Corrections série d'exercices n°3

ex 3.1

$(2-3i)^2(1+i) = 7-17i \quad ;$
$\frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i}\frac{1+i}{1+i} = \frac{1+3i}{2}$

ex 3.2

$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib}\frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = (\frac{\bar{z}}{|z|^2})$
$z = \frac{1+ik}{2k+i(k^2-1)} = \frac{k}{k^2+1} + i\frac{1}{k^2+1}$ sous forme a+ib.

ex 3.3

On utilise la notation trigonométrique
$(1-i\sqrt{3})^{10} = (2(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}))^{10} = (2(\cos\frac{-\Pi}{3}+i\sin\frac{-\Pi}{3}))^{10} = (2e^{i\frac{-\Pi}{3}})^{10}$.
$(2e^{i\frac{-\Pi}{3}})^{10} = 2^{10}e^{i\frac{-10\Pi}{3}} = 1024e^{i\frac{2\Pi}{3}} = 1024(\cos\frac{2\Pi}{3} + i\sin\frac{2\Pi}{3}) = 1024(\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}) = -512 + 512i\sqrt{3}$

ex 3.4

$z = 2 \quad |z| = 2 \quad Arg(z) = 0$
$z = -4i \quad |z| = 4 \quad Arg(z) = \frac{3\Pi}{2}$
$z = (\frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{i}{2})^3$ On calcule les module et argument de $z' = \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{i}{2}$

$|z'| = \frac{\sqrt{14}}{2} \quad Arg(z') = \arctan(\frac{1}{\sqrt{13}}) \quad puis \quad on \quad a \quad |z| = |z'|^3 = \frac{14\sqrt{14}}{8}$
$soit|z| = \frac{7\sqrt{14}}{4} \quad et \quad Arg(z) = 3Arg(z') = 3\arctan(\frac{1}{\sqrt{13}})$

ex 3.5

Soit z et z' les deux nombres complexes de produit 1 et de somme -1.
Alors $z + z' = -1$ et $zz' = 1$, soit en combinant ces deux equations, z et z' sont solution de $z(-1-z) = 1$ c'est-à-dire $z^2+z+1 = 0$.
Résolution : $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$ Les racines sont $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad et \quad z' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

ex 3.6

$z^4 + z^2 + 1 = 0$. On pose $u = z^2$.
On résout $u^2+u+1 = 0$ et on arrive à $u = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$ d'où les solutions $z = \pm e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$.