Chapitre 5

Exercices semaine 2

Série d'exercices n°1

ex 4.1

Soit la fonction f de période Π définie sur $[0; \quad \Pi[$ par $f(x) = \sin(x)$.

- Donner, sur $[0; \quad \Pi[$, le développement de f en série de sinus (on prolonge *f(x)* par $f_i(x)$ fonction périodique de période 2Π et impaire).
- Donner, sur $[0; \quad \Pi[$, le développement de f en série de cosinus (on prolonge $f(x)$ par $f_p(x)$ fonction périodique de période 2Π et paire).
- Donner, sur $[0; \quad \Pi[$,le développement de f en série d'exponentielles.

- Vérifier que $a_0 = c_0$.

- Vérifier que $a_n = c_n + c_{-n}$.

ex 4.2

Soit la fonction f définie sur $]-\pi; \quad \pi[$ par $f(x) = |x|$.

- Donner le développement en série de Fourier complexe de la fonction f.

- Déduire du développement de f une expression de $\frac{\Pi^2}{8}$ sous forme de série entière.

ex 4.3

Soit la fonction périodique de période 2π définie sur $[0; \quad 2\Pi[$ par $f(x) = x$. Tracer le graphe de f. Développer f en série trigonométrique.

Série d'exercices n°2

ex 5.1

Soit la fonction f périodique de période 4 définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si x } \in [-2, -1[\\ f(x) = 1 + x & \text{si x } \in [-1, 0[\\ f(x) = 1 - x & \text{si x } \in [0, 1[\\ f(x) = 0 & \text{si x } \in [1, 2[\end{cases}$$

- Tracer la courbe représentative de f sur $[-2, 5]$

- Calculer les coefficients a_n et b_n du développement de f

ex 5.2

- Donner l'expression de la transformée de Fourier de la fonction : $f(x) = Aexp(-ax^2)$ avec A complexe et a réel positif. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\Pi}{a}}$
- Calculer la largeur $\sigma = 2x$ avec x tel que $f(x) = \frac{f(0)}{e}$.
- Calculer la largeur $\Omega = 2k$ avec k tel que $\widehat{f}(k) = \frac{\widehat{f}(0)}{e}$.
- En déduire la relation entre Ω et σ

Série d'exercices n°3

ex 6.1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la fonction périodique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = a & \text{si x } \in [0, \pi[\\ f(x) = -a & \text{si x } \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

- Tracer la courbe représentative de f sur $[-2\pi, 2\pi]$

- Calculer les coefficients a_n et b_n du développement de f

ex 6.2

Soit $f(x)$ une fonction et sa transformée de Fourier $\widehat{f}(k)$. Calculez, en fonction de celle de f, la transformée de Fourier $\widehat{g}(k)$ de la fonction $g(x)$ dans les cas suivants :

- $g(x) = f(x).e^{ixk_0}$ avec $k_0 \in \mathbb{R}$
- $g(x) = f(cx)$ avec $c \in \mathbb{R}$ En déduire que f et sa transformée ont la même parité.
- Calculer la transformée de Fourier de la dérivée première de f en fonction de la transformée de Fourier de f. On écrira l'expression de la transformée de Fourier de la dérivée première de f et on utilisera une intégration par parties.

- Puis procéder par récurrence et monter que $\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \widehat{f}(k)$

Corrections série d'exercices n°1

ex 4.1

$f_i(x) = sin(x)$ est impaire, périodique de période 2Π et égale à f sur $[0;\quad \Pi]$. Le développement de f_i en série de sinus est immédiat : $f_i(x) = sin(x)$. C'est-à-dire $b_1 = 1$ et pour n>1, $b_n = 0$. Comme sur $[0;\quad \Pi]$, $\quad f(x) = f_i(x), f$ admet le même développement que f_i sur cet intervalle.

$f_p(x)$ est la fonction positive et paire dont le graphe est donné ci-dessous. Elle est périodique et de période Π.

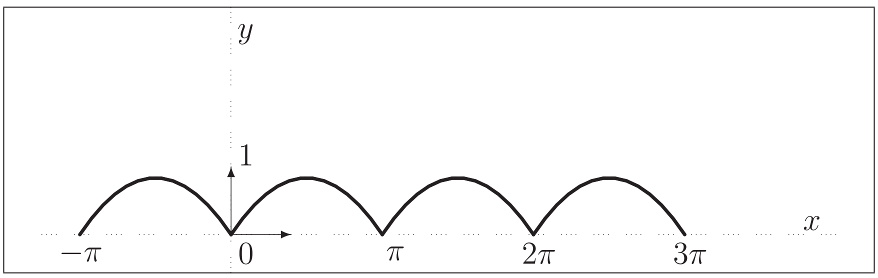

FIG. 2-0.1 – Représentation de la fonction f_p

Pour calculer a_0, on prend $x_0 = 0$ pour simplifier l'intégration.
$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{x=0}^{x=\pi} \sin(x)dx = \frac{1}{\pi}[-\cos(x)]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(-(-1) + 1) = \frac{2}{\pi}$

Pour calculer b_n, comme la fonction est paire, on sait que l'on doit avoir 0. Cependant, cela se démontre en prenant un intervalle d'intégration centré sur 0, c'est-à-dire en prenant $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ pour simplifier l'intégration.

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} |\sin(x)| \sin k_n x dx = \frac{2}{\pi}\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin(x) \sin k_n x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \sin k_n x dx\}$

Or la fonction $\sin k_n x$ et aussi impaire d'où en faisant le changement de variable $u = -x$ dans la première intégrale :

$b_n = \frac{2}{\pi}\{\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(u)(-\sin k_n u)(-du) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \sin k_n x dx\}$

$b_n = \frac{2}{\pi}\{\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(u)(\sin k_n u)(du) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \sin k_n x dx\} = 0$

Enfin, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} |\sin(x)| \cos k_n x dx$

$|\sin(x)|$ comme $\cos k_n x$ est paire d'où, par produit une fonction paire à intégrer :

$a_n = \frac{4}{\pi}\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(k_n x) dx$

$k_n = \frac{2n\pi}{\pi} = 2n$, De plus, on utilise la relation ci-dessous :

$\sin x \cos 2nx = \frac{1}{2}\{\sin(x-2nx)+\sin(x+2nx)\} = \frac{-\sin(2n-1)x+\sin(2n+1)x}{2}$

D'où :

$a_n = \frac{2}{\pi}\{[\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}}\} = \frac{2}{\pi}\{\frac{-1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\} = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}$

Le développement de f en séries trigonométriques est donc :

$f(x) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)} \cos 2nx$

On calcule les c_n en utilisant la formule du cours pour c_n et la formule d'Euler :
$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{x=0}^{x=\pi}\sin(x)e^{-2inx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{x=0}^{x=\pi}(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})e^{-2inx}dx$
$c_n = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{\pi} e^{i(1-2n)x} - e^{-i(1+2n)x} = \frac{1}{2i\pi}[\frac{e^{i(1-2n)x}}{i(1-2n)} - \frac{e^{-i(1+2n)x}}{-i(1+2n)}]_0^{\pi}$
$c_n = \frac{-1}{2\pi}[\frac{-2}{1-2n} + \frac{-1-1}{1+2n}] = \frac{-2}{\pi(4n^2-1)}$

On a $c_0 = \frac{2}{\pi} = a_0$ Le développement de f en série d'exponentielles est donc :
$f(x) = \frac{2}{\pi}\{1 - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2inx}}{(4n^2-1)}\}$
D'autre part, $c_n + c_{-n} = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)} = a_n$

ex 4.2

La fonction étudiée est paire. On la prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction périodique de période 2Π. On applique les définitions du cours pour trouver le développement en série d'exponentielle de cette fonction prolongée :
$c_n = \frac{1}{2\Pi}\int_{-\Pi}^{\Pi} f(x)e^{-ik_nx}dx$ Soit :
$c_0 = \frac{1}{2\Pi}\int_{-\Pi}^{\Pi}|x|dx = \frac{1}{\Pi}\int_0^{\Pi} xdx = \frac{\Pi}{2}$
D'autre part :
$c_n = \frac{1}{2\Pi}\{\int_{-\Pi}^{0} -xe^{-inx}dx + \int_0^{\Pi} xe^{-inx}dx\} = \frac{1}{2\Pi}\{[-\frac{x}{-in}e^{-inx}]_{-\Pi}^{0} - \int_{-\Pi}^{0}\frac{-1}{-in}e^{-inx}dx + [\frac{x}{-in}e^{-inx}]_0^{\Pi} - \int_0^{\Pi}\frac{1}{-in}e^{-inx}dx\} = \frac{(-1)^n-1}{\Pi n^2}$
Si n est pair, c'est-à-dire n=2p, alors $c_n = c_{2p} = 0$

Si n est impair, c'est-à-dire n=2p+1, alors $c_n = c_{2p+1} = \frac{-2}{\Pi(2p+1)^2}$
D'où, en remarquant que $c_{2p+1} = c_{-(2p+1)}$, le développement suivant pour f :
$\forall x \in]-\Pi; \quad \Pi[$,
$f(x) = \frac{\Pi}{2} - 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{(2p+1)x} + e^{-(2p+1)x}}{\Pi(2p+1)^2} = \frac{\Pi}{2} - 4\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{\Pi(2p+1)^2}$
Or $f(0) = 0 = \frac{\Pi}{2} - 4\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos 0}{\Pi(2p+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Pi^2}{8} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$

ex 4.3

La fonction étudiée est périodique de période 2π et est décrite dans le graphe ci dessous. Les coefficients du développement en

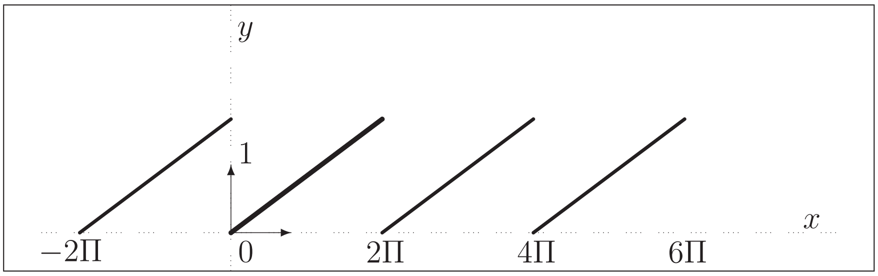

FIG. 2-0.2 – Représentation de la fonction périodique issue de f

série trigonométrique se calculent en utilisant les définitions soit :
$a_0 = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} x dx = \Pi$

$a_n = \frac{2}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} x \cos nx dx$
$a_n = \frac{1}{\Pi}\{[x\frac{\sin nx}{n}]_0^{2\Pi} - \int_0^{2\Pi} \frac{1}{n}\sin nx dx\} = 0$
$b_n = \frac{2}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} x \sin nx dx$
$b_n = \frac{1}{\Pi}\{[-x\frac{\cos nx}{n}]_0^{2\Pi} - \int_0^{2\Pi} \frac{-1}{n}\cos nx dx\}$

Soit $b_n = \frac{-2}{n}$

D'où le développement de f :

$\forall x \in]0; \quad 2\Pi[,$

$f(x) = \Pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$