Chapitre 3

Exercices semaine 3

Série d'exercices n°1

ex 7.1

On reprend les conditions du cours de la semaine avec une barre rectiligne de composition et de propriétés homogènes dont l'axe coincïde avec l'axe Ox et dont la température T est une fonction du temps t et de la position dans l'espace x qui représente l'abscisse d'un point de la barre (Figure 3-1.7). La barre fait 3 mètres de long et ses parois latérales sont isolées.

◇ Rappeler l'équation de la chaleur dans la barre.

En gardant les notations du cours et avec les unités du système métrique, $\alpha = 2 = \frac{K}{\rho\mu}$ avec K conductivité thermique du matériau, μ sa chaleur spécifique et ρ sa densité .

◇ En utilisant la méthode de séparation des variables, indiquez les deux équations à résoudre et rappeler les solutions du problème en fonction de la valeur de la constante introduite dans les équations différentielles.

◇ Résoudre l'équation avec comme conditions aux limites :

$T(0,t) = T(3,t) = 0;$

et comme conditions initiales :

$T(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x$

ex 7.2

Soit une corde vibrante de longueur L initialement tendue. Pour de petites vibrations $y(x,t)$ de la corde autour de sa position initiale, les lois de la mécanique aboutissent à l'équations aux dérivées partielles de la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \tag{3-0.1}$$

La corde reste fixée à ses deux extrémités. Que cela implique-t-il ? On donne comme position initiale de la courbe $y(x,t=0) = 2\sin(\frac{\pi x}{L})$. Donner l'équation d'évolution des vibrations de la corde.

Série d'exercices n°2

ex 8.1

Soit une plaque carrée de coté mesurant L=1m dont 3 des 4 côtés sont maintenus à la température 0 et le 4ème à T1. On va déterminer la température à l'état stationnaire en chaque point de la plaque.

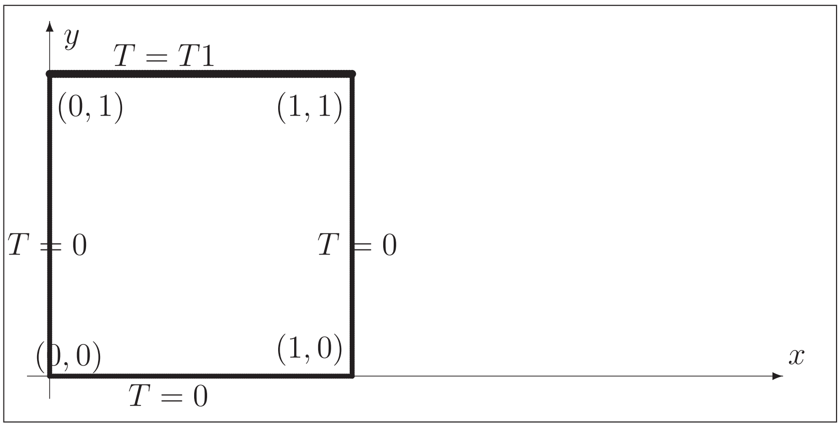

FIGURE 3-0.1 – Plaque carrée dont la température est imposée sur les 4 cotés.

On rappelle que l'équation de la chaleur ou équation de Laplace étudiée en cours se généralise en 2 dimensions par :

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \alpha\{\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2}\}$$

◇ Que devient cette équation en régime stationnaire quand les grandeurs ne dépendent pas du temps ?

On utilise, dans ce cas, la méthode de séparation des variables en posant

$$T(x, y, t) = T(x, y) = g(x)h(y).$$

◇ Remplacer dans l'équation ci-dessus et monter que l'on a :

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = -\frac{h''(y)}{h(y)}$$

Le membre de gauche de cette équation dépend de x et celui de droite de y, or x et y sont deux variables indépendantes donc les rapports sont égaux à une même constante λ.
On rappelle qu'une équation différentielle de la forme

$$f''(u) = \alpha^2 f(u)$$

a des solutions générales de type

$$f(u) = Ae^{\alpha u} + Be^{-\alpha u}$$

avec A et B constantes réelles.

Mais qu'il est souvent plus facile d'utiliser les fonctions trigonométriques hyperboliques $\cosh$ et $\sinh$. Alors, comme :

$$\cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \quad et \quad \sinh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

On peut écrire la solution de l'équation diférentielle

$$f(u) = C\cosh(\alpha u) + D\sinh(\alpha u)$$

avec C et D constantes réelles (liées a A et B).

◇ Résoudre $g''(x) = \lambda g(x)$ en fonction du signe de λ

◇ Résoudre $h''(y) = -\lambda h(y)$ en fonction du signe de λ

◇ Donner selon λ, la forme des solutions générales obtenues.

◇ Étudier pour les solutions possibles celles qui permettent de satisfaire aux conditions aux limites et aux conditions initiales.

Série d'exercices n°3

ex 9.1

Soit une plaque rectangulaire (voir figure 3-0.2 de petit coté mesurant a=1m et de grand coté mesurant b=2m dont 2 des 4 côtés sont maintenus à la température 0 et les 2 autres à 20 $^\circ C$. En utilisant la méthode de l'exercice 8.1, déterminer la température à l'état stationnaire en chaque point de la plaque.

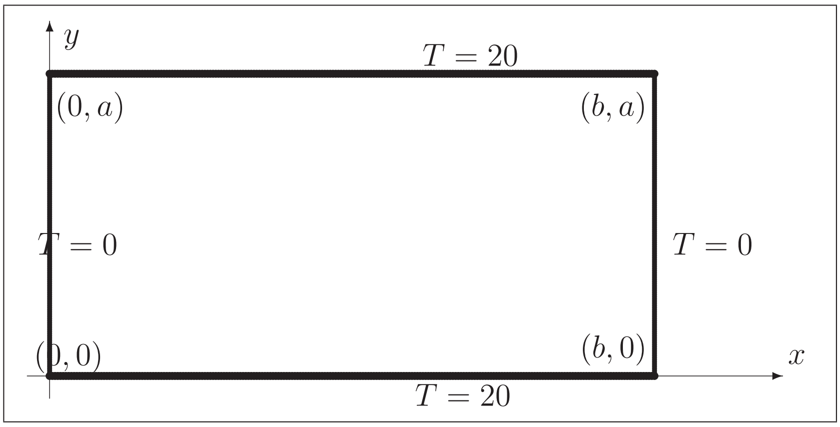

FIGURE 3-0.2 – Plaque rectangulaire dont la température est imposée sur les 4 cotés.

Corrections de la série d'exercices n°1

ex 7.1

◇ Equation de la chaleur dans la barre.

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

Soit dans le cas particulier de cet exercice :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

◇ On utilise la méthode de séparation des variables. On va d'abord déterminer les solutions T(x,t) de l'équation ci-dessus qui peuvent se mettre sous la forme T(x,t)=f(x)g(t). On remplace et on a :

$$f(x)g'(t) = 2g(t)f''(x)$$

Si on suppose que les fonctions f et g ne sont pas partout nulles, on divise par f(t)g(x) et on peut écrire cette équation :

$$\frac{g'(t)}{2g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda$$

Car les variables x et t sont indépendantes et l'égalité de l'équation ci-dessus n'a lieu que si la valeur commune du rapport est une constante que l'on note λ.
On en déduit deux équations différentielles :

$$f''(x) - \lambda f(x) = 0$$

$$g'(t) - 2\lambda g(t) = 0$$

L'équation différentielle de la fonction g a comme solution $g(t) = Ae^{2\lambda t}$ avec $A \in \mathbb{R}$

L'équation différentielle de la fonction f doit être résolue en distinguant trois cas, selon le signe de λ.

- $\diamond$ $\lambda > 0$ On pose $\lambda = \omega^2$ et on aura $f(x) = Ce^{\omega x} + De^{-\omega x}$ avec C et D constantes réelles ;
- $\diamond$ $\lambda = 0$ Alors, $f(x) = Cx + D$ avec C et D constantes réelles ;
- $\diamond$ $\lambda < 0$ On pose $\lambda = -\omega^2$ et on aura $f(x) = C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)$ avec C et D constantes réelles ;

Ce sont les conditions aux limites et les conditions initiales qui nous permettent de traiter la dernière question et de finir la résolution du problème. La première conditions à utiliser est celle de la température nulle aux extrémités de la barre pour tout les instants $t > 0$. On doit avoir $\forall t, \quad T(O,t) = g(t)f(0) = 0 \quad et \quad T(L,t) = g(t)f(L) = 0$ donc f(0)=f(L)=0.

- $\diamond$ $\lambda = 0$. Alors, $f(x) = Cx + D$ avec C et D constantes réelles et donc $f(0) = 0$ donne $D = 0$, puis $f(L) = 0$ donne $C = 0$ soit f(x)=0, solution nulle qui ne permet pas de satisfaire la conditions initiale et qui est donc exclue : $\lambda \neq 0$
- $\diamond$ $\lambda > 0$ $\lambda = \omega^2$. On aura $f(x) = Ce^{\omega x} + De^{-\omega x}$ avec C et D constantes. $f(0) = 0$ donne $D + C = 0$, soit $D = -C$ puis $f(L) = 0 = Ce^{\omega L} - Ce^{-\omega L}$ ce qui donne $C = 0$ soit f(x)=0, solution nulle qui ne permet pas de satisfaire la conditions initiales et et donc exclu : $\lambda < 0$

◇ $\lambda < 0$ On pose $\lambda = -\omega^2$ et on aura $f(x) = C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)$ avec C et D constantes. $f(0) = 0$ donne $C = 0$, puis $f(L) = 0$ ce qui donne $D\sin(\omega L) = 0$. La solution D=0 est exclue (cf. ci-dessus) et donc il existe un entier n tel que $\omega L = n\pi$ réelles ;

On arrive à : $f(x) = D_n \sin(\frac{n\pi x}{L})$
Donc, si on pose $E_n = A.D_n$, on a : $T(x,t) = f(x)g(t) = E_n e^{\frac{-2n^2\pi^2 t}{L^2}} \sin(\frac{n\pi x}{L})$
Plus généralement toute combinaison linéaire de cette forme est solution soit :

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} E_n e^{\frac{-2n^2\pi^2 t}{L^2}} \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

On termine en utilisant les conditions initiales :
$T(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x$
Soit :
$T(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x = \sum_{n=1}^{n=+\infty} E_n \sin(\frac{n\pi x}{L})$

On rappelle que L=3, longueur de la barre. On a donc :
$T(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x = \sum_{n=1}^{n=+\infty} E_n \sin(\frac{n\pi x}{3})$

On peut soit calculer les coefficients E_n en remarquant, comme

dans le cours que les coefficients E_n sont les coefficients de Fourier de la fonction de période 6 impaire et égale à $5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x$ sur $[0, L] = [0, 3]$.
Sinon on procède par identification directe, en utilisant l'unicité du développement en série de Fourier d'une fonction continue sur un intervalle $[0, 3]$

$5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x = \sum_{n=1}^{n=+\infty} E_n \sin(\frac{n\pi x}{3})$

$\frac{n}{3} = 4 \Rightarrow n = 12$, d'où $E_{12} = 5$;
$\frac{n}{3} = 8 \Rightarrow n = 24$, d'où $E_{24} = -3$;
$\frac{n}{3} = 10 \Rightarrow n = 30$, d'ou $E_{30} = 2$;

Autres valeurs de n : $E_n = 0$.
Finalement :

$$T(x,t) = 5e^{\frac{-2.5^2\pi^2 t}{3^2}} \sin(\frac{5\pi x}{3}) - 3e^{\frac{-2.8^2\pi^2 t}{3^2}} \sin(\frac{8\pi x}{3}) + 2e^{\frac{-2.10^2\pi^2 t}{3^2}} \sin(\frac{10\pi x}{3})$$

ex 7.2

La corde reste fixée à ses deux extrémités. Cela implique que :

$\forall t > 0, \quad y(0,t) = y(L,t) = 0$. La démarche est identique à celle du cours correspondant jusqu'à l'équation 3-2.21. Il nous reste à satisfaire la condition initiale $y(x, t = 0) = 2\sin(\frac{\pi x}{L})$ ce qui s'écrit qui s'écrit :

$$y(x,0) = 2\sin(\frac{\pi x}{L}) = \Sigma_{n=0}^{n=\infty} F_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) \tag{3-0.2}$$

Par unicité du développement d'une fonction continue en série de Fourier, il vient en identifiant directement :

$F_1 = 2$
$\forall n \neq 1, \quad F_n = 0$
Soit finalement :

$y(x,t) = 2\sin(\frac{2\pi x}{L})\cos(\frac{2a\pi t}{L})$