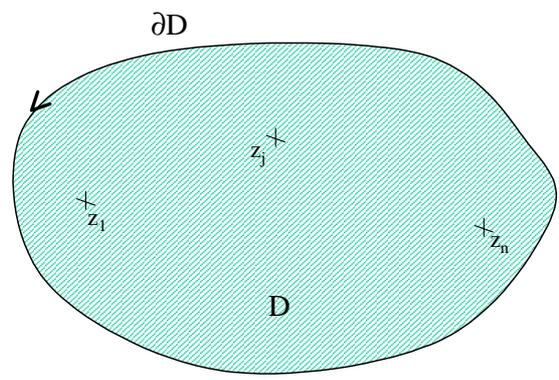
**1 - Théorème pour un domaine borné D**

**Hypothèses**

$f$  holomorphe sur  $\Omega \setminus \cup_j z_j$ ,  $\Omega$  ouvert non vide de  $\mathbb{C}$

$z_j$  points singuliers isolés de  $f$  (voir définition page suivante)

$D \subset \Omega$  domaine simplement connexe de contour  $\partial D$  inclus dans  $\Omega$



Théorème des résidus

**Conclusion**

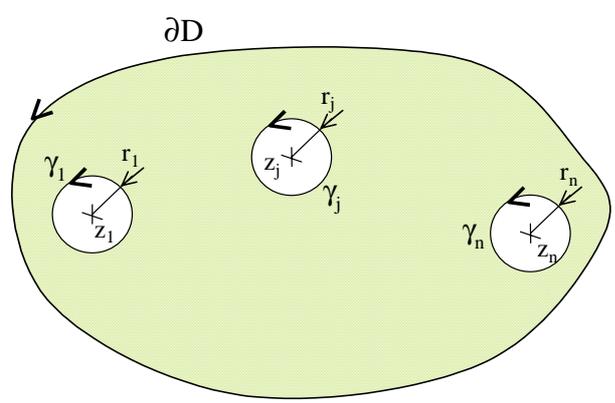
$$\int_{\partial D^+} f(z)dz = 2i\pi \sum_{z_j \in D} \text{res}f(z_j)$$

avec (définition de  $\text{res}f(z_j)$ ) :

$$\text{res}f(z_j) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(z_j, r)} f(z)dz$$

**Preuve :**

On applique le théorème de Cauchy sur le domaine grisé représenté ci-dessous,  $z_1, \dots, z_n$  étant les points singuliers isolés de  $f$  inclus dans  $D$ .



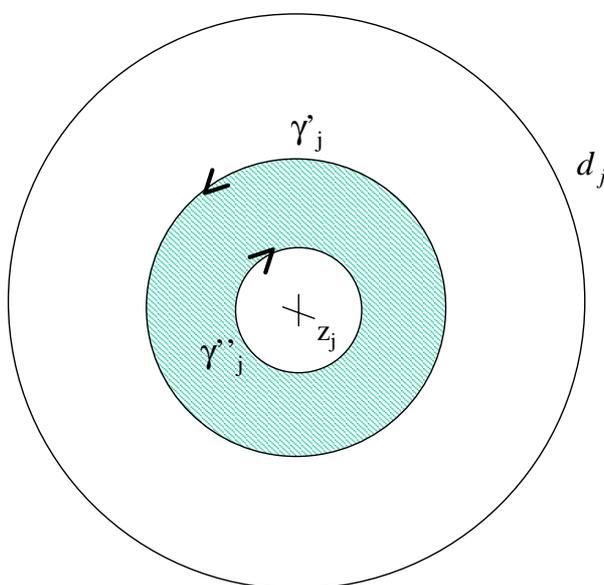
$\gamma_j$  étant le cercle de centre  $z_j$  et de rayon  $r_j$ , on obtient :

$$\int_{\partial D^+} f(z) dz + \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j^-} f(z) dz = 0$$

d'où :

$$\int_{\partial D^+} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j^+} f(z) dz \quad (E)$$

$j$  étant fixé,  $z_j$  est un point singulier isolé de  $f$ , donc il existe un disque  $d_j$  de centre  $z_j$ , de rayon  $R_j$ , inclus dans  $D$  et ne contenant pas d'autre point singulier isolé de  $f$ . Considérons à l'intérieur de  $d_j$  une couronne circulaire centrée en  $z_j$ , de frontière "extérieure"  $\gamma_j'$  et de frontière "intérieure"  $\gamma_j''$ .



$f$  est holomorphe sur cette couronne, donc (théorème de Cauchy) :

$$\int_{\gamma_j'^+} f(z) dz + \int_{\gamma_j''^-} f(z) dz = 0$$

et ainsi :

$$\int_{\gamma_j'^+} f(z) dz = \int_{\gamma_j''^+} f(z) dz$$

Ce que l'on résumera par :

$j$  étant fixé, pour  $r_j$  suffisamment petit, toutes les intégrales de  $f$  sur les cercles de centre  $z_j$  et de rayon  $r_j$  sont égales et par conséquent :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C^+(z_j, r)} f(z) dz \text{ est égale à cette valeur commune.}$$

Revenons à l'égalité (E). On choisit  $r_j$  suffisamment petit pour que

$$\int_{\gamma_j^+} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C^+(z_j, r)} f(z) dz$$

et donc :

$$\int_{\gamma_j^+} f(z) dz = (2i\pi) \operatorname{res} f(z_j)$$

On a alors :

$$\int_{\partial D^+} f(z) dz = (2i\pi) \sum_{j=1}^n \operatorname{res} f(z_j)$$

où la somme du terme de droite s'étend à tous les points singuliers isolés inclus dans  $D$  (notés  $z_1, \dots, z_n$ )

### Remarques et définition

- **Point singulier isolé (psi)**

$z_j$  est un psi de  $f(z)$  si et seulement si  $\exists r > 0$  tel que  $f$  est holomorphe sur  $d(z_j, r) \setminus \{z_j\}$ ,  $d(z_j, r)$  désignant le disque de centre  $z_j$  et de rayon  $r_j$ .

- **Calcul du résidu à l'aide du développement de Laurent**

Si  $z_j$  est un psi, on admet que  $f$  possède un développement dit développement de Laurent dans  $d(z_j, r) \setminus \{z_j\}$  :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_j)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_j)^n$$

On en déduit alors :

$$\int_{C^+(z_j, r)} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{C^+} \frac{b_n}{(z - z_j)^n} dz + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C^+} a_n (z - z_j)^n dz$$

On pose  $z - z_j = re^{i\theta}$  et on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{b_n i d\theta}{r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}} + i \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_n r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

Toutes les intégrales sont nulles (vérification facile) sauf :

$$\int_0^{2\pi} \frac{b_n i d\theta}{r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}} \quad \text{avec } n = 1$$

Donc :

$$\int_{C^+(z_j, r)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} b_1 i d\theta = 2i\pi b_1$$

**Conclusion :**  $\text{res}f(z_j)$  est le coefficient du terme en  $\frac{1}{z-z_j}$  de la partie principale du dévt de Laurent de  $f$ .

• **Calcul des résidus pour un pôle d'ordre p**

On effectue le développement de Taylor de  $\varphi(z) = (z - z_j)^p f(z)$  qui est holomorphe sur  $V(z_j)$

$$\varphi(z) = \varphi(z_j) + \dots + \frac{(z - z_j)^{p-1}}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)} + \dots$$

d'où le développement de Laurent de  $f$  :

$$f(z) = \frac{\varphi(z_j)}{(z - z_j)^p} + \dots + \frac{\varphi^{(p-1)}(z_j)}{(p-1)!(z - z_j)} + \dots$$

donc

$$\boxed{\text{res}f(z_j) = \frac{1}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(z_j) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [(z - z_j)^p f(z)] \Big|_{z=z_j}}$$

**En pratique :**

pour  $p > 2$ , on effectue le développement de Laurent,

pour  $p = 2$ , on peut utiliser  $\text{res}f(z_j) = \frac{d}{dz} (z - z_j)^2 f(z) \Big|_{z=z_j}$

pour  $p = 1$ , on a  $\text{res}f(z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j) f(z)$

**Cas particulier intéressant :**  $z_j$  pôle d'ordre 1,  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ,  $P(z_j) \neq 0$

On développe  $Q(z)$  :

$$Q(z) = 0 + (z - z_j)Q'(z_j) + \frac{(z - z_j)^2}{2!} Q''(z_j) + \dots$$

donc

$$\boxed{\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j) f(z) = \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)}}$$

Cette formule est intéressante pour certains calculs de résidus comme celui de  $f(z) = \frac{1}{\sin z}$  en  $z = 0$ . En effet :

$$\text{res}f(0) = \frac{P(0)}{Q'(0)} = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

## 2 - Applications au calcul intégral

Dans tous les cas, on choisit une fonction  $f(z)$  à laquelle on applique le théorème des résidus sur un contour fermé.

### 2.1 Intégrales du type I : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Le plus souvent, on prend  $f(z)$  et le contour est constitué d'une partie rectiligne qui donne  $I$  et de parties circulaires qui ferment le contour.

*Exemple* : montrer que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

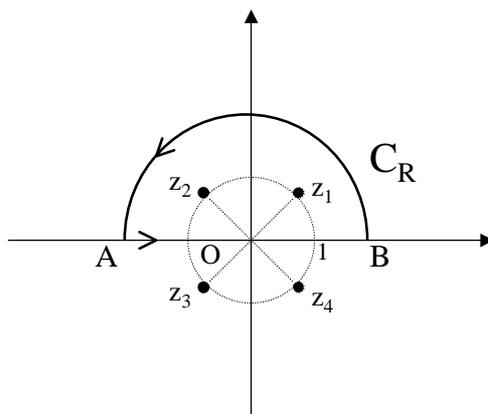
*Correction* :

La fonction  $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$  est uniforme et holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}\}$  car :

$$z^4 + 1 = (z - e^{i\frac{\pi}{4}}) (z - e^{i\frac{3\pi}{4}}) (z - e^{i\frac{5\pi}{4}}) (z - e^{i\frac{7\pi}{4}})$$

On applique alors le théorème des résidus sur le contour  $\Gamma = C_R \cup [AB]$ ,  $C_R$  étant le demi-cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  représenté ci-dessous avec :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}, z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$



Il y a deux points singuliers isolés  $z_1$  et  $z_2$  à l'intérieur du contour proposé. Ces points singuliers isolés sont des pôles d'ordre 1. Le théorème des résidus appliqué à  $f$  sur  $\Gamma$  donne :

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{x^4 + 1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = 2i\pi \left[ \text{res}f \left( e^{i\frac{\pi}{4}} \right) + \text{res}f \left( e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \right] \quad (E)$$

En posant  $P(z) = 1$  et  $Q(z) = z^4 + 1$ ,  $z_1$  et  $z_2$  étant des pôles d'ordre 1, on a :

$$\begin{aligned} \text{res}f(z_1) &= \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \\ \text{res}f(z_2) &= \frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}} \end{aligned}$$

De plus

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^4 + 1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$$

A présent on applique le premier lemme de Jordan à  $\int_{C_R} \frac{dz}{z^4 + 1}$ .

Le paramétrage de  $C_R$  par  $z = Re^{i\theta}$  avec  $\theta \in [0, \pi]$  donne :

$$\begin{aligned} \sup_{C_R} |zf(z)| &= \sup_{\theta \in [0, \pi]} \left| \frac{R e^{i\theta}}{R^4 e^{i4\theta} + 1} \right| \\ &= \sup_{\theta \in [0, \pi]} \frac{R}{|R^4 e^{i4\theta} + 1|} \end{aligned}$$

Or

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, ||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

Donc :

$$|R^4 e^{i4\theta} + 1| \geq ||R^4 e^{i4\theta}| - 1|$$

Ainsi, comme  $|e^{i4\theta}| = 1$ ,  $|R^4 e^{i4\theta}| = R^4$ , et  $R^4 - 1 > 0$  pour  $R$  "grand" (ce qui est le cas par passage à la limite),

$$|R^4 e^{i4\theta} + 1| \geq R^4 - 1, \text{ soit } \left| \frac{R e^{i\theta}}{R^4 e^{i4\theta} + 1} \right| \leq \frac{R}{R^4 - 1}$$

alors :

$$0 \leq \sup_{C_R} |zf(z)| \leq \frac{R}{R^4 - 1}$$

Mais, puisque

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R}{R^4 - 1} = 0$$

on a :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{C_R} |zf(z)| = 0$$

Ainsi, d'après le premier lemme de Jordan,

$$\boxed{\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = 0}$$

Par passage à la limite ( $R \rightarrow +\infty$ ) dans (E) on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} + 0 = 2i\pi \frac{1}{4} \left( e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{9\pi}{4}} \right) = \frac{i\pi}{2} \left[ \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

d'où le résultat final :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}}$$

## 2.2- Intégrales contenant une fonction multiforme

*Exemple* : montrer que pour  $a \in ]0, 1[$

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

*Correction* :

On pose :

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z}$$

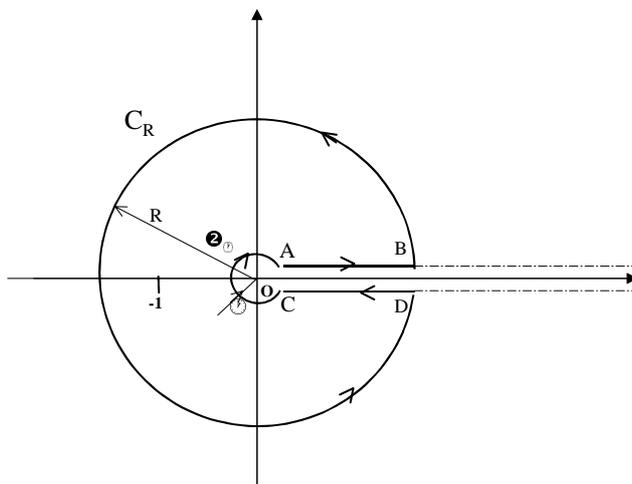
La fonction  $z^{a-1}$  est une fonction multiforme. On choisit par exemple la coupure  $Ox^+$ . Les déterminations de  $f$  sont alors définies par (en notant  $z = \rho e^{i\theta}$ ) :

$$f_k(z) = \frac{\rho^{a-1} e^{i(a-1)\theta} e^{i(a-1)2k\pi}}{1+z}$$

Prenons  $k = 0$ , alors :

$$f_0(z) = \frac{\rho^{a-1} e^{i(a-1)\theta}}{1+z}, \text{ avec } \theta \in ]0, 2\pi[$$

Appliquons le théorème des résidus à  $f$  sur le contour ci-dessous :



$f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus (Ox^+ \cup \{-1\})$ .

A l'intérieur du contour,  $f$  a une seule singularité isolée, à savoir  $z_1 = -1$ , qui est un pôle d'ordre 1. On a donc :

$$\int_{AB} f(z) dz + \int_{C_R^+} f(z) dz + \int_{DC} f(z) dz + \int_{\gamma_\epsilon^-} f(z) dz = 2i\pi \operatorname{res} f(-1) \quad (E)$$

Notons  $I_1, I_2, I_3, I_4$  les quatre intégrales du membre de gauche.

- On applique le 1<sup>er</sup> lemme de Jordan à l'intégrale  $I_2$ . Sur le cercle  $C_R$ , on a  $z = Re^{i\theta}$ , d'où

$$\sup_{C_R} |zf(z)| = \sup_{\theta \in ]0, 2\pi[} \left| \frac{R e^{i\theta} R^{a-1} e^{i(a-1)\theta}}{1 + R e^{i\theta}} \right| = \sup_{\theta \in ]0, 2\pi[} \left| \frac{R^a}{1 + R e^{i\theta}} \right|$$

Or, voir propriété algébrique des modules dans  $\mathbb{C}$  rappelée en **2.1**, on a

$$|1 + R e^{i\theta}| \geq |R - 1|$$

soit pour  $R$  "grand"

$$|1 + R e^{i\theta}| \geq R - 1 > 0$$

On en déduit :

$$0 \leq \sup_{C_R} |zf(z)| \leq \frac{R^a}{R - 1}$$

Or, puisque  $a < 1$ ,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^a}{R - 1} = 0$$

ce qui permet d'obtenir

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{C_R} |zf(z)| = 0$$

Le premier lemme de Jordan permet alors d'obtenir :

$$\boxed{\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^+} f(z) dz = 0}$$

- On applique le 1<sup>er</sup> lemme de Jordan à l'intégrale  $I_4$ . Sur le cercle  $\gamma_\varepsilon$ , on a  $z = \varepsilon e^{i\theta}$ , d'où

$$\sup_{\gamma_\varepsilon} |zf(z)| = \sup_{\theta \in ]0, 2\pi[} \left| \frac{\varepsilon e^{i\theta} \varepsilon^{a-1} e^{i(a-1)\theta}}{1 + \varepsilon e^{i\theta}} \right| = \sup_{\theta \in ]0, 2\pi[} \left| \frac{\varepsilon^a}{1 + \varepsilon e^{i\theta}} \right|$$

or pour  $\varepsilon$  "petit",

$$|1 + \varepsilon e^{i\theta}| \geq 1 - \varepsilon > 0$$

donc :

$$0 \leq \sup_{\gamma_\varepsilon} |zf(z)| \leq \frac{\varepsilon^a}{1 - \varepsilon}$$

Puisque  $a > 0$ , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^a}{1 - \varepsilon} = 0$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\gamma_\varepsilon} |zf(z)| = 0$$

Le premier lemme de Jordan permet alors d'obtenir

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon^-} f(z) dz = 0}$$

- Déterminons maintenant par passage à la limite  $R \rightarrow +\infty$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$ , les intégrales  $I_1$  et  $I_3$ .

$AB$  correspond au bord supérieur de la coupure sur lequel  $z = x + iy$  avec  $x > 0$  et  $y \rightarrow 0^+$   
Donc (abus de notation annoncé) :

$$\begin{cases} \rho = x \\ \theta = 0 \end{cases}$$

soit :

$$f(z) = \frac{x^{a-1}}{1+x} \text{ et } dz = dx$$

donc :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0} I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

$DC$  correspond au bord inférieur de la coupure sur lequel  $z = x + iy$  avec  $x > 0$  et  $y \rightarrow 0^-$ .  
Donc (abus de notation annoncé) :

$$\begin{cases} \rho = x \\ \theta = 2\pi \end{cases}$$

soit :

$$f(z) = \frac{x^{a-1} e^{i(a-1)2\pi}}{1+x} \text{ et } dz = dx$$

donc :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0} I_2 = \int_{+\infty}^0 \frac{x^{a-1} e^{i(a-1)2\pi}}{1+x} dx$$

Ainsi, par passage à la limite  $R \rightarrow +\infty$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans  $(E)$ ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx + 0 - \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1} e^{i(a-1)2\pi}}{1+x} dx + 0 = 2i\pi \operatorname{res} f(-1)$$

- Calculons  $\operatorname{res} f(-1)$  sachant que en  $z = -1$ ,  $\rho = 1$  et  $\theta = \pi$

$$\operatorname{res} f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) f(z) = 1e^{i(a-1)\pi} = e^{i\pi a} e^{-i\pi} = -e^{i\pi a}$$

Donc :

$$(1 - e^{i(a-1)2\pi}) \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = -2i\pi e^{i\pi a}$$

Soit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{2i\pi e^{i\pi a}}{e^{2i\pi a} - 1} = \frac{2i\pi}{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

Donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}}$$

### 2.3- Intégrales trigonométriques :

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

où  $R$  est une fraction rationnelle. On pose  $z = e^{i\theta}$  et on exprime  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  en fonction de  $z$ . On se ramène alors au calcul d'une intégrale sur le cercle unité.

*Exemple :* montrer que

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \sin \theta} = \frac{\pi}{2}$$

*Correction :*

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

Si  $z$  appartient au cercle unité  $C(O, 1)$ , on a  $z = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in [0, 2\pi]$  et :

$$dz = ie^{i\theta} d\theta, \text{ soit } d\theta = \frac{dz}{iz}$$

Donc :

$$\frac{d\theta}{5 + 3 \sin \theta} = \frac{dz}{iz \left[ 5 + 3 \frac{z^2 - 1}{2iz} \right]} = \frac{dz}{5iz + \frac{3}{2}z^2 - \frac{3}{2}} = \frac{2dz}{10iz + 3z^2 - 3}$$

On définit alors la fonction  $f$  par :

$$f(z) = \frac{2}{3z^2 + 10iz - 3}$$

Des calculs élémentaires permettent de factoriser le dénominateur de  $f$  comme suit :

$$3z^2 + 10iz - 3 = 3(z + 3i) \left( z + \frac{i}{3} \right)$$

Donc :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \sin \theta} = \int_{C(O,1)} \frac{2dz}{3(z + 3i) \left( z + \frac{i}{3} \right)}$$

$f$  est uniforme et holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{-3i, -\frac{i}{3}\}$ . Appliquons le théorème des résidus à  $f$  sur le cercle unité. Puisque  $f$  possède une seule singularité à l'intérieur de ce contour, à savoir  $z_1 = -\frac{i}{3}$  (qui est un pôle d'ordre 1), on a :

$$\begin{aligned} \int_{C(O,1)} \frac{2dz}{3(z + 3i) \left( z + \frac{i}{3} \right)} &= 2i\pi \operatorname{res} \left[ \frac{2}{3(z + 3i) \left( z + \frac{i}{3} \right)} \right] \Bigg|_{z = -\frac{i}{3}} \\ &= 2i\pi \lim_{z \rightarrow -\frac{i}{3}} \left[ \left( z + \frac{i}{3} \right) \frac{2}{3(z + 3i) \left( z + \frac{i}{3} \right)} \right] = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \sin \theta} = \frac{\pi}{2}}$$

## CHAPITRE 6 - TRANSFORMEE EN Z

### 1. Définition

On définit la transformée en  $Z$  d'une suite  $x(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  par :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad z \in \mathbb{C}$$

*Notation :*

$$X(z) = TZ(x(n))$$

*Vocabulaire :* la TZ est dite bilatérale car la sommation s'étend à tous les entiers  $n$ .

*Remarque :* dans le cas où  $x(n) = 0$  pour  $n < 0$ , on dit que le signal  $x(n)$  est causal et on a :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad z \in \mathbb{C}$$

### 2. Domaine de Convergence

La région de convergence est l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que la série  $X(z)$  converge.

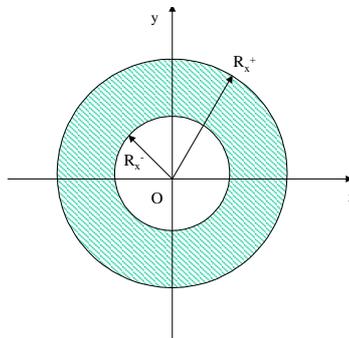
#### Rappel : critère de Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ converge}$$

On a une condition suffisante de convergence. A l'aide de ce critère, on montre que la série  $X(z)$  converge dès que :

$$0 \leq R_x^- < |z| < R_x^+ \leq +\infty \quad \text{avec } R_x^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|x(n)|} \text{ et } R_x^+ = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}}$$

*Exemple :*  $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}$  converge pour  $|z| > 1$  car  $R_x^- = 1$  et  $R_x^+ = +\infty$ .



Anneau de convergence

### 3. Propriétés

#### 3-1 Linéarité

$$TZ(ax(n) + by(n)) = aX(z) + bY(z)$$

*Domaine de convergence* : si  $R^+ = \min(R_x^+, R_y^+)$  et  $R^- = \max(R_x^-, R_y^-)$ , alors le domaine de convergence contient  $]R^-, R^+[$ .

#### 3-2 Décalage (ou translation)

$$TZ(x(n - n_0)) = z^{-n_0} X(z)$$

Même domaine de convergence que pour  $X(z)$

#### 3-3 Changement d'échelle

$$TZ(a^n x(n)) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

*Domaine de convergence* :  $|a| R_x^- < |z| < |a| R_x^+$

#### 3-4 Dérivabilité

La transformée en Z définit une série de Laurent qui est indéfiniment dérivable terme à terme dans son domaine de convergence. On en déduit :

$$TZ(nx(n)) = -z \frac{dX(z)}{dz}$$

Même domaine de convergence que pour  $X(z)$

#### 3-5 Produit de convolution

Le produit de convolution entre les suites  $x(n)$  et  $y(n)$  est défini par :

$$u(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n - k)$$

On a alors

$$TZ(x(n) * y(n)) = X(z)Y(z)$$

La région de convergence de  $U(z)$  est en général l'intersection des régions de convergence de  $X(z)$  et de  $Y(z)$ .

#### 4. TZ inverse

La transformée en Z inverse est définie par :

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} X(z) z^{n-1} dz$$

où  $C$  est un contour fermé inclus dans l'anneau de convergence et entourant l'origine.

Si on note  $f(z) = X(z)z^{n-1}$ , on a

$$x(n) = \sum_{z_k \text{ p si } \in In(C)} \text{res} f(z_k)$$

où la somme porte sur les points singuliers situés à l'intérieur du contour  $C$ .

#### Preuve

L'expression de la transformée en Z inverse découle directement du calcul de l'intégrale

$$J(n, k) = \int_{C^+} z^{n-k-1} dz$$

A l'aide du théorème des résidus, on montre :

$$J(n, k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ j2\pi & \text{si } n = k \end{cases}$$

On en déduit alors :

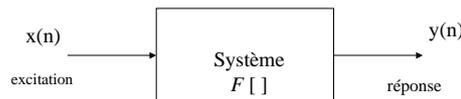
$$\begin{aligned} \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} X(z) z^{n-1} dz &= \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} \right) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{j2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) J(n, k) \\ &= x(n) \end{aligned}$$

*Remarque* : il existe des tables qui permettent d'obtenir  $x(n)$  à partir de  $X(z)$  mais dans ce cours on utilisera souvent la formule d'inversion ci-dessus pour déterminer  $x(n)$ .

#### 5. Filtrage des Signaux à temps discret

##### 5-1 Définitions

L'opération de filtrage est représentée par un modèle mathématique, opérateur noté ici  $F$ , qui transforme un signal d'entrée  $x(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (appelé parfois excitation) en un signal de sortie  $y(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Une telle opération est généralement représentée comme suit :



$$y(n) = F[x(n)]$$

On s'intéresse en pratique aux *filtres linéaires invariant dans le temps* (appelés filtres LIT) définis par la relation entrée/sortie suivante :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \quad (1)$$

En d'autres termes, la sortie d'un filtre LIT notée  $y(n)$  est le résultat d'un produit de convolution entre l'entrée de ce filtre  $x(n)$  et une fonction notée  $h(n)$ . La signification de  $h(n)$  est claire lorsqu'on cherche la sortie  $y(n)$  obtenue dans le cas où l'entrée  $x(n)$  est une impulsion

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

En effet, on a alors

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k) h(n-k) = h(n)$$

Cette relation montre que  $h(n)$  est la réponse du filtre à une impulsion. C'est pour cette raison que  $h(n)$  est appelée la **réponse impulsionnelle du filtre**.

*Remarque 1* : on vérifie que la relation (1) définit une opération **linéaire**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [ax_1(k) + bx_2(k)] h(n-k) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) h(n-k) + b \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) h(n-k)$$

c'est-à-dire

$$[ax_1(n) + bx_2(n)] * h(n) = a[x_1(n) * h(n)] + b[x_2(n) * h(n)]$$

Elle est aussi **invariante dans le temps**, ce qui signifie que lorsqu'on remplace  $x(n)$  par  $x(n-n_0)$ , on obtient  $y(n-n_0)$ . Ceci explique pourquoi on parle de filtre linéaire invariant dans le temps.

*Remarque 2* : la relation  $y(n) = nx(n)$  n'est pas invariante dans le temps. En effet, quand on remplace  $x(n)$  par  $x(n-n_0)$ , on obtient  $nx(n-n_0) \neq y(n-n_0) = (n-n_0)x(n-n_0)$ .

*Remarque 3* : la plupart du temps, on oublie la terminologie "Filtre linéaire invariant dans le temps" et on parle de "filtre linéaire" ou de "filtre".

*Remarque 4* : on montre que le produit de convolution est une opération commutative d'où

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \Leftrightarrow y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) \quad (2)$$

*Remarque importante* : à partir de cet instant, on dira que  $y(n)$  est la sortie d'un filtre (supposé linéaire invariant dans le temps) de réponse impulsionnelle  $h(n)$  dont l'entrée est  $x(n)$  si et seulement si l'une des deux relations (2) est vérifiée.

### Définition : Fonction de transfert ou transmittance

En écrivant la TZ de chaque membre de l'égalité précédente, on obtient (propriété de convolution) :

$$Y(z) = X(z)H(z) = H(z)X(z) \quad (3)$$

La fonction  $H(z)$  est appelée *fonction de transfert* du filtre, c'est la TZ de la réponse impulsionnelle  $h(n)$ .

*Remarque importante : la relation (3) est équivalente à (2). Donc, pour montrer que  $y(n)$  est la sortie d'un filtre d'entrée  $x(n)$  et de réponse impulsionnelle  $h(n)$ , il suffit de montrer (3), c'est-à-dire que  $\frac{Y(z)}{X(z)}$  est une quantité indépendante de l'entrée du filtre  $x(n)$  (il est en général plus simple de montrer (3) que (2)).*

- **Exemple 1** : Considérons le système d'entrée  $x(n)$  et de sortie  $y(n)$  régi par l'équation aux différences du premier ordre :

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

On a (voir si nécessaire, les explications en **5-4**) :

$$Y(z) - az^{-1}Y(z) = X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

donc le système proposé est un filtre LIT.

- **Exemple 2** : Considérons le système d'entrée  $x(n)$  et de sortie  $y(n)$  régi par l'équation aux différences du premier ordre :

$$y(n) = x^2(n)$$

La relation liant  $x(n)$  et  $y(n)$  n'est pas linéaire (en effet  $[x_1(n) + x_2(n)]^2 = x_1^2(n) + x_2^2(n) + 2x_1(n)x_2(n) \neq [x_1(n)]^2 + [x_2(n)]^2$ ). Similairement, on ne pourra jamais trouver  $H(z)$  tel que  $Y(z) = X(z)H(z)$ . Donc l'opération  $y(n) = x^2(n)$  ne définit pas un filtre LIT.

### Filtre causal

Un filtre est dit causal si :

$$h(n) = 0 \text{ si } n < 0$$

Dans ce cas, d'après la relation (2), on a  $y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots$  qui montre que la sortie d'un tel filtre à l'instant  $n$  ne dépend que des valeurs de l'entrée à des instants  $k \leq n$ .

### Filtre anticausal

Un filtre est dit anticausal si :

$$h(n) = 0 \text{ si } n > 0$$

Dans ce cas, d'après la relation (2), on a  $y(n) = h(0)x(n) + h(-1)x(n+1) + \dots$  qui montre que la sortie d'un tel filtre à l'instant  $n$  ne dépend que des valeurs de l'entrée à des instants  $k \geq n$ .

En pratique, on s'intéresse principalement aux filtres **LTI causaux**.

## 5-2 Fonction de Transfert et Réponse Impulsionnelle

Considérons le système d'entrée  $x(n)$  et de sortie  $y(n)$  régi par l'équation aux différences du premier ordre :

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

Sa fonction de transfert est :

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Comment déterminer la réponse impulsionnelle  $h(n)$  à partir de  $H(z)$  ?

Il faut connaître la région de convergence (RC) pour trouver  $h(n)$  à partir de  $H(z)$ . En effet, les deux séquences  $h_1(n) = a^n u(n)$  et  $h_2(n) = -a^n u(-n-1)$ , où  $u(n)$  est l'échelon de Heaviside

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ont toutes deux pour transformée en  $Z$  la fonction  $H(z)$ .

**Preuve.**

$$\begin{aligned} TZ[h_1(n)] &= TZ[a^n u(n)] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ si } |az^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |a| < |z| \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} TZ[h_2(n)] &= TZ[-a^n u(-n-1)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} -a^{-m} z^m \\ &= -\frac{1}{1 - a^{-1}z} + 1 \text{ si } |a^{-1}z| < 1 \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ si } |z| < |a| \end{aligned}$$

Cet exemple montre que suivant la région de convergence de  $H(z)$ , on peut avoir  $h(n) = h_1(n)$  ou  $h(n) = h_2(n)$ . Mais des informations comme la **causalité** donnent des indications sur la région de convergence de  $H(z)$ .

La fonction de transfert  $H(z)$  d'un système **causal**  $h(n)$  converge à l'extérieur du cercle de rayon  $R_h^-$  (car  $R_h^+ = +\infty$ ) ; or une TZ ne converge jamais à un pôle, donc tous les pôles de  $H(z)$

sont à l'intérieur du cercle de rayon  $R_h^-$ . En analysant ces remarques, on obtient le résultat fondamental suivant :

**Causalité**

$$\begin{aligned} h(n) \text{ causale} &\implies \text{RC de la forme } |z| > |a| \\ h(n) \text{ anticausale} &\implies \text{RC de la forme } |z| < |a| \end{aligned}$$

**Conclusion** : dans la plupart des applications, on s'intéresse aux filtres stables et causaux pour lequel  $a$  est à l'intérieur de  $C(0, 1)$  et la région de convergence est de la forme  $|z| > |a|$

**Généralisations :**

- dans le cas où la fonction de transfert est une fraction rationnelle, on décompose cette fraction en éléments simples et on applique le résultat ci-dessus à chaque élément de la forme  $\frac{1}{1-az^{-1}}$
- on peut aussi généraliser à des pôles multiples, ce qu'on ne fera pas dans ce cours.

**5-4 Applications aux équations récurrentes**

*Etude d'un exemple* : considérons un filtre linéaire du premier ordre défini par

$$y(n) - ay(n - 1) = x(n) \quad |a| < 1$$

On suppose que le filtre est causal et l'entrée de ce filtre est définie par :

$$x(n) = b^n u(n) \text{ avec } |b| < 1$$

où  $u(n)$  est l'échelon de Heaviside

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la sortie du filtre  $y(n)$  ainsi que sa réponse impulsionnelle  $h(n)$  telle que  $y(n) = x(n) * h(n)$

*Correction* :

on a :

$$Y(z) (1 - az^{-1}) = X(z)$$

d'où :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Puisque le filtre est causal, la région de convergence est  $|z| > |a|$  et donc, d'après ce qui précède, on a :

$$h(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

On a donc un filtre linéaire de réponse impulsionnelle causale  $h(n) = a^n u(n)$ .

La sortie du filtre  $y(n)$  est telle que

$$Y(z) = H(z) X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} X(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n z^{-n} = \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

pour :  $|bz^{-1}| < 1$ , c'est-à-dire  $|z| > |b|$

On en déduit

$$Y(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \times \frac{1}{1 - bz^{-1}} = \frac{A}{1 - az^{-1}} + \frac{B}{1 - bz^{-1}}$$

La recherche des coefficients  $A$  et  $B$  se fait classiquement comme suit :

$$A = \lim_{az^{-1} \rightarrow 1} (1 - az^{-1}) Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a}{a - b}$$

$$B = \lim_{bz^{-1} \rightarrow 1} (1 - bz^{-1}) Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{b}} = \frac{b}{b - a}$$

Donc :

$$Y(z) = \frac{a}{a - b} \left( \frac{1}{1 - az^{-1}} \right) + \frac{b}{b - a} \left( \frac{1}{1 - bz^{-1}} \right)$$

D'après ce qui précède,

$$y(n) = \frac{a}{a - b} a^n u(n) + \frac{b}{b - a} b^n u(n)$$

D'où :

$$y(n) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} u(n)$$

# Compléments

## Développement de Laurent

Le but essentiel de ce complément est de démontrer l'existence du développement de Laurent au voisinage d'un point singulier isolé.

### 1 - Intégrales de Cauchy

#### 1-1 -1ère formule de Cauchy

##### Hypothèses

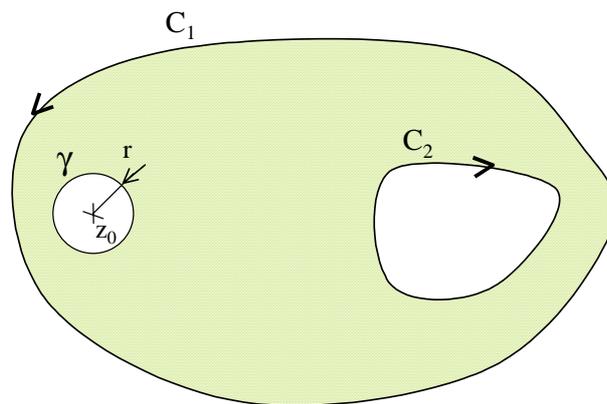
$f$  holomorphe sur  $D$  domaine  $n$  connexe,  $f$  continue sur  $\partial D^+$

##### Conclusion

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \forall z_0 \in D$$

##### Preuve

On applique le théorème de Cauchy à la fonction  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  qui est holomorphe sur  $D \setminus \gamma(z_0, r)$  (l'illustration correspond à  $D$  domaine 2 connexe et  $\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^-$ )



on a :

$$\int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{\gamma^-} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \int_{\gamma^+} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_{\gamma^+} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \end{aligned}$$

Or :

$$\int_{\gamma^+} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = 2i\pi f(z_0)$$

et, par continuité de  $f$  en  $z_0$  :

$$\left| \int_{\gamma^+} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < 2\pi\varepsilon$$

d'où la conclusion.

*On admettra les deux résultats suivants.*

### 1-2 - 2ème formule de Cauchy

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

### 1-3 - Généralisation à l'ordre $n$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

(Ces résultats s'obtiennent par dérivation formelle sous le signe  $\int$ ).

On en déduit le résultat fondamental suivant

Si  $f$  est holomorphe sur  $D$  et continue sur  $\partial D$  alors  
 $f$  est indéfiniment dérivable sur  $D$  et  
 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$

## 2 - Développement en série de TAYLOR

### 2-1 - Définition

#### Hypothèses

$f$  holomorphe sur le disque ouvert  $D(z_0, R)$ ,  $f$  continue sur  $C(z_0, R)$

#### Conclusion

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0), \forall z \in D$$

C'est le développement de TAYLOR de  $f$  au point  $z_0$

## Preuve

1ère Formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{f(u)}{u-z} du, \forall z \in D$$

avec

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{u-z_0}}$$

et

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + \dots + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

donc

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(z-z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0) + R_n(z)$$

avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(z) = 0$  car  $|a| < 1$

### 2-2 - Unicité

Si :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

Par le théorème de dérivation des séries entières, on obtient :

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)a_k (z-z_0)^{k-n}$$

d'où

$$\begin{aligned} a_0 &= f(z_0) \\ a_1 &= f'(z_0) \\ &\dots \\ n!a_n &= f^{(n)}(z_0) \end{aligned}$$

et donc les coefficients  $a_i$  sont uniques, ce qui autorise la technique de son choix pour l'obtention du développement de Taylor.

### 2-3 - Technique des développements limités

Développement de Taylor de  $f(z)$  dans  $V(z_0)$

\* on pose  $z = z_0 + u$  et étudie de  $f(z_0 + u)$  dans  $V(0)$  :

$$f(z_0 + u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \dots + a_nu^n + \dots$$

\* on en déduit :

$$f(z) = a + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$$

## 2-4 - Exemples

- $f(z) = \frac{1}{1+z}$  dans  $V(0)$  :

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p z^p$$

Rayon de convergence  $R = 1$

- $f(z) = \frac{1}{1+z}$  dans  $V(2i)$  :

$$f(z) = \frac{1}{1+2i} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(z-2i)^p}{(1+2i)^p}$$

avec  $R = |1+2i|$  etc...

## 2-5 - Développement de Taylor pour les fonctions multiformes

Problème de la **constante additive** ou **multiplicative**.

**Ex 1** :  $f(z)$  est la détermination de  $(1+z)^\alpha$ , définie dans  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, -1[$ , qui vaut  $e^{i\alpha 2\pi}$  en  $z = 0$

- Développement formel par la formule du binôme

$$(1+z)^\alpha = [1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots]$$

avec constante multiplicative de la forme  $e^{i\alpha 2k\pi}$  tel que  $f(0) = e^{i\alpha 2\pi}$  :

$$f(z) = e^{i\alpha 2\pi} [1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots]$$

- Développement de la restriction à l'axe réel :

$$f(z) = (1+z)^\alpha = \rho^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{i\alpha 2\pi} \text{ avec } \theta = 0 \text{ en } z = 0$$

en  $z = x > 0$ , on a  $\rho = 1+x$  et  $\theta = 0$  donc

$$f(z)|_{z=x} = (1+x)^\alpha e^{i\alpha 2\pi}$$

Développement de Taylor de la restriction

$$f(z) = e^{i\alpha 2\pi} (1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots)$$

On change alors  $x$  en  $z$  :

$$f(z) = e^{i\alpha 2\pi} (1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)^2}{2!} z^2 + \dots)$$

**Ex 2 :** détermination de  $f(z) = \log(1 - z)$ , définie dans  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty[$  telle que  $f(0) = 2i\pi$ .

• **Déterminations de  $f(z)$  :**

$$\begin{aligned}1 - z &= \rho e^{i(\theta + 2k\pi)} \\ f(z)_k &= \ln \rho + i\theta + i2k\pi\end{aligned}$$

En  $z = 0$ , on a  $\rho = 1$  et  $\theta = 0$ , donc

$$f(0) = i2\pi \implies k = 1$$

d'où

$$f(z) = \ln \rho + i\theta + i2\pi \text{ avec } \theta = 0 \text{ en } z = 0$$

• **Restriction à l'axe des  $x$**

En  $z = x < 1$ , on a  $\rho = 1 - x$  et  $\theta = 0$ , donc :

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(1 - x) + i2\pi \\ &= i2\pi - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots\end{aligned}$$

d'où

$$f(z) = i2\pi - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + \dots$$

**Ex 3 :** Dévt de Taylor de  $f(z) = \frac{1}{z(1+z)}$  dans  $V(\infty)$

Comme dans  $\mathbb{R}$ , on pose  $z = \frac{1}{u}$  et on fait un développement de Taylor de  $f\left(\frac{1}{u}\right)$  :

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{u}\right) &= \frac{u^2}{1+u} \\ &= u^2(1 - u + u^2 + \dots) \text{ pour } |u| < 1\end{aligned}$$

d'où le développement de  $f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots \text{ pour } |z| > 1$$

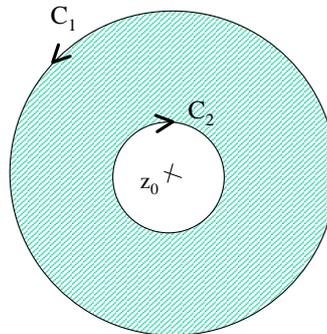
### 3 - Développement de Laurent

#### 3-1 - Définition

##### Hypothèses

$f$  holomorphe sur  $\mathcal{C}(z_0, R_1, R_2)$  couronne circulaire définie par  $R_2 < |z - z_0| < R_1$ , limitée par les 2 cercles  $C_1(z_0, R_1)$  et  $C_2(z_0, R_2)$  avec  $R_2 < R_1$ .

$f$  continue sur  $C_1 \cup C_2$



Couronne circulaire

##### Conclusion

$$\forall z \in \mathcal{C}(z_0, R_1, R_2) \quad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

avec

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{|u-z_0|=r} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{k+1}} du$$

où  $r$  nombre quelconque tel que :  $R_2 < r < R_1$ .

##### Construction

$\forall z \in \mathcal{C}$ , l'intégrale de Cauchy donne :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1^+ \cup C_2^-} \frac{f(u)}{u-z} du \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1^+} \frac{f(u)}{u-z} du + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_2^+} \frac{f(u)}{z-u} du \end{aligned}$$

**Intégrale 1** (comme pour Taylor)

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \\ \text{avec } a_k &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1^+} \frac{f(u) du}{(u - z_0)^{k+1}} \end{aligned}$$

## Intégrale 2

On développe

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-u} &= \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{u-z_0}{z-z_0}} \\ &= \frac{1}{z-z_0} \left[ 1 + \frac{u-z_0}{z-z_0} + \dots + \frac{(u-z_0)^n}{(z-z_0)^n} + \dots \right]\end{aligned}$$

Par un traitement analogue

$$u \in C_2 \implies \left| \frac{u-z_0}{z-z_0} \right| < 1$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z-z_0)^k} \\ \text{avec } b_k &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_2^+} f(u)(u-z_0)^{k-1} du\end{aligned}$$

d'où le développement de Laurent dans  $\mathcal{C}(z_0, R_1, R_2)$  :

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z-z_0)^k}}_{\text{partie principale}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}_{\text{partie entière}}$$

**Remarque :** on peut écrire

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (z-z_0)^k \text{ avec } \alpha_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{f(u) du}{(u-z_0)^{k+1}}$$

avec  $\alpha_k = a_k$  pour  $k \geq 0$  et  $\alpha_k = b_{-k}$  pour  $k < 0$

$C$  étant un cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $R \in ]R_1, R_2[$

### 3-2 - Unicité

- Découle de la convergence normale des 2 séries.
- Permet l'obtention du développement par le procédé le plus pratique.

### 3-3 - Développement de Laurent au voisinage d'un psi

#### a) Définition :

$z_0$  est un psi de  $f(z)$  si et ssi  $\exists r > 0$  tel que  $f$  est holomorphe sur  $d(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

#### Remarque

$\forall \varepsilon \in ]0, r[, f$  admet un développement de Laurent dans  $\mathcal{C}(z_0, \varepsilon, r)$ .

#### b) Différentes sortes de p.s.i.

Développement de Laurent de  $f(z)$  dans  $\mathcal{C}(z_0, \varepsilon, r)$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

- $z_0$  **point ordinaire** si  $b_n = 0, \forall n$  i.e.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Développement de Laurent = Développement de Taylor

- $z_0$  **pôle d'ordre  $p$**  si  $b_n = 0, \forall n > p$  et  $b_p \neq 0$  i.e.

$$f(z) = \frac{b_p}{(z - z_0)^p} + \dots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

On fait alors un développement de Taylor de  $\varphi(z) = (z - z_0)^p f(z)$  qui est holomorphe sur  $d(z_0, r)$  :

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= (z - z_0)^p f(z) \\ &= b_p + b_{p-1}(z - z_0) + \dots + a_0(z - z_0)^p + \dots \end{aligned}$$

On obtient :

$$\varphi(z) = \varphi(z_0) + (z - z_0)\varphi'(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^{p-1}}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(z_0) + \dots$$

On en déduit :

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^p} = \frac{\varphi(z_0)}{(z - z_0)^p} + \dots + \frac{1}{(p-1)!} \frac{\varphi^{(p-1)}(z_0)}{(z - z_0)} + \dots$$

*Exemple :*  $f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}$  dans un voisinage de  $z_0 = -1$ .

**Rq : un point de ramification n'est pas un pôle**

- $z_0$  **point singulier essentiel** si  $\forall n_0, \exists n > n_0$  tel que  $b_n \neq 0$

La partie principale du développement de Laurent possède une infinité de termes

*Exemple* :  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

On pose  $u = \frac{1}{z}$  et on développe  $f\left(\frac{1}{u}\right) = e^u$  dans  $d(0, r), \forall r$  :

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \dots$$

On en déduit

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$$

dans  $d(\varepsilon, r'), \forall r'$  donc dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Le point  $z_0 = 0$  est un point singulier essentiel de  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$