Chapitre 4

Exercices semaine 1

Série d'exercices n°1

ex 1.1

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall z = (a, b) \in \mathbb{C}$, prouver que $\lambda z = (\lambda a, \lambda b)$

ex 1.2

$z = (0, 1)$, Calculez z^2 et z^3

$z' = (1, 1)$, Calculez $z\overline{z'} - z^2$

ex 1.3

Placer dans le plan les points suivants :

- M_1 correspondant à $z_1 = (1, 2)$

- M_2 correspondant à $z_2 = (-1, 2)$
- M_3 correspondant à $z_3 = (1, -2)$
- M_4 correspondant à $z_4 = (0, 1)$

ex 1.4

- Calculez $(\cos \frac{\Pi}{5} + i \sin \frac{\Pi}{5})^5$
- Calculez $(\cos \frac{\Pi}{4} + i \sin \frac{\Pi}{4})^6$

ex 1.5

Déterminez les arguments et le modules des nombres complexes :

- $z = 2i$;
- $z = \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}$;
- $z = \sqrt{3}(\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3})$;

ex 1.6

Soit $z = \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}, \quad \theta \in [-\Pi; \Pi[$, Montrez que z est imaginaire pur ou nul et exprimez $|z|$ en fonction de $\frac{\theta}{2}$.

Série d'exercices n°2

ex 2.1

Prouver que $z = (a, b) = a + ib$

ex 2.2

Soit $z = (1, 2)$, donner l'écriture de z en utilisant i (notation complexe)
Calculez $z' = -1.z$ et $z'' = z^2$
Soit $t = 1 - 2i$, Calculez $\overline{z} - t$.

ex 2.3

Soit A le point dans le plan représentant le nombre complexe i.

1. Rappelez la valeur de i. Que vaut i^2 ? Que vaut $-i$?
2. Placez le point A dans le plan, placez le point M représentant $z = 1 + 2i$
3. Calculez $z' = -1.i$, placer son point B
4. Calculez $z'' = z' - z$.

ex 2.4

Calculez $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$

ex 2.5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - 4z + 3 = 0$.

ex 2.6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$.

Série d'exercices n°3

ex 3.1

Calculez $(2-3i)^2(1+i)$; Calculez $\frac{2+i}{1-i}$

ex 3.2

Soit $z = a + ib$, exprimez $\frac{1}{z}$ en fonction de a, b et i.
Soit k $\in \mathbb{R}$, et $z = \frac{1+ik}{2k+i(k^2-1)}$. Ecrivez z sous forme a+ib.

ex 3.3

Calculez $(1-i\sqrt{3})^{10}$

ex 3.4

Déterminez les arguments et le modules des nombres complexes :

- $z = 2$;

- $z = -4i$;
- $z = (\frac{\sqrt{13}}{2} + i\frac{1}{2})^3$

ex 3.5

Soit deux nombres complexes de produit 1 et de somme -1. Montrer qu'ils sont solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ et la résoudre dans $\mathbb{C}$.

ex 3.6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^4 + z^2 + 1 = 0.$

Corrections de la série d'exercices n°1

ex 1.1

Posons $z = (a, b), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad donc \quad \lambda = (\lambda, 0) \quad alors \quad \lambda z = (\lambda a - 0b, \lambda b + a0) = (\lambda a, \lambda b)$

ex 1.2

$z = (0, 1); \quad z^2 = (0 * 0 - 1 * 1, 0 * 1 + 1 * 0) = (-1, 0) = -1$

$z^3 = (-1, 0)(0, 1) = (-1 * 0 - 0 * 1, -1 * 1 + 0 * 0)(0, -1) = -i$

$z' = (1, 1) \quad \overline{z'} = (1, -1)$

$z\overline{z'} - z^2 = (0, 1)(1, -1) - (-1, 0) = (1, 1) + (1, 0) = (2, 1)$

ex 1.4

On utilise la notation trigonométrique

$(\cos \frac{\Pi}{5} + i \sin \frac{\Pi}{5})^5 = (e^{i\frac{\Pi}{5}})^5 = e^{i\frac{5\Pi}{5}} = e^{i\Pi} = -1$

$(\cos \frac{\Pi}{4} + i \sin \frac{\Pi}{4})^6 = (e^{i\frac{\Pi}{4}})^6 = e^{i\frac{6\Pi}{4}} = e^{i\frac{3\Pi}{2}} = \cos \frac{3\Pi}{2} + i \sin \frac{3\Pi}{2} = 0 + i * -1 = -i\,;$

ex 1.5

$z = 2i; \quad |z| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

$arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad car \quad \arctan(arg(z)) = \frac{2}{0} = +\infty$

$z = \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4})$

$|z| = \frac{1}{2} \quad Arg(z) = -\frac{\pi}{4}$

$z = \sqrt{3}(\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{2}}{3}) \quad |z| = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}^2 + \frac{\sqrt{6}}{3}^2} = 1 \quad Arg(z) = \arctan(\frac{\sqrt{2}}{1}) = \arctan(\sqrt{2})$;

ex 1.6

Le but est d'avoir un dénominateur réel, on multiplie le dénominateur par son conjugué pour avoir un nombre réel au dénominateur.

$z = \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}\frac{1+e^{-i\theta}}{1+e^{-i\theta}}$

$z = \frac{-2i\sin\theta}{2+2\cos\theta} = \frac{-i\sin\theta}{1+1\cos\theta}$

$$z = \frac{-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}$$

$$z = \frac{-i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = -i\tan\frac{\theta}{2}$$
$$|z| = |\tan\frac{\theta}{2}|$$

ex 1.3