Corrections série d'exercices n°3

ex 6.1

$f_(x)$ est la fonction presqu'impaire, c'est-à dire impaire sauf en des point isolés $(f(0) \neq 0)$ dont le graphe est donné ci-dessous,. Elle est périodique et de période 2Π.

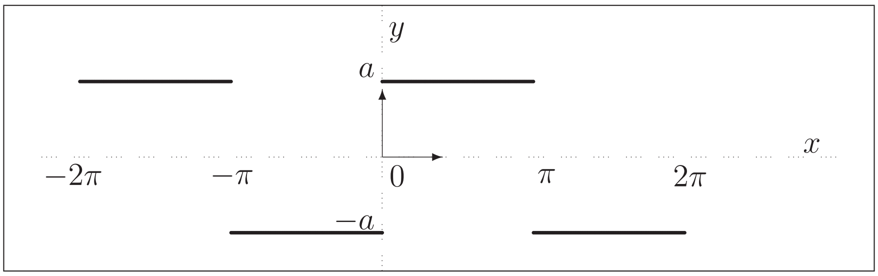

FIG. 2-0.4 – Représentation de la fonction f de l'ex 9.3

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{x=2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}[a\pi - a\pi] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{x=0}^{x=2\pi} f(x) \cos(nx)dx$$
$$a_n = \frac{2}{2\pi}\{\int_{x=0}^{x=\pi} a\cos(nx)dx + \int_{x=\pi}^{x=2\pi} -a\cos(nx)dx\} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{x=0}^{x=2\pi} f(x) \sin(nx)dx$$
$$b_n = \frac{2}{2\pi}\{\int_{x=0}^{x=\pi} a\sin(nx)dx + \int_{x=\pi}^{x=2\pi} -a\sin(nx)dx\}$$

$$b_n = \frac{4}{2\pi} \int_{x=0}^{x=\pi} a\sin(nx)dx = \frac{2a}{\pi}[\frac{-\cos(nx)}{n}]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2a}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}$$

Si n est pair, $n = 2p$, alors $b_{2p} = 0$

Si n est impair, $n = 2p + 1$, alors $b_{2p+1} = \frac{4a}{\pi}\frac{1}{2p+1}$

Finalement :

$f(x) = \frac{4a}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}$

On remarque que cette expression n'est valable qu'aux points où f est continue, c'est-à-dire pas en 0, π etc...

ex 6.2

$g(x) = f(x).e^{ixk_0}$ avec $k_0 \in \mathbb{R}$

Alors :

$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ixk_0}e^{-ikx}dx$

$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i(k-k_0)x}dx = \widehat{f}(k - k_0)$

$g(x) = f(cx)$

Alors :

$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{\mathbb{R}} f(cx)e^{-ikx}dx$

On fait le changement de variable u=cx en distinguant, à cause des bornes, c>0 de c<0.

Si c>0, alors $\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-ik\frac{u}{c}}\frac{1}{c}du = \frac{1}{c}\widehat{f}(\frac{k}{c})$

Si c<0, alors $\widehat{g}(k) = \frac{-1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-ik\frac{u}{c}}\frac{1}{c}du = -\frac{1}{c}\widehat{f}(\frac{k}{c})$

Si f est paire, f(-x)=f(x) et en remplaçant dans l'expression de $\widehat{g}(k)$ pour $c = -1$, on a : $\widehat{g}(k) = \widehat{g}(-k) = \widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$, donc la transformée de f est paire

Si f est impaire, f(-x)=-f(x) et en remplaçant dans l'expression de $\widehat{g}(k)$ pour $c = -1$, on a : $\widehat{g}(k) = -\widehat{g}(-k) = -\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$, donc la transformée de f est impaire ;

f est sa transformée sont de même parité.

Transformée de Fourier de la dérivée première de f.

$\widehat{f'}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-ikx}dx$

On intègre par parties :

$\widehat{f'}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\{[f(x)e^{-ikx}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}}(-ik)f(x)e^{-ikx}dx\}$

$\widehat{f'}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}(ik) \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}dx = (ik)\widehat{f}(k)$

car f est de carré sommable donc nulle à l'infini.

On procède de la même façon pour étendre ce résultat à la dérivée d'ordre n de f.

Supposons que pour tout p<N on ait : $\widehat{f^{(p)}}(k) = (ik)^p\widehat{f}(k)$

Alors :

$\widehat{f^{(N)}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(N)}(x)e^{-ikx}$

On intègre par parties :

$\widehat{f^{(N)}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\{[f^{(N-1)}(x)e^{-ikx}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}}(-ik)f^{(N-1)}(x)e^{-ikx}dx\}$

$\widehat{f^{(N)}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}(ik) \int_{\mathbb{R}} f^{(N-1)}(x)e^{-ikx}dx = (ik)\widehat{f^{(N-1)}}(k)$

car $f^{(N-1)}$ est de carré sommable donc nulle à l'infini.

De plus $\widehat{f^{(N-1)}}(k) = (ik)^{N-1}\widehat{f}(k)$

Donc on aura finalement :

$\widehat{f^{(N)}}(k) = (ik)^N \widehat{f}(k)$

par récurrence, le résultat est vrai pour tout n.