**Cours de la Semaine 1 (Contenu, objectifs, savoir-faire exigibles)**

- Le chapitre 1 est très court est important : il introduit les notions de module, argument et de fonction de la variable complexe. Les définitions de limite et de continuité d'une fonction de la variable complexe y sont présentées même si elles seront peu utiles dans la suite du cours. La notion d'infini complexe est peu importante pour la suite du cours.

- Le chapitre 2 définit tout d'abord des fonctions classiques de la variable complexe. Ensuite, le chapitre 2 étudie le concept de fonction multiforme qui sera très important dans la suite du cours. La partie 3 du chapitre est très détaillée (ce qui explique sa longueur) et doit être étudiée avec beaucoup d'attention : il faut bien comprendre comment on doit définir les fonctions argument, puissance et logarithme.

- Le chapitre 3 s'intéresse à la dérivation des fonctions de la variable complexe (holomorphie). En pratique, les fonctions de la variable complexe seront dérivables sur leur ensemble de définition et donc on utilisera très peu les résultats de ce chapitre. On peut donc passer très rapidement.

- Le chapitre 4 étudie l'intégration des fonctions de la variable complexe. Même si on est obligé pour définir l'intégrale d'une fonction de la variable complexe de donner quelques éléments sur les chemins, intégrales curvilignes, en pratique on calcule l'intégrale en paramétrant correctement le chemin sur lequel on se déplace (voir avec détail la partie Calcul Pratique : arc paramétré et ne pas passer trop de temps sur le début du chapitre 4). Comme vous le verrez plus tard, les lemmes de Jordan sont très utiles (les démonstrations sont données à titre d'information mais ne seront pas utiles pour le reste du cours). Il est intéressant de noter que l'application des lemmes de Jordan nécessite dans la plupart des cas d'utiliser l'une des deux inégalités classiques suivantes : $|a+b| \leq |a| + |b|$ ou/et $|a-b| \geq |\,|a| - |b|\,|$ valables pour tous nombres complexes $a$ et $b$. La définition des domaines connexes, simplement connexes, ... est nécessaire car le théorème de Cauchy repose sur de telles hypothèses. Cependant, en pratique, tous les domaines considérés permettront d'appliquer le théorème de Cauchy (et on ne vérifiera donc jamais la connexité des domaines sur lesquels on travaille). Enfin, le chapitre se termine par le théorème de Cauchy qu'il faudra savoir appliquer.

Pour résumer, le cours relatif à cette semaine parait très long mais, pour les exercices, il suffit de maitriser la notion de **fonction multiforme**, **les lemmes de Jordan** et le **théorème de Cauchy.**

## CHAPITRE 1 - GENERALITES

### 1. Introduction

### 1-1 Le Plan Complexe

Le plan complexe est le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; u, v)$. La correspondance

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \\ (x,y) \to z = x + iy \end{cases}$$

est une bijection. On confond le point $M(x,y)$ et son affixe $z = x + iy$.

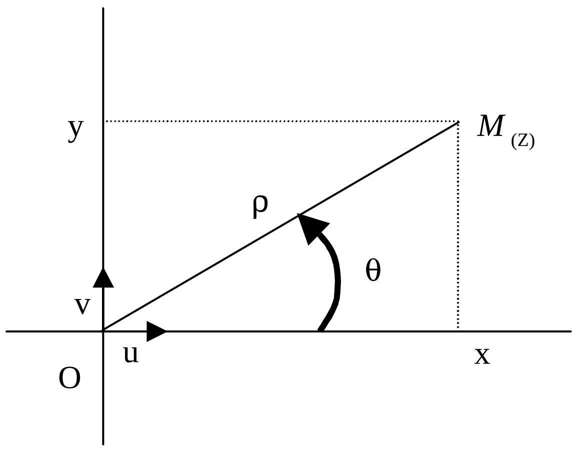



Figure 1 : Représentation du plan complexe.

Si $z \neq 0$, la représentation du nombre complexe $z$ sous la forme module/argument s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho = |z| = OM$ est le module de $z$ et $\theta = \arg z$ est une mesure en radians de l'angle $\left(u, \overrightarrow{OM}\right)$ définie modulo $2\pi$ c'est-à-dire à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.

### 1-2 Fonction complexe de la variable $z$

A toute fonction $f$ de la variable complexe :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z = x + iy \to f(z) = A(x,y) + iB(x,y) \end{cases}$$

on associe une fonction $F$ :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \to F(x,y) = (A(x,y), B(x,y)) \end{cases}$$

## 2. Limite-Continuité

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|z\| = |z|$.
Soit $f$ une fonction de la variable complexe et $z_0 = x_0 + iy_0$, $l$ deux nombres complexes.

### 2-1 Limite

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \text{ ou } \underset{z \to z_0}{f(z) \longrightarrow l}$$

signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad |z - z_0| < \eta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$

### 2-2 Continuité

$$\begin{aligned} f \text{ continue en } z_0 &\Longleftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \\ &\Longleftrightarrow A(x,y) \text{ et } B(x,y) \text{ continues en } (x_0, y_0) \end{aligned}$$

On admettra sans démonstration que les propriétés des opérations sur les limites dans $\mathbb{C}$ et sur les fonctions continues d'une variable complexe sont identiques aux opérations sur les limites dans $\mathbb{R}$ et sur les fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

### 2-3 L'infini complexe

L'infini complexe noté $\infty$ est l'unique nombre complexe satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \infty \times \infty &= \infty, |\infty| = \infty \\ \infty / a &= \infty, a/\infty = 0, a \times \infty = \infty \qquad \forall a \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

# CHAPITRE 2 - FONCTIONS USUELLES

## 1. Fonctions algébriques

| Fonctions | Définition | Continuité |
|---|---|---|
| $z \longmapsto z+a$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{C}$ |
| $z \longmapsto a\ z$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{C}$ |
| $z \longmapsto \frac{1}{z}$ | $\mathbb{C}^*$ | $\mathbb{C}^*$ |
| $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ | $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ | $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ |

## 2. Fonctions définies par des séries entières

### 2-1 - Fonction exponentielle

**Définition**

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

**Propriétés**

$$\begin{aligned} e^z\big|_{z=x} &= e^x,\ e^{-z} = \frac{1}{e^z} \\ e^{x+iy} &= e^x\left(\cos y + i \sin y\right),\ e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \end{aligned}$$

On retrouve les mêmes relations fonctionnelles que dans $\mathbb{R}$.

### 2-2 Fonctions hyperboliques

$$ch\ z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, sh\ z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, thz = \frac{shz}{chz}$$

### 2-3 Fonctions trigonométriques

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

### 2-4 Formules de passage

$$\left\{ \begin{array}{c} \cos(iz) = ch\ z \\ \sin(iz) = i\ sh\ z \\ \tan(iz) = i\ th\ z \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} ch(iz) = \cos z \\ sh(iz) = i \sin z \\ th(iz) = i\ \tan z \end{array} \right.$$

## 2-5 Propriétés

| Fonctions | Ensemble de définition | Ensemble de Continuité |
|---|---|---|
| exp | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{C}$ |
| $ch$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{C}$ |
| $sh$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{C}$ |
| $th$ | $\mathbb{C}\setminus\left\{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}\right\}$ | $\mathbb{C}\setminus\left\{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}\right\}$ |
| cos | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{C}$ |
| sin | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{C}$ |
| tan | $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ | $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ |

## 3. Fonctions multiformes

### 3-1 Remarque et définition

A tout $z$ de $\mathbb{C}$ correspond une seule valeur de $e^z$. Par contre à tout $z$ de $\mathbb{C}^*$, correspond une infinité de valeurs de $\arg z$. Pour distinguer ces deux situations, on définit des fonctions dites **uniformes** ou **multiformes** comme suit :

**Définitions**

- Une fonction $f$ est appelée **uniforme** si à chaque valeur de $z$ ne correspond qu'une seule valeur de $f(z)$.
- Une fonction $f$ est appelée **multiforme** si à chaque valeur de $z$ correspondent plusieurs valeurs de $f(z)$.

**Exemples**

- La correspondance "argument d'un nombre complexe" :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \arg z \end{array}$$

  est une fonction multiforme.

- Par contre, les fonctions étudiées aux paragraphes **1** et **2** sont des fonctions uniformes.

**Remarque :** *Pour étudier les fonctions multiformes, on les "rendra uniformes" par la définition de leurs déterminations de rang k (procédé détaillé dans le complément de cours* 1) *et dont les résultats à connaître sont donnés ci-dessous).*

## 3-2 Fonction Argument

La détermination de **rang k** de l'argument est l'application de $\mathbb{C}\backslash Ox^+$ dans $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, qui associe à tout nombre complexe $z = |z|\, e^{i\theta}$ la valeur de $\theta \in ]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}\backslash Ox^+ & \longrightarrow & ]2k\pi, 2(k+1)\pi[ \\ z & \longmapsto & \theta = \arg_k z \end{array}$$

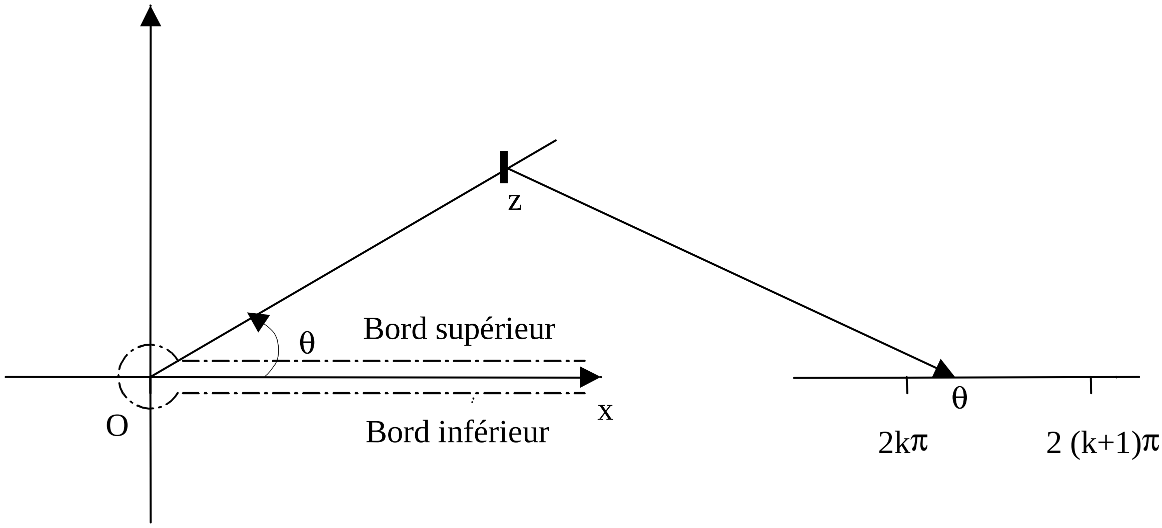



Figure 1 : Définition de $\arg_k z$.

Avec la définition précédente, on choisit de ne pas définir l'argument sur $Ox^+ = \{z = x, x \geq 0\}$ de sorte que la fonction ainsi définie soit continue sur son domaine de définition. On dit alors que le demi-axe $Ox^+$ est la **coupure** et le point $O$ origine de la coupure est appelé **point de branchement** ou **point de ramification.** Pour $k = 0$, la définition précédente de l'argument est appelée **détermination principale** de l'argument.

*Remarque 1* : Concernant la détermination principale de l'argument, lorsqu'on se place sur le bord supérieur de la coupure $Ox^+$, la valeur de l'argument est $\theta = \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est un nombre arbitrairement "petit". La notation $\theta = 0$ signifiera par convention qu'on fait un passage à la limite $\varepsilon \to 0$. De même sur le bord inférieur de la coupure, on notera (passage à la limite) $\theta = 2\pi$. Cet abus de notation, " = " pour un "passage à la limite" sera systématiquement utilisé, dans la suite du cours, pour l'expression des valeurs des déterminations des fonctions multiformes sur les bords de la coupure.

*Remarque 2* : Autre définition de **la détermination de rang k** de l'argument :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}\backslash D_\alpha & \longrightarrow & ]\alpha + 2k\pi, \alpha + 2(k+1)\pi[ \\ z & \longmapsto & \theta = \arg_{k,\alpha} z \end{array}$$

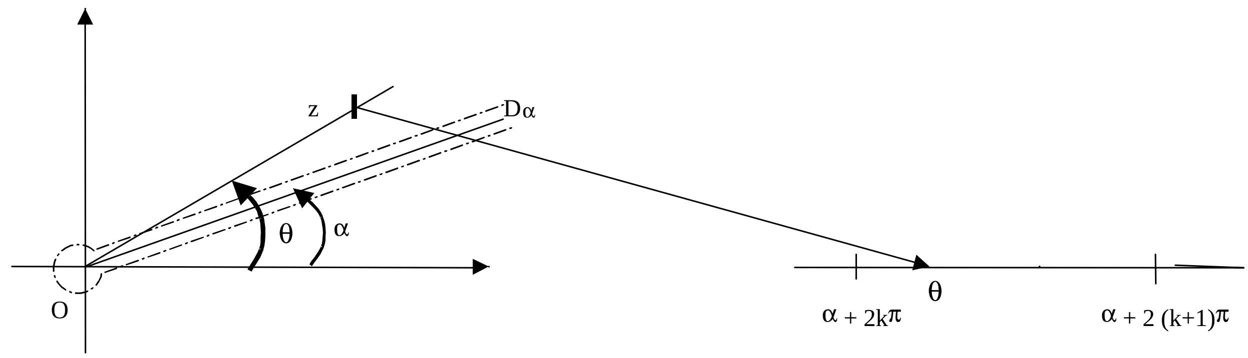



Figure 2 : Définition de $\arg_{k,\alpha}(z)$.

- Avec cette définition, la demi-droite $D_\alpha$ d'origine $O$ et d'angle $\alpha$ est la **coupure**.
- Le point $O$ origine de la coupure est appelé **point de branchement** ou **point de ramification.**

## 3-3 Fonction Puissance $z^{\frac{1}{n}}$

A partir de la représentation habituelle des nombres complexes $z = |z|\ e^{i\arg z}$, on peut définir la **détermination de rang k** de $z^{\frac{1}{n}}$ comme suit :

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbb{C}\setminus Ox^{+} \longrightarrow S_k \\ z \rightarrow z_{(k)}^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}}\ \ e^{i\frac{1}{n}\arg_k(z)} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \end{array}\right. \qquad \theta \in \left]0, 2\pi\right[$$

Cette correspondance est une bijection de $\mathbb{C}\setminus Ox^{+}$ dans le secteur ouvert $S_k$ délimité par les deux droites $D_{\frac{2k\pi}{n}}$ et $D_{\frac{2(k+1)\pi}{n}}$ issues de O et faisant respectivement avec $Ox^{+}$ les angles $\frac{2k\pi}{n}$ et $\frac{2(k+1)\pi}{n}$. Cette définition est illustrée sur la figure suivante :

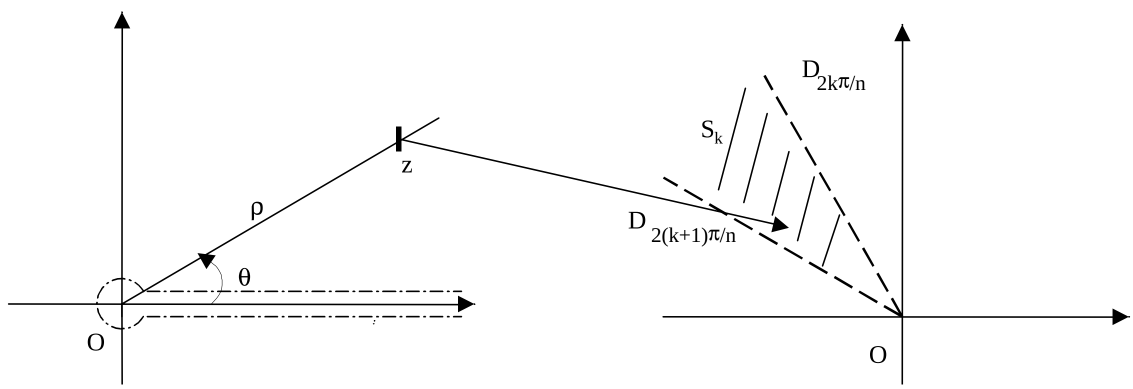



Figure 1 : Définition de $z^{\frac{1}{n}}$.

Cette fonction est la bijection réciproque de la restriction de la fonction puissance $n$ définie sur $S_k$ et à valeurs dans $\mathbb{C}\setminus Ox^{+}$.

**Extensions**

- **Définition de** $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ , $a \in \mathbb{C}$

*(Aucune difficulté) Voir compléments*

- **Définition de** $(z-a)^{\beta}$ , $a \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$

La **détermination de rang k** de $(z-a)^{\beta}$est définie
comme suit :

$$\begin{cases} \mathbb{C} \setminus D_\alpha \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto (z-a)^{\beta}_{(k)} = \rho^{\beta} e^{i\beta\theta} e^{i\beta 2k\pi} \end{cases}$$

illustrée par :

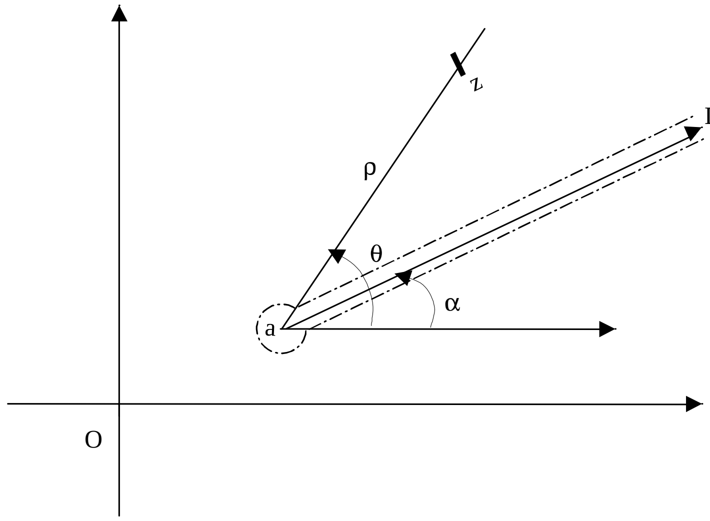



Figure 4 : Illustration de $(z-a)^{\beta}_{(k)}$

Les déterminations diffèrent d'une constante multiplicative $e^{2i\beta k\pi}, k \in \mathbb{Z}$.

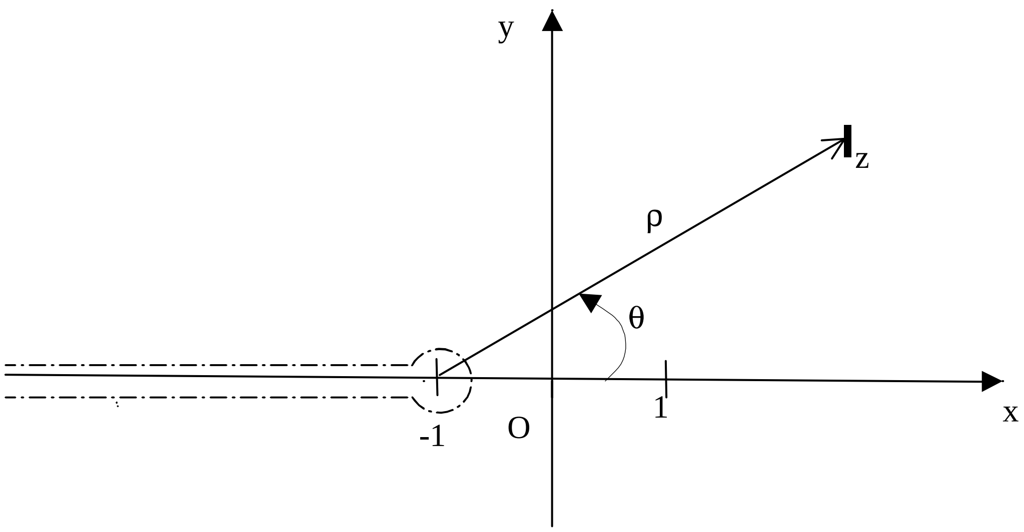
**Remarque**

Pour définir la fonction $(z-a)^{n}$ , $n \in\mathbb{Z}$, il n'est pas utile de définir des déterminations car pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $z - a = \rho \exp\{i(\theta + 2k\pi)\}$, on a la même valeur de $(z-a)^{n}$**. Il est important de se souvenir que les déterminations de** $(z-a)^{\beta}$ **ne doivent être définies que pour** $\beta \notin \mathbb{Z}$.

**Comment définir une détermination ?**

**Exemple :** Dans $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, -1]$, définir la détermination de $f(z) = (z+1)^{\frac{1}{2}}$ qui vaut $\sqrt{2}$ au point $z = 1$.

- a) On pose $z+1 = \rho \exp\{i(\theta + 2k\pi)\}$. On fait une figure sur laquelle on représente la coupure, le point de branchement, le module et l'argument de $(z+1)$.




- b) On définit la forme générale des déterminations

$$f_k(z) = \rho^{\frac{1}{2}} \exp\left(i\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right)$$

- c) On choisit la **valeur initiale** de l'argument en un point particulier $z$, ce qui permet de déterminer la valeur de $k$. Par exemple, si on se fixe $\arg(z+1) = 0$ et $\rho = 2$ au point $z = 1$, on obtient :

$$\sqrt{2} = \sqrt{2} e^{i\frac{0+2k\pi}{2}} \Longrightarrow k \text{ pair}$$

On choisit par commodité : $k = 0$.

- d) On donne l'expression de la détermination correspondant à la valeur choisie de $k$ :

$$\boxed{f(z) = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ avec } \theta = 0 \text{ en } z = 1}$$

Et pour tout $z$ de $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, -1]$, on a alors $\theta \in ]-\pi, \pi[$.
*Si on avait choisi* $k = 2k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}^*$, *l'expression de la détermination correspondant à la valeur de k aurait été la même car :*

$$\rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta + 4k'\pi}{2}} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i2k'\pi} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ car } e^{i2k'\pi} = 1$$

- **Remarque :**

La précision de la valeur initiale de $\theta$ est fondamentale car elle entraîne celle de $k$.
En c), si on avait choisi $\theta = 2\pi$ en $z = 1$, on aurait eu :

$$\sqrt{2} = \sqrt{2}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2}} \Longrightarrow k \text{ impair},$$

Par commodité, on choisit $k = -1$, et par suite

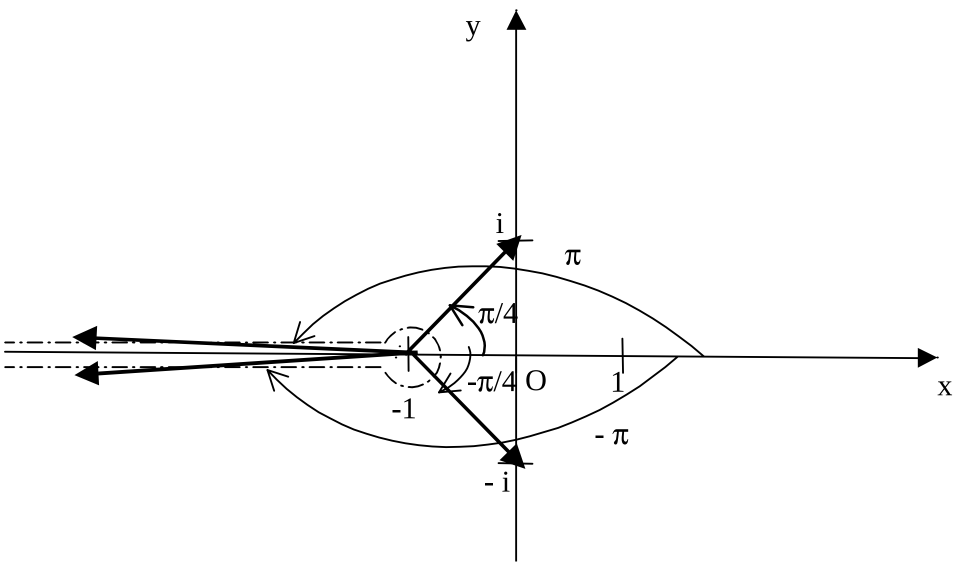
$$\boxed{f(z) = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\pi} \quad \text{avec} \quad \theta = 2\pi \quad \text{en} \quad z = 1}$$

qui bien sûr définit la même fonction (si perplexité, se reporter à l'exercice ci-dessous) mais pour tout $z$ de $\mathbb{C} \setminus \left]-\infty, -1\right]$, on a $\theta \in \left]\pi, 3\pi\right[$.

**Comment exploiter une détermination ?**

Reprenons la fonction de l'exemple.
a) Déterminer $f\,(i)$ puis $f\,(-i)$
Travaillons d'abord avec l'expression :

$$\boxed{f(z) = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{avec} \quad \theta = 0 \quad \text{en} \quad z = 1}$$




On a $z + 1 = i + 1$, et donc comme $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$,

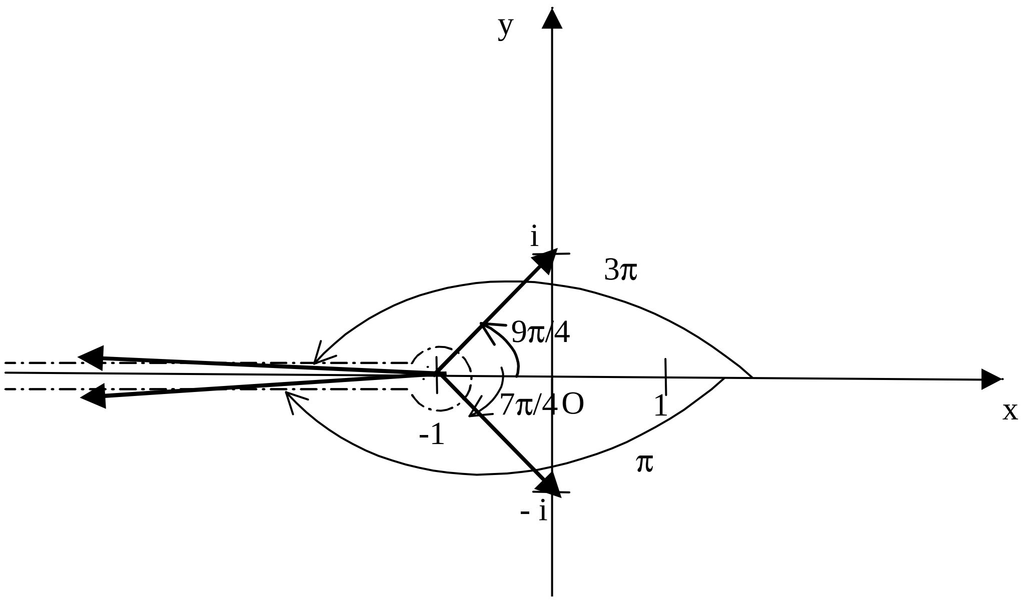
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

d'où finalement

$$f\,(i) = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$$

Comparons avec le résultat trouvé à partir de l'expression :

$$\boxed{f(z) = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\pi} \quad \text{avec} \quad \theta = 2\pi \quad \text{en} \quad z = 1}$$




Ici, puisque $\theta \in ]\pi, 3\pi[$,

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{9\pi}{4} \end{cases}$$

donc

$$f(i) = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{9\pi}{8}} e^{-i\pi} = \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{9\pi}{8} - i\pi\right)} = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$$

et on obtient la même valeur !!

De la même façon, on obtient

$$f(-i) = \sqrt[4]{2} e^{-i\frac{\pi}{8}}$$

avec, en utilisant la première expression,

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

b) Déterminer les valeurs de cette détermination sur les bords de la coupure

- Bord supérieur :

Cela correspond à $z = x + iy$ avec $x < -1$ et $y \to 0^+$.
On travaillera là encore sur les deux expressions, pour s'assurer d'une bonne compréhension.
Pour la première, avec l'abus de notation annoncé on a :

$$\begin{cases} \rho = |x + 1| = -(1 + x) \\ \theta = \pi \end{cases}$$

Donc :

$$f\left(z\right)=\sqrt{-\left(1+x\right)}e^{i\frac{\pi}{2}}=i\sqrt{-\left(1+x\right)}$$

Pour la deuxième, on a :

$$\begin{cases}\rho=\left|x+1\right|=-\left(1+x\right)\\ \theta=3\pi\end{cases}$$

Donc :

$$f\left(z\right)=\sqrt{-\left(1+x\right)}e^{i\frac{3\pi}{2}}e^{-i\pi}=i\sqrt{-\left(1+x\right)}$$

- Bord inférieur :

Celà correspond à $z=x+iy$ avec $x<-1$ et $y\to0^-$.
On travaille avec la détermination :

$$\boxed{f(z)=\rho^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}\quad\text{avec}\quad\theta=0\quad\text{en}\quad z=1}$$

alors :

$$\begin{cases}\rho=\left|x+1\right|=-\left(1+x\right)\\ \theta=-\pi\end{cases}$$

Donc :

$$f\left(z\right)=\sqrt{-\left(1+x\right)}e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i\sqrt{-\left(1+x\right)}$$

**Extension à 2 points de branchement $a$ et $b$**

$$f(z)=\left[\left(z-a\right)^p\left(z-b\right)^q\right]^{\frac{1}{n}}$$

On pose

$$\begin{aligned}z-a&=\rho e^{i(\theta+2k\pi)}\\ z-b&=\rho' e^{i(\theta'+2k'\pi)}\end{aligned}$$

et les déterminations de $f(z)$ sont définies par :

$$\boxed{f_k(z)=\rho^{\frac{p}{n}}\rho'^{\frac{q}{n}}e^{i\frac{p\theta+q\theta'}{n}}e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$$

En général la coupure est $D_a\cup D_b$.

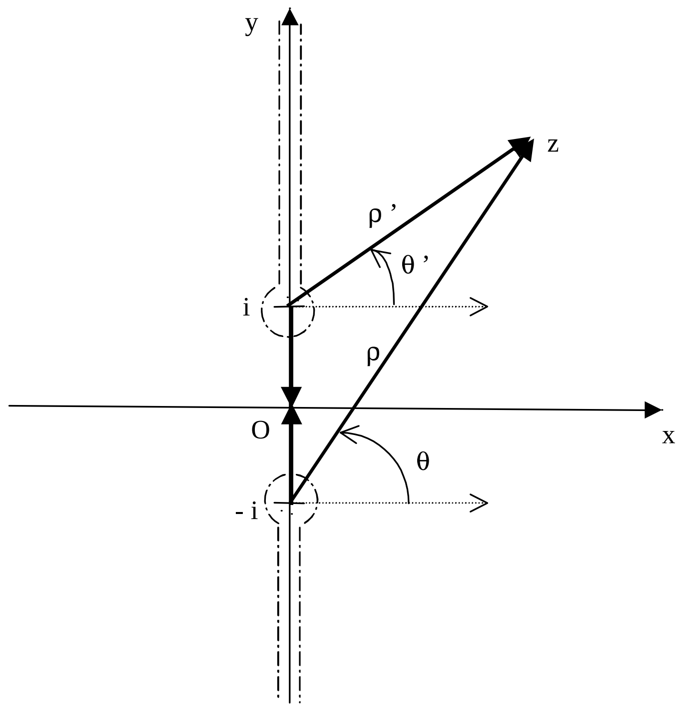
**Exemple**
Dans $\mathbb{C}\setminus\left]-i\infty,-i\right]\cup\left[i,i\infty\right[$, définir la détermination de $(z^2+1)^{\frac{1}{2}}$ qui vaut $-1$ au point $z=0$. On a

$$f\left(z\right)=\left(z^2+1\right)^{\frac{1}{2}}=\left(z+i\right)^{\frac{1}{2}}\left(z-i\right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc on a deux points de ramification $i$ et $-i$, et ainsi des déterminations continues dans le plan complexe privé de deux demi-droites issues de ces points de ramification, par exemple c'est le cas dans $\mathbb{C} \setminus ]-i\infty, -i] \cup [i, i\infty[$. Pour définir $(z+i)^{\frac{1}{2}}$ on utilise donc la coupure $]-i\infty, -i]$ et pour définir $(z-i)^{\frac{1}{2}}$, on utilise la coupure $[i, i\infty[$. On pose

$$\begin{aligned} z+i &= \rho e^{i(\theta+2k\pi)} \\ z-i &= \rho' e^{i(\theta'+2k'\pi)} \end{aligned}$$

comme illustré ci-dessous :




La forme générale des déterminations est alors :

$$f_{k,k'}(z) = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)} \rho'^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\theta'+2k'\pi}{2}\right)}$$

soit

$$f_{k,k'}(z) = \rho^{\frac{1}{2}} \rho'^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)} e^{i(k+k')\pi}$$

En posant $k+k'=K$, la forme générale des déterminations s'écrit alors :

$$f_K(z) = \rho^{\frac{1}{2}} \rho'^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)} e^{iK\pi}$$

On se fixe au point $z=0$ :

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \rho = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta' = -\frac{\pi}{2} \\ \rho' = 1 \end{cases}$$

on obtient :

$$-1 = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{2}\right)} e^{iK\pi} \Longrightarrow K = 1$$

La détermination cherchée est alors :

$$f(z) = \rho^{\frac{1}{2}} \rho'^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)} e^{i\pi} \text{ avec } \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \theta' = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ en } z = 0$$

Et ici pour tout $z$ de $\mathbb{C} \setminus \left]-i\infty, -i\right] \cup \left[i, i\infty\right[$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ et $\theta' \in \left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

### 3-4 Fonction Logarithme $\log_k z$

A partir de la représentation habituelle d'un nombre complexe $z = |z|\, e^{i \arg z}$, on peut définir les déterminations de rang $k$ du logarithme :

**Définition 1** : *On appelle détermination de rang $k$ de $\log z$ la fonction définie à partir de la détermination de rang $k$ de l'argument de $z$ par : $log_k(z) = \ln|z| + i \arg_k(z)$.* Ainsi, en posant

$|z| = \rho$ et $\arg_k z = \theta + 2k\pi$ avec $\theta \in \left]0, 2\pi\right[$

$$\log_k : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus Ox^+ \to B_k \\ z \to \ln\rho + i\theta + i2k\pi \end{cases}$$

$B_k$ étant la bande ouverte définie par : $\{z \;/\; \operatorname{Im} z \in \left]2k\pi, 2(k+1)\pi\right[\}$. Cette définition est illustrée sur la figure suivante :

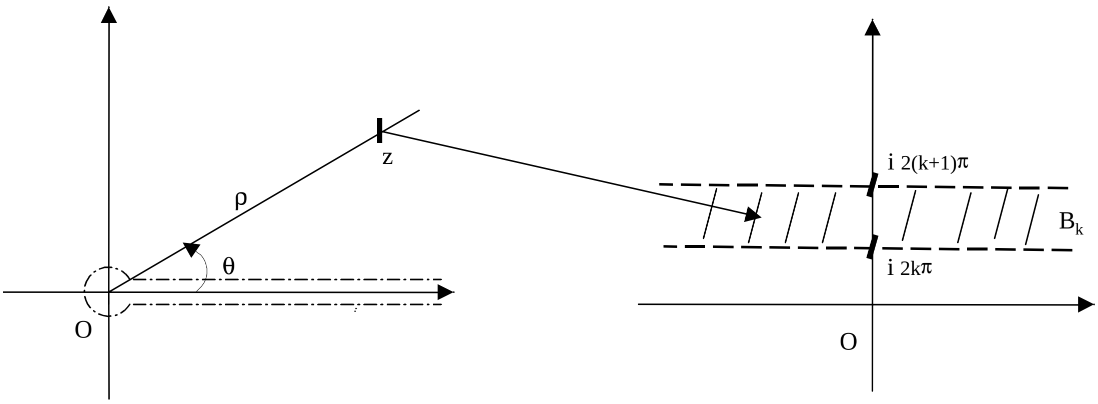



Figure 1 : Définition de $log_k(z)$.

Cette fonction est la bijection réciproque de la restriction de la fonction exponentielle définie sur $B_k$ et à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus Ox^+$.

## Application à $z^A$ , $A \in \mathbb{C}$

**Définition 2** : *On définit une détermination de rang $k$ de $z^A$ par $z_k^A = e^{A \log_k(z)}$*

## CHAPITRE 3 - FONCTIONS HOLOMORPHES

### 1. Fonctions différentiables de deux variables

Une fonction $P(x,y)$ est différentiable au point $(x_0,y_0)$ lorsqu'elle est définie dans un ouvert contenant ce point et que :

$$\Delta P = A(x_0,y_0)\,h + B(x_0,y_0)\,k + \|(h,k)\|\,\varepsilon(h,k)$$

avec

$$\Delta P = P(x_0+h, y_0+k) - P(x_0,y_0)$$

et

$$\lim_{\|(h,k)\|\to 0} \varepsilon(h,k) = 0$$

### 2. Dérivation d'une fonction de la variable complexe

#### 2-1 - Définition

$f(z)$ dérivable en $z_0$ si et seulement si

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \quad \text{existe}$$

On note :

$$f\,'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

**Exemple 1 :**
$f(z) = z$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{z-z_0} = 1, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } z_0.$$

**Exemple 2 :**
$f(z) = z^2$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^2-z_0^2}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} (z+z_0) = 2z_0, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } z_0.$$

**Exemple 3 :**
$g(z) = \overline{z}$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0} &= \frac{(x-x_0)-i(y-y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)} \\ &= \frac{1-i\frac{y-y_0}{x-x_0}}{1+i\frac{y-y_0}{x-x_0}} = \frac{1-im}{1+im} \end{aligned}$$

qui dépend de la pente $m$ du chemin donc :

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0} \text{ n'existe pas, donc } f \text{ n'est pas dérivable en } z_0.$$

## 2-2 C.N.S. de dérivabilité en $z_0 = x_0 + iy_0$

Une fonction de la variable complexe $f$ est dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si :

- $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont différentiables au point $(x_0, y_0)$ et
- les conditions de Cauchy sont vérifiées :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$$

*Preuve* : voir compléments de cours

**Remarque :**
La démonstration de la C.N.S. de dérivabilité permet d'obtenir

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) \\ f'(z_0) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

On peut utiliser ces relations pour définir la dérivée d'une fonction de la variable complexe. Par exemple, pour $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) &= 2x_0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) &= 2iy_0 \end{aligned}$$

et donc

$$f'(z_0) = 2x_0 + 2iy_0 = 2z_0$$

# 3. Fonctions holomorphes sur un ouvert A

## 3-1 Définition

On appelle fonction holomorphe sur un ouvert A de $\mathbb{C}$ une fonction qui est dérivable en tout point de A.

**Notation**

$$f \in \mathcal{H}/A$$

### 3-2 Propriétés

*Les résultats suivants sont admis.*

Les propriétés sont identiques à celles des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$. Soient $f$ et $g \in \mathcal{H}/A$.

a) $\lambda f + \mu g \in \mathcal{H}/A$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f\,' + \mu g'$

b) $fg \in \mathcal{H}/A$ et $(fg)' = f\,'g + fg'$

c) Si $\forall z \in A, g(z) \neq 0$, alors :

$$\frac{1}{g} \in \mathcal{H}/A \text{ et } \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

d) Si $f \in \mathcal{H}/A$, $g \in \mathcal{H}/f(A)$, alors :

$$(g \circ f) \in \mathcal{H}/A \text{ et } (g \circ f)' = (g' \circ f)\, f\,'$$

e) Si $f$ est bijective de $A$ sur $f(A)$, alors :

$$f^{\,-1} \in \mathcal{H}/f(A) \text{ et } \left(f^{\,-1}\right)' = \frac{1}{f\,' \circ f^{-1}}$$

### 3-3 Dérivation des fonctions usuelles

*Les résultats suivants sont admis.*

#### a) Fonctions algébriques

On dérive formellement par rapport à $z$ comme pour les fonctions de la variable réelle par rapport à $x$ :

$$\begin{aligned}(az)' &= a \\ (z^m)' &= mz^{m-1}, \quad m \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

#### b) Fonctions définies par des séries

<u>Théorème de dérivation des séries entières :</u>
La fonction $f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n + ...$ de rayon de convergence $R$ est holomorphe sur le disque ouvert $d(O, R)$. Sa dérivée est la somme de la série dérivée terme à terme. Ainsi

$$\begin{aligned}(e^z)' &= e^z \\ (chz)' &= shz \\ (\cos z)' &= -\sin z \\ & \text{etc ...}\end{aligned}$$

On dérive par rapport à $z$ comme on dérive dans $\mathbb{R}$ par rapport à $x$.

**c) Dérivée des déterminations des fonctions multiformes**

- **Dérivée de** $\log_k z$

$$Z = \log_k(z) = \ln\rho + i\theta + 2ik\pi$$

définie de $\mathbb{C} \setminus Ox^+$ dans $B_k$.

On rappelle que $exp(\log_k(z)) = z$, c'est-à-dire que $\log_k z$ est la fonction réciproque de $\exp z$ restreinte à $B_k, \exp(z) \in \mathcal{H}/B_k$ donc $\log_k z \in \mathcal{H}/ \ \mathbb{C} \setminus Ox^+$ et la dérivation par la formule de la fonction réciproque donne :

$$\begin{aligned} z &= f(Z) \Longrightarrow z' = f'(Z) \\ Z &= f^{-1}(z) \Longrightarrow Z' = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} z &= \exp(Z) \Longrightarrow z' = \exp(Z) \\ Z &= \log_k(z) \Longrightarrow Z' = \frac{1}{\exp(\log_k(z))} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

La constante additive disparaît. Ainsi :

$$\boxed{\log_k z \text{ holomorphe sur } \mathbb{C} \setminus Ox^+ \text{ et } (\log_k)'(z) = \tfrac{1}{z}}$$

- **Dérivée de** $z_{(k)}^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{C}$

$$z_{(k)}^{\alpha} = \exp(\alpha \log_k(z))$$

On obtient par dérivée des fonctions composées :

$$\left[z_{(k)}^{\alpha}\right]' = [\alpha[\log_k(z)]]' \exp[\alpha \log_k(z)]$$

Donc :

$$\left[z_{(k)}^{\alpha}\right]' = \frac{\alpha}{z} z_{(k)}^{\alpha}$$

La dérivée possède la même constante multiplicative (on retrouve la même uniformité). Ainsi

$$\boxed{z_{(k)}^{\alpha} \text{ holomorphe sur } \mathbb{C} \setminus Ox^+ \text{ et } \left[z_{(k)}^{\alpha}\right]' = \tfrac{\alpha}{z} z_{(k)}^{\alpha}}$$

# CHAPITRE 4 - INTEGRATION

## 1. Généralités

### 1-1 - Chemins

- Un **chemin** de $\mathbb{C}$ est une application continue $\gamma\ : [a,b] \to \mathbb{C}$, $[a,b]$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\gamma$ s'appelle un **lacet**.
- $\gamma$ est $C^1$ par morceaux si $\gamma'(t)$ existe et est continue sur les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $[t_{j-1}, t_j]$ avec $t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b$.

### 1-2 - Intégrale curviligne complexe

Soit $f(z)$ définie sur un chemin $C^1$ par morceaux $\gamma$ représenté sur la figure ci-dessous :

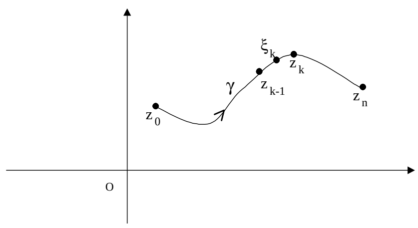



Figure 1 : Chemin

Soit la subdivision $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \widehat{z_{k-1}z_k}$ de ce chemin avec $\xi_k \in \widehat{z_{k-1}z_k}$ , $z_k = \gamma(t_k)$, $z_0 = \gamma\,(a)$ et $z_n = \gamma\,(b)$.
**Définition :**

$$\boxed{\begin{array}{c} \int_\gamma f(z)dz = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \\ \text{avec} \max\limits_{k} |z_k - z_{k-1}| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \end{array}}$$

Avec les notations suivantes

$$\begin{aligned} z_k &= x_k + iy_k \\ z_k - z_{k-1} &= \Delta x_k + i\Delta y_k \\ \xi_k &= a_k + ib_k \\ f(\xi_k) &= P(a_k, b_k) + iQ(a_k, b_k) \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(a_k, b_k)\Delta x_k - Q(a_k, b_k)\Delta y_k \\ +i \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} Q(a_k, b_k)\Delta x_k + P(a_k, b_k)\Delta y_k \end{aligned}$$

avec $\max_k |\Delta x_k| \to 0$ et $\max_k |\Delta y_k| \to 0$. D'où

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (Pdx - Qdy) + i\int_\gamma (Qdx + Pdy)$$

**Conditions suffisantes d'existence :**

$$\boxed{\begin{array}{c} P \text{ et } Q \text{ continues sur } \gamma \\ \text{ou } f \text{ continue sur } \gamma \end{array}}$$

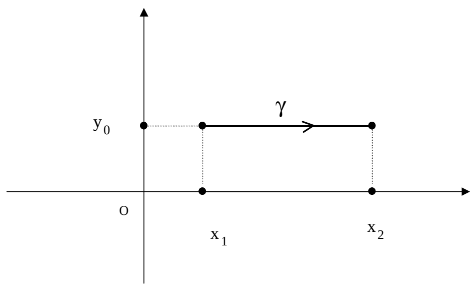
Pour le calcul pratique d'une intégrale sur un contour $\gamma$, on paramètre l'arc $\gamma$ et on se ramène à un ou plusieurs calculs d'intégrales de la variable réelle. Si l'arc possède un paramètrage de la forme $z = \gamma(t)\,, t \in [a, b]$, alors $\int_\gamma f(z)dz$ se calcule comme suit :

**Calcul pratique :** $\gamma$ paramétré

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt}$$

La plupart du temps, on est amené à calculer des intégrales sur des contours rectilignes ou circulaires. On a alors :

* **segments de droite parallèles à l'axe des abscisses** :



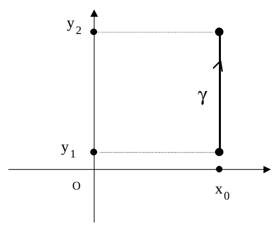

On paramètre le segment de droite par

$$z = x + iy_0 \text{ avec } x \in [x_1, x_2]$$

et

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = \int_{x_1}^{x_2} f(x + iy_0)\, dx}$$

* **segments de droite parallèle à l'axe des ordonnées :**



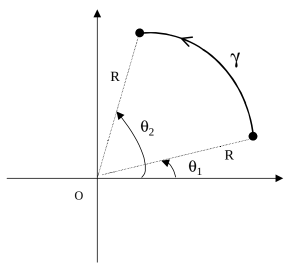

On paramètre le segment de droite par

$$z = x_0 + iy \text{ avec } y \in [y_1, y_2]$$

et

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = i\int_{y_1}^{y_2} f(x_0 + iy)\, dy}$$

* **arc de cercle de rayon R** :



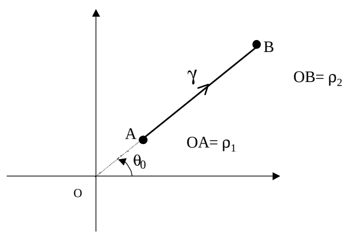

On paramètre l'arc de cercle par :

$$z = Re^{i\theta} \text{ avec } \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

et

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f\left(Re^{i\theta}\right) Rie^{i\theta} d\theta}$$

* **segments de droite passant par l'origine d'angle** $\theta_0$ :




On paramètre le segment de droite par

$$z = \rho e^{i\theta_0} \text{ avec } \rho \in [\rho_1, \rho_2]$$

et

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = \int_{\rho_1}^{\rho_2} f\left(\rho e^{i\theta_0}\right) e^{i\theta_0} d\rho}$$

## 1-3 - Propriétés élémentaires de l'intégrale

### a) Linéarité

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz$$

### b) Sens de parcours du chemin $\gamma$

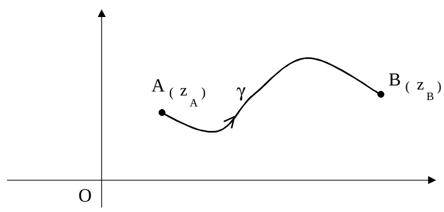
Parfois, il est nécessaire de préciser le sens de parcours du chemin $\gamma$.
Lorsque c'est le cas, on notera $\gamma^+$ un sens de parcours de $\gamma$ (le sens trigonométrique si possible) et $\gamma^-$ le sens de parcours opposé à celui de $\gamma^+$. On a alors :

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_{\gamma^+} f(z)dz$$

### c) Intégrale d'une constante $f(z) = K$

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}) = K(z_n - z_0)$$

Donc




Ainsi,

$$\int_\gamma f(z)dz = K\,(z_B - z_A)$$

## 1-4 - Lemmes de Jordan

### 1er lemme de Jordan

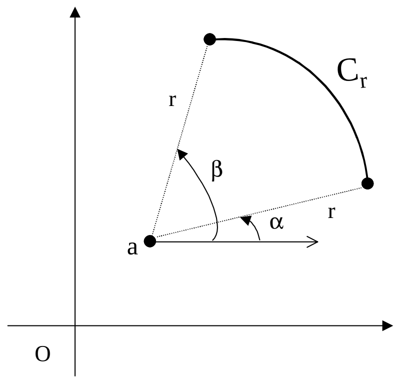
**Hypothèses**

$$C_r(a,r) \text{ arc de cercle de centre } a \text{ et de rayon } r$$
$$\lim_{r\to 0 \text{ (resp. } \infty)} \sup_{C_r} |(z-a)\, f(z)| = 0$$

**Conclusion**

$$\boxed{\lim_{r\to 0 \text{ (resp. } \infty)} \int_{C_r} f(z)dz = 0}$$

**Preuve**




$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_r} f(z)dz\right| &= \left|\int_\alpha^\beta f(a+re^{i\theta})rie^{i\theta}d\theta\right| \\
&\leqslant \int_\alpha^\beta \left|rf(a+re^{i\theta})\right| d\theta \\
&\leqslant (\beta-\alpha)\sup_{C_r} |(z-a)\, f(z)|
\end{aligned}$$

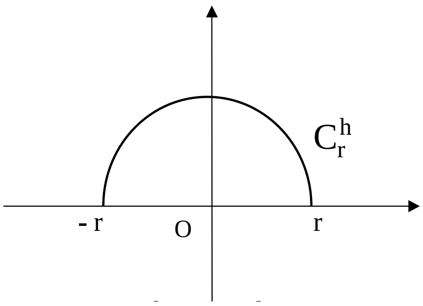
### 2èmes lemmes de Jordan

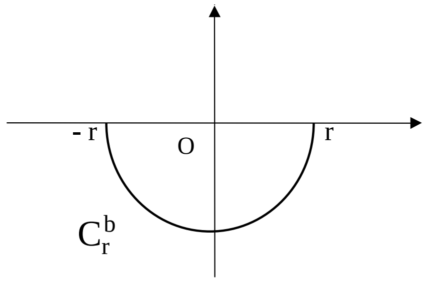
**Hypothèse**

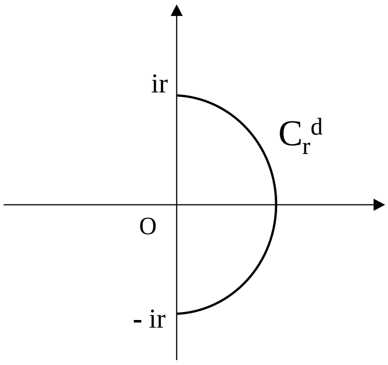
$\lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{C_r} |f(z)| = 0$

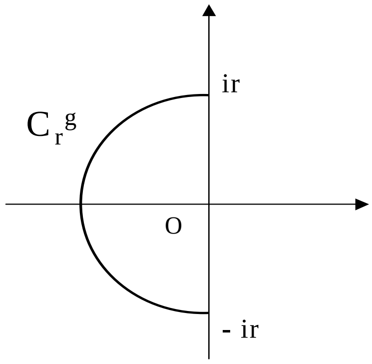
**Conclusions**

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\lim\limits_{r\to\infty} \int_{C_r} e^{imz} f(z)dz = 0 & \text{pour } m>0 \text{ et } C_r = C_r^h \\
\lim\limits_{r\to\infty} \int_{C_r} e^{imz} f(z)dz = 0 & \text{pour } m<0 \text{ et } C_r = C_r^b \\
\lim\limits_{r\to\infty} \int_{C_r} e^{mz} f(z)dz = 0 & \text{pour } m<0 \text{ et } C_r = C_r^d \\
\lim\limits_{r\to\infty} \int_{C_r} e^{mz} f(z)dz = 0 & \text{pour } m>0 \text{ et } C_r = C_r^g
\end{array}}$$




**Preuve :**

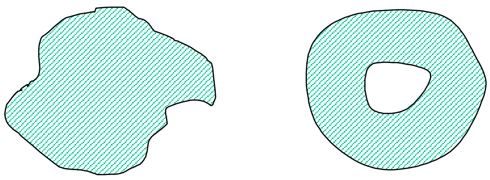
$$
\begin{aligned}
|I_r| &= \left| \int_{C_r} e^{imz} f(z) dz \right| \\
&= \left| \int_0^{\pi} e^{imre^{i\theta}} f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta \right| \\
&\leq 2r \sup_{C_r} |f(z)| \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mr\sin\theta} d\theta \\
&\leq \sup_{C_r} |f(z)| \frac{\pi}{m}(1 - e^{-mr}) \ (\text{car } \sin\theta \geqslant \frac{2\theta}{\pi})
\end{aligned}
$$

## 2. Intégration des fonctions holomorphes

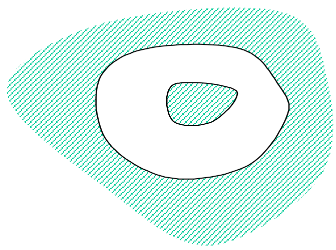
### Définitions

- Ensemble **connexe** $A$ : un ensemble $A$ est connexe si et seulement si $\forall\,(a,b) \in A^2$, il existe une ligne polygonale joignant $a$ et $b$ incluse dans $A$. En d'autres termes, $A$ ne doit pas être "troué".
- Un **domaine** est un ouvert non vide connexe de $\mathbb{C}$.
- Un domaine $A$ est **simplement connexe** si (en plus d'être un ouvert non vide connexe) le complémentaire de $A$ dans $\mathbb{C}$ noté $\overline{A}$ est connexe. On dit aussi que $A$ est **1-connexe**.
- Un domaine $A$ est $n$-connexe si $\overline{A}$ est la réunion de $n$ parties connexes disjointes.

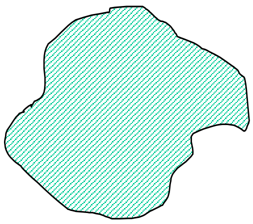
### Illustration



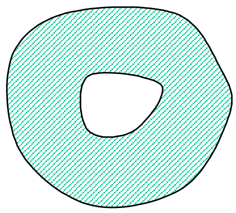
Domaines connexes



Domaine non connexe



Domaine simplement connexe



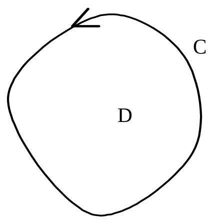
Domaine 2-connexe

*(Un domaine 2-connexe est un domaine connexe dont le complémentaire est constitué de* 2 *parties connexes)*

**2-1 - Théorème de Cauchy**

### a) Domaine 1 connexe (ou simplement connexe)

**Hypothèses**
$f$ holomorphe sur $\Omega$ ouvert non vide de $\mathbb{C}$
Soit $D \subset \Omega$ un domaine simplement connexe de contour $C$ inclus dans $\Omega$




**Conclusion**

$$\boxed{\int_C f(z)dz = 0}$$

**Preuve : utiliser la formule de Green Riemann**

$$\int_{C^+} Adx + Bdy = \int\int_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dxdy$$

En notant :

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_C \left(P(x,y) + iQ(x,y)\right)(dx + idy) \\
&= \left(\int_C Pdx - Qdy\right) + i\left(\int_C Qdx + Pdy\right) \\
&= \int\int_D \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + i\int\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy
\end{aligned}$$

D'après les conditions de Cauchy :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

On a donc :

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

- **Remarque** 1 : La démonstration du théorème de Cauchy à l'aide de la formule de Green Riemann est simple mais suppose que $f'$ est continue. En 1900, Goursat a montré que l'existence de la dérivée de $f$ dans une partie ouverte de $\mathbb{C}$ entraîne la continuité de $f'$, ce qui permet de supprimer l'hypothèse de continuité de $f\,'$.

- **Remarque** 2 : Si la condition d'holomorphie de $f$ n'est pas vérifiée sur $D$, le théorème de Cauchy ne s'applique pas. Par exemple, pour $f(z) = \frac{1}{z}$, qui est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, on montre facilement à l'aide du paramètrage $z = \rho e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi[$, que

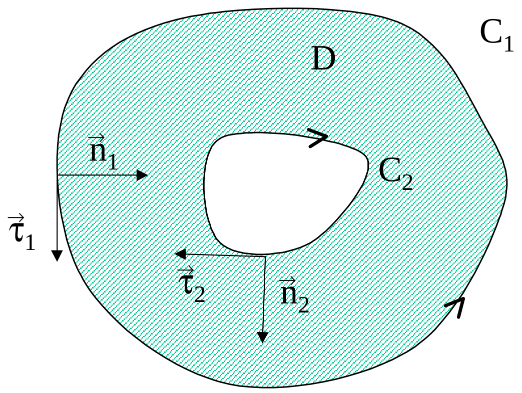
$$\int_{C(0,\rho)} f(z)dz = 2i\pi \neq 0$$

  où $C(0,\rho)$ est le cercle de centre 0 et de rayon $\rho$. Mais le théorème de Cauchy ne s'applique pas puique $f$ n'est pas holomorphe en $z = 0$.

### b) Domaine $n$ connexe - Généralisation

*On admet la généralisation.*
Exemple d'un domaine D 2 connexe :
Soit $D$ un domaine doublement connexe de frontières "extérieure" $C_1$ et "intérieure" $C_2$ et soit $f$ holomorphe sur $D$. En notant $\partial D = C_1^+ \cup C_2^-$, on a :

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{C_1^+} f(z)dz + \int_{C_2^-} f(z)dz = 0$$




Cauchy - Domaine 2-connexe

$\partial D$ est dite **frontière orientée** par le choix des sens de parcours de $C_1$ et $C_2$ : sens positif pour la frontière "extérieure" et sens négatif pour la frontière "intérieure" définis comme illustré ci-dessus. Sur cette figure, le vecteur $\overrightarrow{\tau}$ est le vecteur tangent à la courbe, $\overrightarrow{n}$ est la normale intérieure orientée et l'angle entre ces deux vecteurs est $(\widehat{\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n}}) = +\frac{\pi}{2}$

## 2.2 Applications du théorème de Cauchy
**(voir compléments)**

# Compléments de cours

## 1) Correspondance : $z \longmapsto \arg z$

A tout point $z$ du plan complexe correspond une infinité de valeurs de arg $z$ différant entre elles d'un multiple de $2\pi$. Ainsi la correspondance $z \longmapsto \arg z$ n'est pas une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ et elle associe une infinité d'images dans $\mathbb{R}$. Découpant $\mathbb{R}$ en segments d'extrémités $[2k\pi, 2(k+1)\pi[$, on voit que cette correspondance applique $\mathbb{C}$ indifféremment sur tous les segments $[2k\pi, 2(k+1)\pi[$. De plus, à chaque point de $Ox^+$ ( $z = x, \quad x \in \mathbb{R}^{+*}$) correspondent les deux extrémités de chaque segment. On distingue une fonction, en privant le plan complexe de $Ox^+$ et en isolant un segment ouvert $]2k\pi, 2\,(k+1)\,\pi[$ de $\mathbb{R}$ ; on peut alors définir la détermination de rang $k$ de l'argument de $z$. Ces différentes remarques sont illustrées sur la figure suivante :

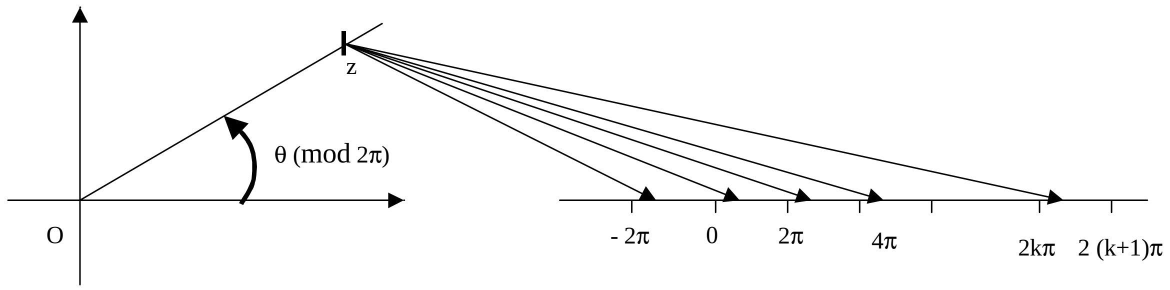



Figure 1 : Correspondances de l'argument de $z$.

**Définition 1** : *On appelle détermination de rang $k$ de arg $z$ et on note* $\arg_k\, z$ *la fonction qui à tout point du plan complexe privé de la demi-droite $Ox^+$ fait correspondre la valeur de l'argument de $z$ appartenant au segment ouvert* $]2k\pi, 2\,(k+1)\,\pi[$.

Cette définition de $\arg_k(z)$

$$\arg_k : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus Ox^+ \to\, ]2k\pi, 2\,(k+1)\,\pi[ \\ z \to \arg_k z \; = \theta \end{cases}$$

est illustrée sur la figure suivante :

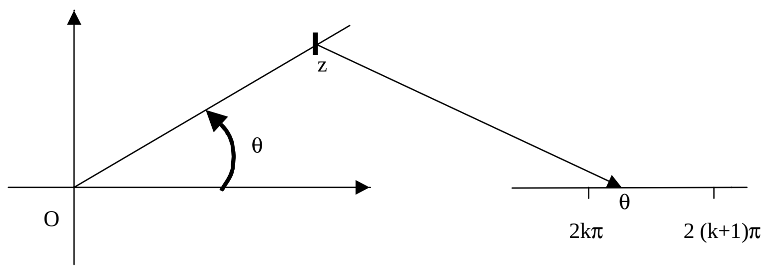



Figure 2 : Définition de $\arg_k z$.

La détermination de rang $k$ de l'argument est une surjection de $\mathbb{C} \setminus Ox^+$ dans $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$. En prenant $k = 0$, on obtient la détermination principale de l'argument :

**Définition 2** : *On appelle détermination principale de l'argument et on note $Arg\ z$ la surjection qui à tout point $z$ de $\mathbb{C} \setminus Ox^+$ fait correspondre la valeur de l'argument de $z$ appartenant au segment ouvert $]0, 2\pi[$.*

Cette définition de $Arg(z)$

$$Arg : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus Ox^+ \to ]0, 2\pi[ \\ z \to Arg\, z \ = \theta \end{cases}$$

est illustrée sur la figure suivante :

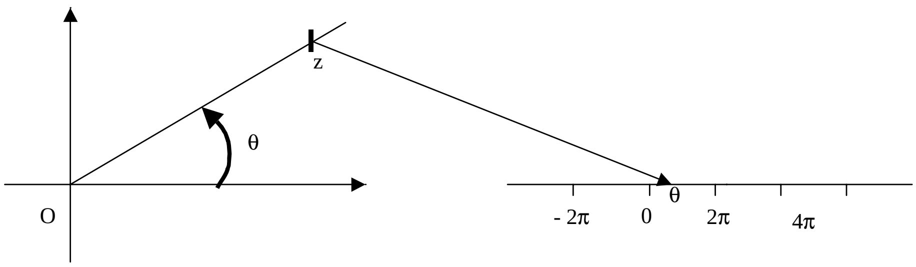



Figure 3 : Définition de $Arg\ z$.

**Définition 3** : *Le domaine de définition des déterminations précédentes $\mathbb{C} \setminus Ox^+$ est le plan complexe coupé suivant le demi axe réel positif. Le demi axe $Ox^+$ est dans ce cas appelé la coupure.*

**Remarque** : On aurait tout aussi bien pu, partant du découpage de $\mathbb{R}$ par les segments ouverts $]\alpha + 2k\pi, \alpha + 2(k+1)\pi[$, définir des déterminations dans le plan coupé $\mathbb{C} \setminus D_\alpha$ où $D_\alpha$ est une demi-droite issue de $O$ et faisant l'angle $\alpha$ avec $Ox^+$, à valeurs dans le segment $]\alpha + 2k\pi, \alpha + 2(k+1)\pi[$. On peut noter ces déterminations $\arg_{k,\alpha}(z)$. La définition de la fonction multiforme ainsi obtenue

$$\arg_{k,\alpha} : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus D_\alpha \to ]\alpha + 2k\pi, \alpha + 2(k+1)\pi[ \\ z \to \arg_{k,\alpha} z \ = \theta \end{cases}$$

est illustrée sur la figure suivante :

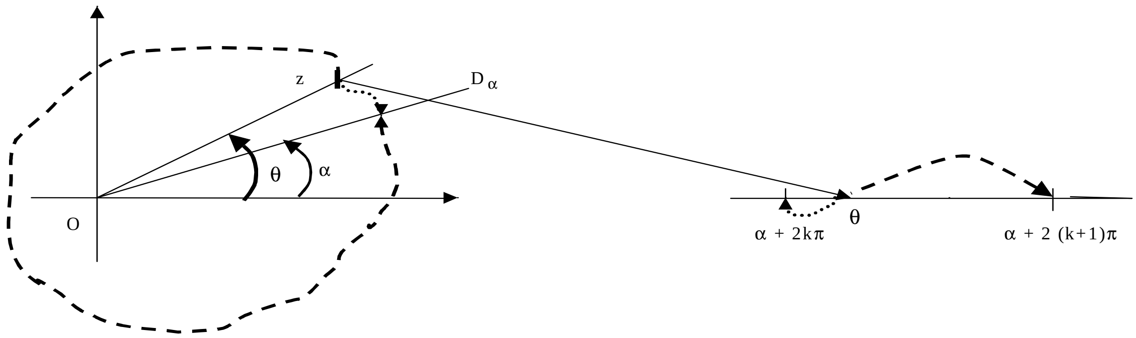



Figure 4 : Définition de $\arg_{k,\alpha}(z)$.

**Remarque** : Si $z$ tend vers un point de $D_\alpha$, $\arg_{k,\alpha} z$ tend vers $\alpha + 2k\pi$ ou vers $\alpha + 2(k+1)\pi$ suivant le coté par lequel on aborde la coupure. On est alors conduit à distinguer le bord supérieur et le bord inférieur de la coupure et :

**Définition 4** : *On appelle valeur de* $\arg_{k,\alpha} z$ *sur le bord supérieur (resp. inférieur) de la coupure les valeurs de continuité de* $\arg_{k,\alpha} z$ *lorsque* $z$ *tend vers le bord supérieur (resp. inférieur) de la coupure.*

Reprenant par raison de simplicité la détermination principale $Arg\ z$, on matérialise les bords de la coupure de la manière indiquée sur la figure ci-dessous :

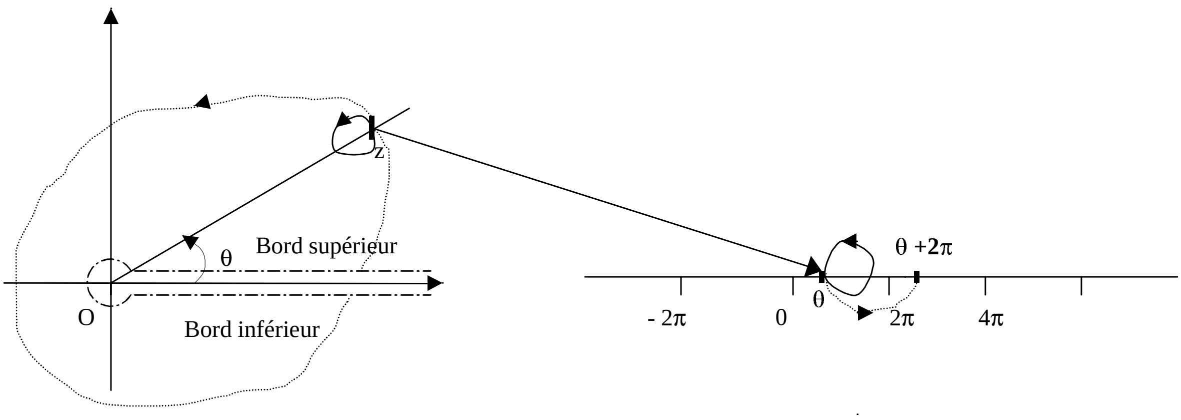



Figure 5 : Bords inférieur et supérieur de la coupure.

**Remarque** : Si $z$ décrit une courbe fermée $\gamma$ n'entourant pas l'origine l'argument reprend la même valeur. Par contre si $z$ décrit une courbe fermée entourant l'origine et coupant une fois la coupure, l'argument change de détermination et on revient au point $z$ avec une valeur augmentée ou diminuée de $2\pi$ suivant que $\gamma$ est parcourue dans le sens positif ou négatif. On peut par ailleurs décrire ainsi toutes les déterminations en parcourant des courbes fermées entourant l'origine et en suivant par continuité la variation de l'argument, comme le montre la figure suivante :

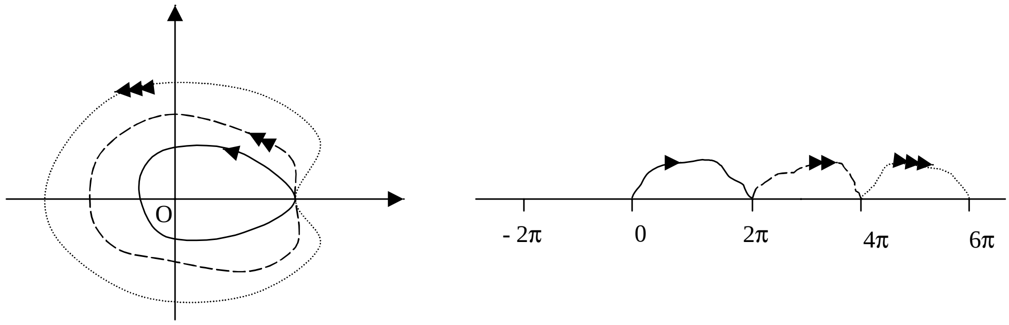



Figure 6 : Courbes fermées entourant l'origine.

Le point dont est issue la coupure, ici l'origine, est appelé *point de branchement* ou *point de ramification.*

## 2) Correspondance : $z \longmapsto (z-a)^{\frac{1}{n}}, a \in \mathbb{C}$

**Définition 2** : *On définit une détermination de rang* $k$ *de* $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ *en effectuant une coupure suivant une demi-droite* $D_\alpha$ *issue du point de ramification* $a$ *et faisant avec* $Ox^+$ *l'angle* $\alpha$.

Cette définition est illustrée sur la figure suivante :

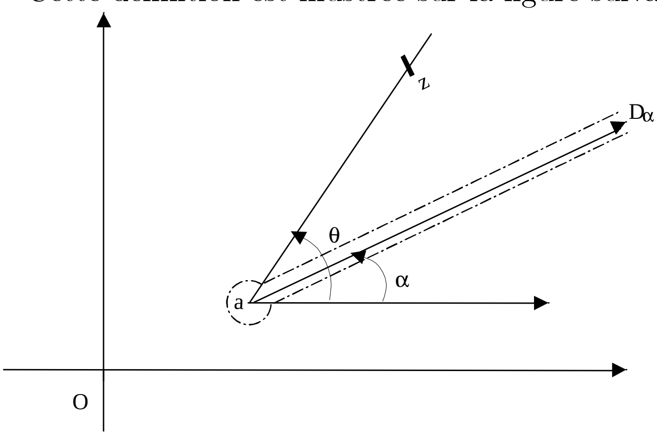



Figure 2 : Définition de $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ .

Ainsi, en posant $z-a = \rho\, e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]\alpha, \alpha+2\pi\right[$ , on obtient :

$$(z-a)^{\frac{1}{n}}_{(k)} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

ce qui nous donne les valeurs de la détermination choisie en tout point de $\mathbb{C} \setminus D_\alpha$.

## 3) Preuve du théorème sur la dérivabilité d'une fonction de la variable complexe

**Théorème** : une fonction de la variable complexe $f$ est dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont différentiables au point $(x_0, y_0)$ et si les conditions de Cauchy sont vérifiées

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

**Première Implication**

si $f(z)$ est dérivable au point $z_0$, alors

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

c'est-à-dire

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\,\Delta z + e(\Delta z)\,\Delta z \text{ avec } \lim_{\Delta z \to 0} e(\Delta z) = 0$$

En posant $\Delta z = h + ik$, $f'(z_0) = A(x_0, y_0) + iB(x_0, y_0)$ et $e(\Delta z) = e_1(h, k) + ie_2(h, k)$, et en identifiant les parties réelles et les parties imaginaires dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} P(x_0 + h, y_0 + k) - P(x_0, y_0) &= A(x_0, y_0)h - B(x_0, y_0)k + e_1(h, k)h - e_2(h, k)k \\ Q(x_0 + h, y_0 + k) - Q(x_0, y_0) &= B(x_0, y_0)h + A(x_0, y_0)k + e_2(h, k)h + e_1(h, k)k \end{aligned}$$

En posant $e_1(h, k)h - e_2(h, k)k = \varepsilon_1(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$ et $e_2(h, k)h + e_1(h, k)k = \varepsilon_2(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$, et en vérifiant que

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2} \to 0} \varepsilon_1(h, k) = \lim_{\sqrt{h^2+k^2} \to 0} \varepsilon_2(h, k) = 0,$$

on voit que les deux équations précédentes traduisent d'une part le fait que $P$ et $Q$ sont différentiables au point $(x_0, y_0)$, d'autre part que les dérivées partielles de $P$ et de $Q$ au point $(x_0, y_0)$ sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) &= A(x_0, y_0), \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -B(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) &= B(x_0, y_0), \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) = A(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Les conditions de Cauchy sont donc vérifiées.

**Réciproque**

Si $P$ et $Q$ sont différentiables au point $(x_0, y_0)$ et que les conditions de Cauchy sont vérifiées, à partir de la définition de la différentiabilité, on a en posant $\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -B(x_0, y_0)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = B(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)$ :

$$\begin{aligned} P(x_0 + h, y_0 + k) - P(x_0, y_0) &= A(x_0, y_0)h - B(x_0, y_0)k + \varepsilon_1(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \\ Q(x_0 + h, y_0 + k) - Q(x_0, y_0) &= B(x_0, y_0)h + A(x_0, y_0)k + \varepsilon_2(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \{A(x_0, y_0) + iB(x_0, y_0)\}\{h + ik\} + \varepsilon_1(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} + i\varepsilon_2(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

c'est à dire

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\,\Delta z + e(\Delta z)\,\Delta z$$

avec $e(\Delta z) = \frac{1}{h+ik}\left\{\varepsilon_1(h,k)\sqrt{h^2+k^2} + i\varepsilon_2(h,k)\sqrt{h^2+k^2}\right\}$. On vérifie alors aisément que

$$\lim_{\Delta z \to 0} e(\Delta z) = 0,$$

ce qui signifie que $f$ est dérivable au point $z_0$ avec $f'(z_0) = A(x_0, y_0) + iB(x_0, y_0)$.

## 4) Applications du théorème de Cauchy

*On admet les résultats ci-dessous donnés à titre d'information (non utilisés dans les exercices)*

Soit $f$ holomorphe sur un domaine simplement connexe $D$.

**a) Définition de** $\int_a^b f(z)dz$

Soient deux points $a$ et $b$ de $D$ et soient $\gamma_1, \gamma_2$ deux chemins inclus dans $D$ d'origine $a$ et d'extrémité $b$. Alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_a^b f(z)dz$$

**b) Définition de** $F_{z_0}(u) = \int_{z_0}^u f(z)dz,\ u \in \mathbb{C}$

$F_{z_0}(u)$ est indépendante du chemin joignant $z_0$ et $u$ inclus dans $D$

$F_{z_0}(u)$ est une primitive de $f(z)$ telle que $F'_{z_0}(u) = f(u)$