Corrections de la série d'exercices n°3

ex 9.1

On rappelle que l'équation de la chaleur ou équation de Laplace étudiée en cours se généralise en 2 dimensions par :

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \alpha\{\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2}\}$$

En régime stationnaire, les grandeurs ne dépendent pas du temps et l'équation devient

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

On utilise la méthode de séparations des variables comme dans l'exercice 8.1 en posant :

$$T(x, y) = T(x, y) = g(x)h(y).$$

En remplaçant dans l'équation du dessus on arrive à :

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = -\frac{h''(y)}{h(y)}$$

Le membre de gauche de cette équation dépend de x et celui de droite de y, or x et y sont deux variables indépendantes donc les rapports sont égaux à une même constante λ.

On étudie la forme des solutions selon le signe de λ.
Supposons $\lambda > 0$, on pose alors $\lambda = d^2$ et on résout $\frac{g''(x)}{g(x)} = d^2$.
La solution est de la forme $g(x) = A\cosh(dx) + B\sinh(dx)$.
On utilise les conditions aux limites.
$\forall y \in [0, a] \quad T(x = 0, y) = g(0)h(y) = 0$ donc $g(0) = 0$ c'est-à-dire A=0.
Ensuite, $\forall y \in [0, a] \quad T(x = b, y) = g(b)h(y) = 0$ donc $g(b) = 0$ c'est-à-dire $B\sinh(db) = 0$. On doit donc avoir B=0 ce qui ne ce peux pas car alors g=0 et T=0. Or la fonction nulle n'est pas solution à cause des conditions aux bords supérieur et inférieur. Donc en en déduit que $\lambda \leq 0$
En fait, on exclut immédiatement le cas où la constante est nulle car alors les fonctions g(x) et h(y) seraient des fonctions linéaires et si g(x) est linéaire, comme elle est nulle en 0 et en a , alors g(x) est nulle. Donc il nous reste à traiter $\lambda < 0$, on pose alors $\lambda = -d^2$
La solution est de la forme $g(x) = A\cos(dx) + B\sin(dx)$.
On utilise les conditions aux limites pour déterminer A et B.

$\forall y \in [0, a] \quad T(x = 0, y) = g(0)h(y) = 0$ donc $g(0) = 0$ c'est-à-dire A=0.
Ensuite $\forall y \in [0, a] \quad T(x = b, y) = g(b)h(y) = 0$ donc $g(b) = 0$ c'est-à-dire $B\sin(db) = 0$. On ne peut pas avoir B=0 (ce qui conduirait à la solution nulle) donc il existe un entier n tel que

$db = n\pi$. Ce qui s'écrit $d = \frac{n\pi}{b}$. On a une famille de solutions possible pour g de la forme :

$g_n(x) = B_n \sin(\frac{n\pi x}{b})$

On résout ensuite l'équation de la fonction h, connaisssant les valeurs possibles de la constante.

$h_n(y) = C_n \cosh(\frac{n\pi y}{b}) + D_n \sinh(\frac{n\pi y}{b})$

D'où une famille de solution $T_n(x, y)$ de la forme :

$T_n(x, y) = g_n(x)h_n(y)$

Toute combinaison linéaire de ces fonctions est solution d'où l'expression générale de T(x) :

$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi x}{b})(C_n \cosh(\frac{n\pi y}{b}) + D_n \sinh(\frac{n\pi y}{b}))$

On utilise les conditions aux limites en y=0

$\forall x \in [0, b] \quad T(x, y = 0) = T1 = 20 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)h_n(0)$

Soit :

$T1 = 20 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi x}{b})(C_n)$

On pose $E_n = C_n B_n$

La somme ci-dessus s'écrit :

$\forall x \in [0, b] \quad T1 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin(\frac{n\pi x}{b})$

On reconnaît le développement en série de Fourier de la fonction impaire de période 2b qui vaut T1 sur [0,b] et on a l'expression de son coefficient de Fourier.

$$E_n = 2\frac{2}{2b}\int_{x=0}^{x=b} T1\sin(\frac{n\pi x}{b})dx$$

Soit : $E_n = \frac{2T1(1-(-1)^n)}{n\pi}$. Seuls les termes correspondant à n impair sont non nuls

Enfin, on utilise le dernier bord pour déterminer les D_n

$\forall x \in [0,b] \quad T(x,y=a) = T1 = g(x)h(a)$

$T1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi x}{b})(C_n \cosh(\frac{n\pi a}{b}) + D_n \sinh(\frac{n\pi a}{b}))$

Les $E_n = C_n B_n$ on déjà été déterminés.

On pose $F_n = (E_n \cosh(\frac{n\pi a}{b}) + B_n D_n \sinh(\frac{n\pi a}{b}))$, alors l'expression ci-dessus s'écrit :

$T1 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(\frac{n\pi x}{b})$ On reconnaît le développement en série de Fourier de la fonction impaire de période 2b qui vaut T1 sur [0,b] et on a l'expression de son coefficient de Fourier. Finalement $F_n = \frac{2T1(1-(-1)^n)}{n\pi}$. Seuls les termes correspondant à n impair sont non nuls

D'où $B_{2p+1}D_{2p+1} = \frac{\frac{4T1}{(2p+1)\pi}[1-\cosh(\frac{(2p+1)\pi a}{b})]}{\sinh(\frac{(2p+1)\pi a}{b})}$

Et $E_{2p+1} = \frac{4T1}{(2p+1)\pi}$

Et finalement :

$$T(x,y) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{4T1}{(2p+1)\pi} \sin(\frac{(2p+1)\pi x}{b})[\cosh(\frac{(2p+1)\pi y}{b}) + \frac{[1-\cosh(\frac{(2p+1)\pi a}{b})]}{\sinh(\frac{(2p+1)\pi a}{b})} \sinh(\frac{(2p+1)\pi a}{b})]$$