Corrections série d'exercices n°2

ex 5.1

La fonction étudiée est rendue périodique et est décrite dans le graphe ci dessous.
Les coefficients du développement en série trigonométrique se calculent en utilisant les définitions et en remarquant que la fonction est paire.

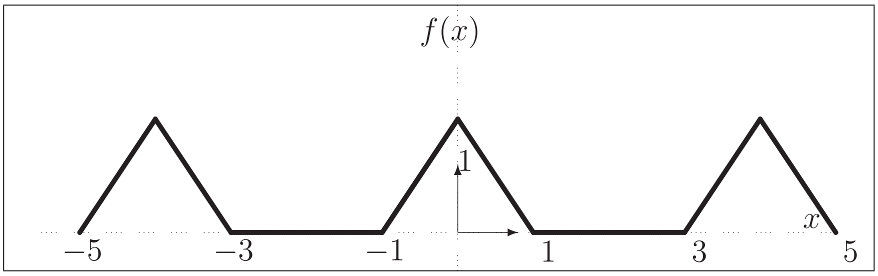

FIG. 2-0.3 – Représentation de la fonction f

$\forall n, \quad b_n = 0$

On calcule donc seulement les a_n

$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-3}^{1} f(x)dx = \frac{1}{4}\{\int_{-1}^{0}(1+x)dx + \int_{0}^{1}(1-x)dx\}$

$a_0 = \frac{2}{4}\int_{-1}^{0}(1+x)dx = \frac{1}{4}$

pour $\quad n > 0, \quad a_n = \frac{1}{4}\int_{-3}^{1} f(x)\cos\frac{2\Pi n}{4}dx = \frac{2}{4}\int_{-1}^{0}(1+x)\cos\frac{\Pi n}{2}dx$

On intègre par partie.

$pour \quad n > 0, \quad a_n = \frac{1}{2}\{[(1+x)\frac{\sin\frac{n\Pi x}{2}}{\frac{n\Pi}{2}}]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{\sin\frac{n\Pi x}{2}}{\frac{n\Pi}{2}} dx\}$
$a_n = \frac{1}{2}[\frac{-\cos\frac{n\Pi}{2}}{(\frac{n\Pi x}{2})^2}]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\{\frac{4}{n^2\Pi^2}[1-\cos\frac{n\Pi}{2}]\}$

Si n est impair, c'est-à-dire n=2p+1, alors $a_n = a_{2p+1}$, et $\cos(\frac{(2p+1)\Pi}{2}) = 0$

D'où $a_{2p+1} = \frac{2}{(2p+1)^2\Pi^2}$

Si n est pair,

- soit n=4p, alors $a_n = a_{4p} = 0$,
- sinon, si n=4p+2, alors $a_n = a_{4p+2} = \frac{4}{(4p+2)^2\Pi^2}\frac{2}{2} = \frac{4}{(4p+2)^2\Pi^2}$

ex 5.2

La fonction étudiée est une gaussienne qui peut être normalisée en prenant A fonction de a tel $\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(x)\|^2 dx = 1$.
On calcule sa transformée de Fourier.
$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{A}{\sqrt{2\Pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{(-ax^2-ikx)}dx$
$\widehat{f}(k) = \frac{A}{\sqrt{2\Pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{(-a(x+\frac{ik}{2a})^2-\frac{k^2}{4a})}dx$
$\widehat{f}(k) = \frac{A}{\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{(-a(x+\frac{ik}{2a})^2)}dx = \frac{A}{\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{k^2}{4a}}\sqrt{\frac{\Pi}{a}} = \frac{A}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{k^2}{4a}}$

$\widehat{f}(k)\frac{A}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{k^2}{4a}}$
La transformeée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne.

σ, qui est un indicateur de la largeur de la gaussienne vérifie

$f(\frac{\sigma}{2}) = Ae^{(-a\frac{\sigma^2}{4})} = \frac{f(0)}{e} = \frac{A}{e} = Ae^{-1} \quad \Rightarrow \quad -a\frac{\sigma^2}{4} = -1 \quad \Rightarrow$
$\sigma = \frac{2}{\sqrt{a}}$
Ω vérifie $\widehat{f}(\frac{\Omega}{2}) = \frac{A}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{(\frac{\Omega}{2})^2}{4a}} = \frac{\widehat{f}(0)}{e} = \frac{A}{\sqrt{2ae}} = \frac{A}{\sqrt{2a}}e^{-1}$
$\Rightarrow \quad -\frac{(\frac{\Omega}{2})^2}{4a} = -1 \quad \Rightarrow \quad \Omega = 4\sqrt{a}$

On remarque alors la relation $\Omega\sigma = 8 = constante$. La transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne dont la largeur est inversement proportionnelle à celle de la gaussienne initiale. Plus la fonction initiale dans l'espace des x est resserrée, plus sa transformée est large.