Banque d'exercices de mathématiques pour le programme 2003-2014 des oraux CCP-MP

http://pedagotech.inp-toulouse.fr/130701

Elaboré par André ANTIBI

avec le concours de Ludovic d'ESTAMPES

et de l'équipe des interrogateurs de l'oral du Concours MP

Éditions des Ressources Pédagogiques Ouvertes de l'INP Toulouse

Table des matières

I - Introduction 5

1. Le mot des éditeurs 5
2. Paternité de l'oeuvre 6
3. Préface d'André ANTIBI 7
4. Préface de Ludovic d'ESTAMPES 7
5. Rapport statistique sur la banque publique de l'épreuve orale de mathématiques des CCP, filière MP 8

5.1. Introduction 8
5.2. Quelques conclusions générales 8
5.3. Quelques conclusions relatives aux parties du programme 9
5.4. Quelques remarques sur la relation avec le système d'évaluation par contrat de confiance 10
5.5. Références et webographie 11

II - ANALYSE 12

1. Exercices 1 à 10 12

1.1. Exercice : AN01 12
1.2. Exercice : AN02 12
1.3. Exercice : AN03 12
1.4. Exercice : AN04 13
1.5. Exercice : AN05 13
1.6. Exercice : AN06 13
1.7. Exercice : AN07 13
1.8. Exercice : AN08 14
1.9. Exercice : AN09 14
1.10. Exercice : AN10 14

2. Exercices 11 à 20 14

2.1. Exercice : AN11 14
2.2. Exercice : AN12 14
2.3. Exercice : AN13 15
2.4. Exercice : AN14 15
2.5. Exercice : AN15 15
2.6. Exercice : AN16 15
2.7. Exercice : AN17 16
2.8. Exercice : AN18 16
2.9. Exercice : AN19 16
2.10. Exercice : AN20 16

3. Exercices 21 à 30 17

3.1. Exercice : AN21 17
3.2. Exercice : AN22 17
3.3. Exercice : AN23 17
3.4. Exercice : AN24 18
3.5. Exercice : AN25 18
3.6. Exercice : AN26 18
3.7. Exercice : AN27 18
3.8. Exercice : AN28 19
3.9. Exercice : AN29 19
3.10. Exercice : AN30 19

4. Exercices 31 à 40 19

4.1. Exercice : AN31 19
4.2. Exercice : AN32 19
4.3. Exercice : AN33 20
4.4. Exercice : AN34 20

4.5. Exercice : AN35 ... 20
4.6. Exercice : AN36 ... 20
4.7. Exercice : AN37 ... 20
4.8. Exercice : AN38 ... 21
4.9. Exercice : AN39 ... 21
4.10. Exercice : AN40 ... 21

5. Exercices 41 à 50 ... 21

5.1. Exercice : AN41 ... 21
5.2. Exercice : AN42 ... 21
5.3. Exercice : AN43 ... 22
5.4. Exercice : AN44 ... 22
5.5. Exercice : AN45 ... 22
5.6. Exercice : AN46 ... 22
5.7. Exercice : AN47 ... 22
5.8. Exercice : AN48 ... 23
5.9. Exercice : AN49 ... 23
5.10. Exercice : AN50 ... 23

6. Exercices 51 à 60 ... 23

6.1. Exercice : AN51 ... 23
6.2. Exercice : AN52 ... 24
6.3. Exercice : AN53 ... 24
6.4. Exercice : AN54 ... 24
6.5. Exercice : AN55 ... 24
6.6. Exercice : AN56 ... 25
6.7. Exercice : AN57 ... 25
6.8. Exercice : AN58 ... 25
6.9. Exercice : AN59 ... 26
6.10. Exercice : AN60 ... 26

III - ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE ... **27**

1. Exercices 1 à 10 ... 27

1.1. Exercice : AG01 ... 27
1.2. Exercice : AG02 ... 27
1.3. Exercice : AG03 ... 27
1.4. Exercice : AG04 ... 28
1.5. Exercice : AG05 ... 28
1.6. Exercice : AG06 ... 28
1.7. Exercice : AG07 ... 28
1.8. Exercice : AG08 ... 28
1.9. Exercice : AG09 ... 29
1.10. Exercice : AG10 ... 29

2. Exercices 11 à 20 ... 29

2.1. Exercice : AG11 ... 29
2.2. Exercice : AG12 ... 29
2.3. Exercice : AG13 ... 30
2.4. Exercice : AG14 ... 30
2.5. Exercice : AG15 ... 30
2.6. Exercice : AG16 ... 30
2.7. Exercice : AG17 ... 31
2.8. Exercice : AG18 ... 31
2.9. Exercice : AG19 ... 31
2.10. Exercice : AG20 ... 31

3. Exercices 21 à 30 ... 32

3.1. Exercice : AG21 ... 32
3.2. Exercice : AG22 ... 32
3.3. Exercice : AG23 ... 32
3.4. Exercice : AG24 ... 32
3.5. Exercice : AG25 ... 33
3.6. Exercice : AG26 ... 33
3.7. Exercice : AG27 ... 33
3.8. Exercice : AG28 ... 33
3.9. Exercice : AG29 ... 33
3.10. Exercice : AG30 ... 34

4. Exercices 31 à 40 ... 34

4.1. Exercice : AG31 ... 34
4.2. Exercice : AG32 ... 34
4.3. Exercice : AG33 ... 35
4.4. Exercice : AG34 ... 35
4.5. Exercice : AG35 ... 35
4.6. Exercice : AG36 ... 35
4.7. Exercice : AG37 ... 35
4.8. Exercice : AG38 ... 36
4.9. Exercice : AG39 ... 36
4.10. Exercice : AG40 ... 36

5. Exercices 41 à 50 37

5.1. Exercice : AG41 .... *37*
5.2. Exercice : AG42 .... *37*
5.3. Exercice : AG43 .... *37*
5.4. Exercice : AG44 .... *37*
5.5. Exercice : AG45 .... *38*
5.6. Exercice : AG46 .... *38*
5.7. Exercice : AG47 .... *38*
5.8. Exercice : AG48 .... *38*
5.9. Exercice : AG49 .... *39*
5.10. Exercice : AG50 .... *39*

6. Exercices 51 à 60 39

6.1. Exercice : AG51 .... *39*
6.2. Exercice : AG52 .... *39*
6.3. Exercice : AG53 .... *40*
6.4. Exercice : AG54 .... *40*
6.5. Exercice : AG55 .... *40*
6.6. Exercice : AG56 .... *41*
6.7. Exercice : AG57 .... *41*
6.8. Exercice : AG58 .... *41*
6.9. Exercice : AG59 .... *42*
6.10. Exercice : AG60 .... *42*

Introduction

I

Le mot des éditeurs	5
Paternité de l'oeuvre	6
Préface d'André ANTIBI	7
Préface de Ludovic d'ESTAMPES	7
Rapport statistique sur la banque publique de l'épreuve orale de mathématiques des CCP, filière MP	8

1. Le mot des éditeurs

Remarque

Cette banque d'exercices de mathématiques est le fruit d'un travail pédagogique réalisé en 2011 par l'équipe des examinateurs de l'oral de mathématiques du concours commun polytechnique sous la coordination du professeur André ANTIBI. Ce travail a été réalisé avec le concours actif de Ludovic d'ESTAMPES, alors président du concours MP dans le cadre duquel cet oral est organisé.

En tant que coordinatrice de l'oral de mathématique et président du concours MP, qui avons pris leur relais en 2013, nous tenons à remercier nos collègues pour ce travail et pour les efforts qu'ils ont réalisés pour nous le transmettre. L'actuelle équipe pédagogique a ainsi pu décider de s'appuyer sur cet important investissement et de le prolonger.

Nous remercions aussi l'INP Toulouse qui a validé cette ressource pédagogique numérique pour une publication sur sa *Pédago'Tech* sous la référence :

- A. Antibi, L. d'Estampes et interrogateurs, Banque d'exercices de mathématiques pour le programme 2003-2014 des oraux CCP-MP, *Éd. Ress. Pédag. Ouv. INPT* , *0701* (2013) 120 exercices.

Nous sommes à la disposition des organismes qui souhaiteraient publier cette ressource sur leur site avec leur charte graphique pour leur transmettre les sources, dans le cadre de la licence CC BY-NC-SA.

Les éditeurs :

Valérie Bellecave, coordinatrice des oraux de mathématiques de la filière MP

Olivier Thual, président de la filière MP du concours commun polytechnique

Conseil

La présente ressource pédagogique ne contient pas les corrigés des exercices. La licence CC BY-NC-SA de cette banque requiert que les énoncés et leurs corrigés doivent être publiés sous cette même licence.

Certains sites mettent à disposition des internautes des corrigés en conformité avec cette licence, comme par exemple le site " *Prépas Dupuy de Lôme* " à l'adresse suivante : *http://mp.cpgedupuydelome.fr/oraux.php* .

Les diffusions commerciales (e.g. AN (cf. AN.pdf) , AG (cf. AG.pdf)) n'engagent pas la responsabilité des auteurs de cette banque d'exercices.

2. Paternité de l'oeuvre

Texte légal

Cette banque est une ressource pédagogique originale dans la mesure où elle réunit une sélection d'exercices classiques ou spécifiquement conçus dans le but de couvrir, de manière équilibrée, le programme des classes préparatoires aux grandes écoles de la filière MP, en vigueur jusqu'au concours 2014. Avec l'accord de leurs auteurs, cette banque est distribuée sous une licence libre qui impose la reconnaissance de la paternité de l'oeuvre. Cette paternité doit mentionner les noms de toutes les personnes ayant participé à ce projet pédagogique :

- André ANTIBI
- Ludovic d'ESTAMPES

et

- Jean-Louis ARTIGUE
- Valérie BELLECAVE
- Pascale BERGER
- Jean-Pierre BOURGADE
- Sylvie CALMET
- Alain CALVEZ
- Dominique CLÉNET

- Jean-Jacques DAHAN
- Julien ESTEBAN
- Mathieu FRUCTUS
- Bruno HARINGTON
- Jean-Paul KELLER
- Marie-Françoise LALLEMAND
- Antoine LLUEL
- Jean-Paul LOGÉ
- Stéphane MOINIER
- Pierre-Luc MORIEN
- Vincent RAYSSIGUIER
- Serge RIGAL
- Alain WALBRON
- André WARIN

3. Préface d'André ANTIBI

Fondamental

Cette banque d'exercice est constituée de 120 énoncés, 60 d'analyse et 60 d'algèbre-géométrie. Elle a été élaborée comme banque publique pour l'oral de mathématiques 2012 du concours commun polytechnique, filière MP.

Lors de l'épreuve d'oral de mathématiques, les élèves ont deux exercices à résoudre. Le premier, noté sur 8 points, porte sur des notions fondamentales du programme. Il s'agit de questions de cours ou d'exercices d'applications classiques.

Précisions:

1. Lorsqu'il est demandé de « démontrer », l'élève doit faire une démonstration de la propriété indiquée, et ne pas se contenter de faire appel à un résultat direct de cours. Cette remarque concerne essentiellement les questions de cours.
2. Ces 120 énoncés recouvrent une grande partie du programme. L'étude d'une telle banque peut donc permettre aux candidats de mieux se préparer, en confiance, à l'oral bien sûr, mais aussi à l'écrit.

Je tiens à remercier l'ensemble des interrogateurs du concours MP pour leur contribution à l'établissement de cette banque et, plus particulièrement, Alain CALVEZ, Mathieu FRUCTUS, Bruno HARINGTON, Marie-Françoise LALLEMAND, Antoine LLUEL et Jean-Paul LOGÉ.

La contribution de Ludovic d'ESTAMPES a été très importante ; je l'en remercie profondément.

- André ANTIBI, coordonnateur de l'oral de mathématiques de la filière MP du concours commun polytechniques jusqu'en 2012.

4. Préface de Ludovic d'ESTAMPES

Fondamental

Afin de bien comprendre la raison de la mise en place d'une banque publique, un bref historique s'impose sur le déroulement des épreuves orales de mathématiques de la filière MP.

Cet oral très hétérogène dans sa forme (un, deux ou trois exercices ; des exercices trop courts, ou trop longs ou trop difficiles ;...) s'est grandement amélioré au fil des années.

Aujourd'hui, cet oral est homogène dans sa forme avec un exercice sur 8 points tiré d'une banque privée et un exercice sur 12 points propre à chaque examinateur. Les exercices ni trop longs, ni trop courts sont calibrés pour une préparation de 25 minutes environ et un passage au tableau de 25 minutes.

Nous aurions pu en rester là, mais ce progrès, dans les faits, s'est accompagné d'une plus grande inéquité entre candidats. En effet, la banque privée est devenue, malgré un renouvellement chaque année de plusieurs exercices, "semi-publique" et certains candidats se sont retrouvés mieux préparés à cet exercice sur 8 points que d'autres.

Rendre la banque publique n'a pas que l'avantage de gommer cette inégalité de traitement entre candidats. Entre autres, cela permet de travailler les notions fondamentales du programme. Cela permet également de diminuer le facteur chance (ou malchance) de cet oral.

Je tiens à faire remarquer que cette opportunité, nous avons pu la saisir grâce à la compétence de l'équipe en place, toujours prête à travailler et faire évoluer l'oral de ce concours, que ce soit André ANTIBI - le coordonnateur de l'oral de mathématiques dont le rôle a été essentiel dans l'élaboration de cette banque -, les examinateurs ou moi-même.

- Ludovic d'ESTAMPES, président de la filière MP du concours commun polytechniques jusqu'en 2012.

5. Rapport statistique sur la banque publique de l'épreuve orale de mathématiques des CCP, filière MP

André ANTIBI et Ludovic d'ESTAMPES, 2012

5.1. Introduction

Le document que nous présentons est un rapport de jury d'un type particulier, nouveau. En effet, il concerne une liste d'exercices « balayant » tout le programme de mathématiques de classes préparatoires MP, et dont les élèves avaient connaissance.

Il ne s'agit pas de nous substituer aux enseignants de ces classes, qui ont en charge la formation des élèves. Il s'agit pour nous de fournir un retour sur l'enseignement des mathématiques de ces classes et sur le travail et le niveau des candidats.

Cet échange entre collègues nous semble fructueux et de nature à améliorer l'enseignement en classes préparatoires, mais aussi dans les écoles d'ingénieurs qui peuvent ainsi disposer de renseignements utiles pour mieux s'adapter aux élèves de leurs écoles.

5.2. Quelques conclusions générales

N.B. : Il nous a semblé plus explicite de ramener les notes sur 8 à des notes sur 20, plus familières.

- Les notes sont analogues à la session 1 (13,75 de moyenne) et à la session 2 (13,38 de moyenne).
- Les moyennes des notes sont bonnes (moyenne générale de 13,67), mais pas excellentes, comme certains auraient pu s'y attendre. En effet, compte-tenu du grand nombre d'exercices, il ne suffit pas d'essayer de les mémoriser pour les restituer parfaitement.
- On peut noter que les moyennes des notes en algèbre-géométrie (14,2) est supérieure à celle des notes d'analyse (13,13).
- La valeur des écart-types en algèbre-géométrie (5,53) et en analyse (5,71) montrent clairement que les notes restent étalées. En d'autres termes, ce type d'évaluation permet de classer les candidats, mais dans ce cas, ce classement s'appuie essentiellement sur le travail et le niveau de compréhension des élèves.
- Comme l'indique le tableau 1 suivant, il n'y a pas de gros écarts dans les moyennes obtenues par les différents examinateurs. Un barème précis, pour chaque exercice, a été fourni. Lorsque la banque n'est pas publique, les écarts entre les moyennes obtenues par les différents examinateurs sont plus importants, malgré l'existence d'un barème.

Examinateurs	Moyenne	Écart-type	Examinateurs	Moyenne	Écart-type
Examinateur 1	13,27	5,58	Examinateur 12	12,71	6,14
Examinateur 2	15,17	5,13	Examinateur 13	13,43	5,36
Examinateur 3	12,78	5,78	Examinateur 14	14,21	4,72
Examinateur 4	13,94	4,98	Examinateur 15	12,91	5,66
Examinateur 5	14,24	4,29	Examinateur 16	13,79	5,92
Examinateur 6	13,99	6,32	Examinateur 17	12,82	5,41
Examinateur 7	13,19	5,69	Examinateur 18	14,67	5,71
Examinateur 8	13,14	6,77	Examinateur 19	14,33	5,11
Examinateur 9	14,09	4,62	Examinateur 20	13,46	5,42
Examinateur 10	13,32	5,41	Examinateur 21	12,78	6,21
Examinateur 11	12,9	6,08	Examinateur 22	14,77	5,28

Tableau 1 : Moyennes et écart-types par examinateur

5.3. Quelques conclusions relatives aux parties du programme

Nous avons regroupé les 120 exercices en sous-ensembles correspondants aux différentes parties du programme.

Plus précisément, nous avons fait le découpage suivant (voir le tableau 2 pour l'algèbre-géométrie et le tableau 3, page suivante, pour l'analyse).

Dans chacun de ces 28 domaines, la moyenne des notes est supérieure à 10/20, ainsi dans chacune de ces parties, les moyennes sont convenables. Ceci semble montrer que, en général, les étudiants n'ont pas fait d'impasses dans leurs préparations.

5.3.1. Algèbre-géométrie

Nom des domaines	Exercices associés	Moyenne	Écart-type
Polynômes et fractions rationnelles	AG1 à AG4	14,99	5,33
Algèbre linéaire	AG5 à AG10, AG12, AG14, AG15, AG58	15,8	4,65
Structures(groupes, anneaux, corps)	AG13, AG18 à AG20, AG36	13,58	5,37
Réductions des endomorphismes	AG21 à AG28	14,61	4,93
Espaces préhilbertiens	AG33 à AG35, AG37 à AG44	14,68	5,15
Construction de courbes planes	AG45, AG46, AG48 à AG51	12,27	5,55
Etude locale d'une courbe, repère de Frénet	AG47, AG52, AG53	10,03	6,69
Géométrie analytique	AG59, AG60	10,64	6,26
Polynômes d'endomorphismes	AG16, AG17	16,58	4,42
Quadriques	AG32, AG55	12,9	5,16
Nombre complexe et transformation du plan	AG57	15,86	5,14

Tableau 2 : Découpage pour la partie algèbre-géométrie

- Les connaissances de base en algèbre linéaire semblent particulièrement bien assimilées.
- Plus généralement, les résultats sont convenables en algèbre, même pour la partie « structures », qui peut paraître trop abstraite.
- En géométrie au contraire, les résultats sont moins bons. Cette situation vient probablement du fait que dès l'enseignement secondaire déjà, ce domaine d'enseignement n'est pas suffisamment pris en compte dans les programmes officiels.
- On a cru bon de séparer la construction des courbes planes et l'étude locale d'une courbe ; dans ce dernier domaine, les élèves éprouvent davantage de difficulté.

5.3.2. Analyse

Nom des domaines	Exercices associés	Moyenne	Écart-type
Suites numériques et fonctions numériques	AN1 à AN3, AN6 à AN9	13,17	5,47
Développements limités	AN4, AN5	15,54	4,37
Séries	AN10 à AN14	12,65	6,16
Suites de fonctions	AN15 à AN21	14,47	5,03
Séries de fonctions	AN22 à AN25	11,32	6,19
Séries entières	AN26 à AN30, AN32	13,21	5,76
Développement d'une fonction en série entière	AN31, AN33, AN34	13,75	5,65
Séries de Fourier	AN35 à AN37	13,21	5,62
Intégration d'une fonction d'une variable	AN38 à AN43	14,66	5,49
Intégrale double, intégrale curviligne	AG54, AN44, AN45	11,1	6,18
Équations différentielles du premier ordre	AN46	14,96	5,49
Équations différentielles du second ordre	AN47, AN49	10,82	6,42
Systèmes différentiels	AG29, AG30	13,79	4,37
Équations aux dérivées partielles	AN48	14,42	4,82
Fonctions de deux variables	AN50, AN51	11,03	5,98
Topologie	AG56, AN52 à AN60	13,06	5,53
Suites récurrentes	AG11, AG31	16,27	4,08

Tableau 3 : Découpage pour la partie analyse

- Parmi les domaines les moins bien réussis, dans deux d'entre eux les exercices nécessitent des connaissances de géométrie : « intégrale double et curviligne » et « fonctions de deux variables ».
- Les élèves rencontrent des difficultés concernant l'étude des équations différentielles du second ordre : variation des constantes, obtention d'une solution générale quand on connaît une solution particulière, ...
- Les élèves sont moins à l'aise pour manipuler des séries de fonctions que les suites de fonctions.
- Les résultats obtenus dans le domaine des séries entières et des développements en séries entières sont tout-à-fait analogues à ceux obtenus sur les développements en séries de Fourier.

5.4. Quelques remarques sur la relation avec le système d'évaluation par contrat de confiance

Ce système d'évaluation des élèves mis en pratique à la session 2012 est le système d'évaluation par contrat de confiance (EPCC). Ce système est utilisé par plus de 30000 enseignants en France, dans les contrôles de connaissance, tout au long de l'année. Mais cette fois, pour le concours CCP, le programme de révision est beaucoup plus important.

La mise en application de ce système est encouragé au plus haut niveau : circulaire de rentrée de la Direction Générale des Enseignements Scolaires (DGESCO) en 2011-2012 ; rapport de l'Assemblée Nationale de Jacques Grosperrin sur le socle commun. Un article a été consacré à ce sujet dans la revue de la Conférence aux Grandes Ecoles (CGE). André Antibi a été invité à faire une conférence plénière, le 4 octobre 2012, lors du colloque de Nantes de la CGE ([1]).

Les principaux avantages du système EPCC se retrouvent dans notre étude :

- Mis en confiance et guidés dans leurs révisions, les élèves travaillent davantage.
- Il y a une diminution sensible du facteur chance.
- Le travail est récompensé.

Signalons enfin que ce système ne permet pas à tous les élèves d'obtenir de très bonnes notes. Cela ressort clairement de notre étude. Les notes restent étalées.

5.5. Références et webographie

- [1] André ANTIBI (2012), La constante macabre, *Conférence plénière introductive* , *Congrès de Nantes de la CGE* , 3-5 octobre 2012, pp. 23-25
- [2] "Mouvement Contre La Constante Macabre" : *http://mclcm.free.fr/*

ANALYSE

I

Exercices 1 à 10	12
Exercices 11 à 20	14
Exercices 21 à 30	17
Exercices 31 à 40	19
Exercices 41 à 50	21
Exercices 51 à 60	23

1. Exercices 1 à 10

1.1. Exercice : AN01

Question

[Solution p]

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \sim v_n$. Démontrez que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminez le signe au voisinage de l'infini de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

1.2. Exercice : AN02

Question

[Solution p]

On considère dans $\mathbb{R}$ les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!} .$$

an02a

1. Démontrez que ces deux suites sont adjacentes.
2. On admet que $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$. Démontrez que e est irrationnel.

   Indication : on pourra raisonner par l'absurde et supposer que $e = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels.

1.3. Exercice : AN03

Question

[Solution p]

1. Pour une suite de réels (u_n) , énoncez le critère de Cauchy.
2. Soit f une fonction dérivable de $]0;1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que: $\forall x \in]0;1], |f'(x)| \leq 1$.

   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $U_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Démontrez, en utilisant le critère de Cauchy, que cette suite converge.

1.4. Exercice : AN04

Question

[Solution p]

1. Déterminez le développement limité à l'ordre 5 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{1-x}$.
2. Donnez, pour $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$, la valeur de $f^{(k)}(0)$.

1.5. Exercice : AN05

Question

[Solution p]

On pose $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(3-x)}$.

1. Décomposez $f(x)$ en éléments simples et déduisez-en les primitives de f sur l'intervalle $]3;+\infty[$.
2. Déterminez le développement en série entière en 0 de la fonction f et précisez le rayon de convergence.
3. Déterminez le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction f .

1.6. Exercice : AN06

Question

[Solution p]

1. Donnez l'idée de la démonstration de la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de fonctions.
2. On pose $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$ pour $x > -1$. Calculez $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.7. Exercice : AN07

Question

[Solution p]

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Donnez la définition d'une fonction convexe définie sur I , à valeurs réelles.
2. Soit f une fonction convexe de I dans $\mathbb{R}$. Démontrez la propriété suivante, où n désigne un entier supérieur ou égal à 3 :

   Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des nombres positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et si $x_1, x_2, \dots, x_n$ appartiennent à I , alors
   $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

   Indication : on pourra remarquer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \left(1 - \sum_{i=3}^{n} \lambda_i\right) \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{1 - \sum_{i=3}^{n} \lambda_i} + \sum_{i=3}^{n} \lambda_i x_i$.
3. Déduisez de ce qui précède, en utilisant la fonction $\ln$, que pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'inégalité :

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} .$$

an07b

1.8. Exercice : AN08

Question

[Solution p]

Soit f une fonction de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a;b]$. On suppose que f est dérivable sur $]a;b[$ sauf peut-être en un point x_0 de $]a;b[$.

1. Démontrez que si la fonction f' admet une limite en x_0, alors la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.
2. Démontrez que la réciproque de la propriété de la question *1.* est fausse.

   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

1.9. Exercice : AN09

Question

[Solution p]

Soit f une fonction numérique continue sur $[0;+\infty[$ telle que f a une limite finie l quand $n \to +\infty$.

1. Écrivez la définition de « $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ » et de « f uniformément continue sur $[0;+\infty[$ ».
2. Démontrez que f est uniformément continue sur $[0;+\infty[$.

1.10. Exercice : AN10

Question

[Solution p]

1. Démontrez que, dans un espace vectoriel normé complet, toute série absolument convergente est convergente.
2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il complet ?

2. Exercices 11 à 20

2.1. Exercice : AN11

Question

[Solution p]

Étudiez la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indication : on distinguera le cas $\alpha \leqslant 0$ et le cas $\alpha > 0$.

2.2. Exercice : AN12

Question

[Solution p]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrez que si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrivez judicieusement la définition de $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ puis majorez, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{n}{(3n+1)!}$?

2.3. Exercice : AN13

Question

[Solution p]

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrez que :
   $u_n \sim v_n \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Étudiez la convergence de la série $\sum \dfrac{(i-1)\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}-1}$.
   (i est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

2.4. Exercice : AN14

Question

[Solution p]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

1. Démontrez que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.
2. Indiquez un majorant du reste de cette série. Démontrez ce résultat.

2.5. Exercice : AN15

Question

[Solution p]

Soit X un ensemble , $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et f une fonction de X dans $\mathbb{C}$.

1. On suppose que :
   $(\forall x \in X)\,(\forall n \in \mathbb{N})\ \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$
   où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.
   Démontrez que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X .
2. La suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément dans le disque ouvert $D\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ de centre 0 et de rayon $\dfrac{1}{2}$?
   Converge-t-elle uniformément dans le disque ouvert $D(0,1)$ de centre 0 et de rayon 1 ?

2.6. Exercice : AN16

Question

[Solution p]

On pose $f_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$.

1. Étudiez la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2.
   - Démontrez que, pour tout $a > 0$, cette suite converge uniformément sur les intervalles $]-\infty;-a]$ et $[a;+\infty[$.
   - Converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?
     Indication : on pourra considérer $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2.7. Exercice : AN17

Question

[Solution p]

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrez que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

2.8. Exercice : AN18

Question

[Solution p]

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f . On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 .
   Démontrez que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X .
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   - Étudiez la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - Étudiez la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$) puis sur $]0,+\infty[$.

2.9. Exercice : AN19

Question

[Solution p]

1. Soit (f_n) une suite d'applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une application f , et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en x_0 , avec $x_0\in[a,b]$.
   Démontrez que f est continue en x_0 .
2. On pose, pour tout $x\in[0;1]$, $g_n(x) = x^n$. La suite (g_n) converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

2.10. Exercice : AN20

Question

[Solution p]

1. On note E l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
   On pose, pour tout f de E , $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X}|f(x)|$.
   Démontrez succinctement que l'application $f\mapsto\|f\|_\infty$ est une norme sur E .
2. Soit (g_n) une suite d'applications de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
   On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g .
   Démontrez que l'application g est bornée.

3. Exercices 21 à 30

3.1. Exercice : AN21

Question

[Solution p]

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Démontrez que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifiez comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions puis démontrez que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} .$$

an21a

3.2. Exercice : AN22

Question

[Solution p]

1. Démontrez que toute série de fonctions normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X .
2. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

3.3. Exercice : AN23

Question

[Solution p]

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0,1] \ \ u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} .$$

an23a

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right]$.

1. Démontrez que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculez $S'(1)$.
   Indication : pensez à décomposer une fraction rationnelle en éléments simples.

3.4. Exercice : AN24

Question

[Solution p]

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrez l'implication:
$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur } A\right)$$
2. La série entière $\sum z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 ?

3.5. Exercice : AN25

Question

[Solution p]

On considère la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$, x désignant un réel.

1. Étudiez la simple convergence de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge, et $S(x)$ la somme de cette série.
2.
   - Étudiez la convergence normale puis la convergence uniforme de cette série sur D .
   - La fonction S est-elle continue sur D ?

3.6. Exercice : AN26

Question

[Solution p]

- Démontrez que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- On pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
  Démontrez que: $f(z) \times f(z') = f(z+z')$, sans utiliser le fait que $f(z) = e^z$.
- Déduisez-en que : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) \neq 0$ et $\frac{1}{f(z)} = f(-z)$.

3.7. Exercice : AN27

Question

[Solution p]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Démontrez que cette série converge uniformément sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon r tel que $0 \leqslant r < R$.
2. Démontrez que la fonction $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue en tout point du disque ouvert de convergence.

3.8. Exercice : AN28

Question

[Solution p]

Calculez le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes:

1. $\sum n^{\alpha} z^{n}$ avec $(\alpha \in \mathbb{R})$.
2. $\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^{n}$.

3.9. Exercice : AN29

Question

[Solution p]

1. Démontrez que si $|a_n| \sim |b_n|$ alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Trouvez le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{i^n n^2}{n^2+1} z^n$ (où $i^2 = -1$).

3.10. Exercice : AN30

Question

[Solution p]

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) z^n$?

4. Exercices 31 à 40

4.1. Exercice : AN31

Question

[Solution p]

1. Que savez-vous du rayon de convergence de la somme de deux séries entières (on ne demande pas de démonstration) ?
2. Développez en série entière au voisinage de 0 , en précisant le rayon, la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? Pour $x = \frac{1}{2}$? Si oui quelle est sa somme ?

4.2. Exercice : AN32

Question

[Solution p]

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrez que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont le même rayon de convergence. On le note R .
2. Démontrez que la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable sur l'intervalle $]-R, R[$.

4.3. Exercice : AN33

Question

[Solution p]

Déterminez le développement en série entière à l'origine de la fonction $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en précisant son rayon de convergence.

4.4. Exercice : AN34

Question

[Solution p]

1. Déterminez le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Déterminez le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$, et précisez le rayon de convergence.
3. - Déterminez $S(x)$.
   - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
     $f(0) = 1,\ \ f(x) = \text{ch}\sqrt{x}$ pour $x > 0,\ \ f(x) = \cos\sqrt{-x}$ pour $x < 0$.
     Démontrez que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

4.5. Exercice : AN35

Question

[Solution p]

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de période 2π, définie ainsi :

$$f(x) = x \ \text{ sur }]-\pi,\pi[\qquad \text{et} \qquad f(-\pi) = 0\,.$$

an35a

1. La série de Fourier de f converge-t-elle vers $f(x)$ en tout point x de $\mathbb{R}$?
2. Déterminez la série de Fourier de f.

4.6. Exercice : AN36

Question

[Solution p]

Soit f la fonction 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ telle que: $\forall t \in [0;2\pi[,\ \ f(t) = t^2$.

1. Expliquez pourquoi, pour tout réel t, la série de Fourier de f converge, et précisez sa limite.
2. Déterminez la série de Fourier de f, puis déduisez-en la somme de la série : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

4.7. Exercice : AN37

Question

[Solution p]

Soit f la fonction numérique 2π -périodique définie par : $\forall x \in [-\pi;\pi[, f(x) = x^2$.

1. - Expliquez pourquoi la série de Fourier de f converge sur $\mathbb{R}$. Précisez la somme de cette série.
   - La série de Fourier de f converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?
2. - Déterminez la série de Fourier de f.
   - Déduisez-en la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

4.8. Exercice : AN38

Question

[Solution p]

1. Démontrez que pour tout entier n , la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4.9. Exercice : AN39

Question

[Solution p]

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{-1}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1. Justifiez que I_n est bien définie.
2. Démontrez que $(-1)^n I_n$ décroît et déterminez sa limite.
3. La série $\sum I_n$ est-elle convergente ?

4.10. Exercice : AN40

Question

[Solution p]

On pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Étudiez la convergence simple sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis l'uniforme convergence sur $[0,1]$.
2. Trouvez la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Exercices 41 à 50

5.1. Exercice : AN41

Question

[Solution p]

N.B : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?
2. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ est-elle intégrable sur $]1,+\infty[$?

5.2. Exercice : AN42

Question

[Solution p]

On pose, pour tout x de $]0;+\infty[$ et pour tout t de $]0;+\infty[$:

$$f(t,x) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} .$$

an42a

1. Démontrez que la fonction t $\mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

   On pose, pour $x \in]0;+\infty[, \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Démontrez que, pour tout x de $]0;+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. Démontrez que Γ est de classe C^1 et exprimez $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale

5.3. Exercice : AN43

Question

[Solution p]

1. Énoncez le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrez que la fonction $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Trouvez une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont f est solution.

5.4. Exercice : AN44

Question

[Solution p]

Calculez l'intégrale double

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

an44a

où D est défini par : $x^2 + y^2 - 2y \geqslant 0$; $x^2 + y^2 - 1 \leqslant 0$; $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$.

5.5. Exercice : AN45

Question

[Solution p]

1. Démontrez que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$.
2. Pour chaque nombre $r > 0$, on note C_r le carré $[0;r] \times [0;r]$ et D_r l'ensemble défini par : $x^2 + y^2 \leqslant r^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$.
   - Quelle relation y a-t-il entre $\iint_{C_r} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $\int_0^r \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$?
   - Calculez en fonction de r l'intégrale double $\iint_{D_r} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
   - Déduisez de ce qui précède la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

     Indication : on pourra remarquer que $D_r \subset C_r \subset D_{2r}$.

5.6. Exercice : AN46

Question

[Solution p]

Résolvez sur l'intervalle $]1,+\infty[$ l'équation différentielle : $y' + \dfrac{x}{1-x^2}y = 2x$.

5.7. Exercice : AN47

Question

[Solution p]

Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle: $y'' + y = \cos x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

5.8. Exercice : AN48

Question

[Solution p]

Toute fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ peut être écrite, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, sous la forme $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, u et v désignant deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On se propose de trouver, s'il en existe, des fonctions f satisfaisant aux conditions suivantes :

- **C1.** Les fonctions u et v sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
- **C2.** Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$.

1. Démontrez que, si u et v existent, alors, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:
   $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad$ et $\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0$.
2. On suppose que $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + 3x$.
   - Trouvez les fonctions v telles que les conditions **C1** et **C2** soient satisfaites.
   - Démontrez qu'il existe une fonction $f = u + iv$ unique telle que $f(0) = 0$ et explicitez $f(z)$ en fonction de z .
   - Pour cette fonction f , construisez dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, le point A d'affixe $f(i)$.

5.9. Exercice : AN49

Question

[Solution p]

Soit l'équation différentielle: $x(x - 1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouvez les solutions de cette équation développables en série entière à l'origine. Déterminez la somme des séries entières obtenues.
2. Indiquez une méthode pour trouver toutes les solutions de l'équation différentielle sur chacun des intervalles $]0; 1[$, $]-\infty; 0[$ et $]1; +\infty[$.

5.10. Exercice : AN50

Question

[Solution p]

On pose $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrez que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrez que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

6. Exercices 51 à 60

6.1. Exercice : AN51

Question

[Solution p]

1. Étudiez les extrêma de la fonction définie par: $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ en utilisant la méthode générale de recherche d'extrêma d'une fonction de 2 variables.
2. Retrouvez géométriquement le résultat précédent.
   Indication: quelle est la surface d'équation $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$?

6.2. Exercice : AN52

Question

[Solution p]

1. Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E .
   Démontrez que: $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
2. Démontrez que si A est un sous-espace vectoriel de E , alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E .

6.3. Exercice : AN53

Question

[Solution p]

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E .
   Démontrez que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   - *P1.* f est continue en a .
   - *P2.* Pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
2. Soit A une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé E , et soient f et g deux applications continues de E dans F , F désignant un espace vectoriel normé.
   Démontrez que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

6.4. Exercice : AN54

Question

[Solution p]

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1. A est un sous-ensemble compact de E , et f une fonction de E dans F .
   Démontrez que si f est continue sur A , alors $f(A)$ est un sous-ensemble compact de F .
2. On suppose que g est une fonction continue de E dans $\mathbb{C}$.
   Démontrez que si A est un sous-ensemble, non vide, compact de E , alors :
   - $g(A)$ est une partie bornée de $\mathbb{C}$;
   - $\exists\, x_0 \in A$ tel que $\sup\limits_{x\in A} \left|g(x)\right| = \left|g(x_0)\right|$.

6.5. Exercice : AN55

Question

[Solution p]

Soit E un espace normé complet et soit A un sous-ensemble de E .

1. Démontrez que: A complet $\Longleftrightarrow$ A fermé.
2. Pour chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$, dites s'il est complet ou non, en justifiant votre réponse :
   - $]0;1]$
   - $[-2;2] \cup [3;+\infty[$
   - $]0;1[\cup]-\infty;2]$

6.6. Exercice : AN56

Question

[Solution p]

Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrez que si f est une application linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
   - *P1.* f est continue sur E .
   - *P2.* f est continue en 0 .
   - *P3.* $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, ||f(x)|| \leqslant k\,||x||$.
2. Soit E l'espace vectoriel des applications linéaires et continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $||f|| = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$.

   On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

   Démontrez que φ est linéaire et continue.

6.7. Exercice : AN57

Question

[Solution p]

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout f de E :

$$p_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad p_1(f) = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \,.$$

an57a

1.
   - Démontrez succinctement que p_∞ et p_1 sont deux normes sur E .
   - Démontrez qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E , $p_1(f) \leq kp_\infty(f)$.
   - Démontrez que tout ouvert pour la norme p_1 est un ouvert pour la norme p_∞ .
2. Démontrez que les normes p_1 et p_∞ ne sont pas équivalentes.

6.8. Exercice : AN58

Question

[Solution p]

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout polynôme $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$, n désignant le degré de P , on pose :

$$p_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \qquad \text{et} \qquad p_2(P) = \max_{0\leq i\leq n} |a_i| \,.$$

an58a

1.
   - Démontrez succinctement que p_1 et p_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
   - Démontrez que tout ouvert pour la norme p_2 est un ouvert pour la norme p_1 .
   - Démontrez que les normes p_1 et p_2 ne sont pas équivalentes.
2. On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k . On note p'_1 la restriction de p_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et p'_2 la restriction de p_2 à $\mathbb{R}_k[X]$.
   Les normes p'_1 et p'_2 sont-elles équivalentes ?

6.9. Exercice : AN59

Question

[Solution p]

On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)$ de nombres complexes telles que la série $\sum |x_n|^2$ converge.

1. Démontrez que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres complexes.
2.
   - Démontrez que pour $x = (x_n) \in l^2$ et $y = (y_n) \in l^2$, la série $\sum \overline{x_n} y_n$ converge.
     On pose $x|y = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{x_n} y_n$.
   - Démontrez que l'on définit ainsi un produit scalaire dans l^2 .
3. On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme associée.
   Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_m$. Démontrez que φ est une application linéaire et continue de l^2 dans $\mathbb{C}$ et calculez $\|\varphi\|$, où $\|\varphi\|$ désigne la norme usuelle dans l'espace vectoriel des applications linéaires et continues de l^2 dans $\mathbb{C}$.

6.10. Exercice : AN60

Question

[Solution p]

Soit A une algèbre normée de dimension finie ayant e pour élément unité.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.
   - Démontrez que la série $\sum u^n$ est convergente.
   - Démontrez que $(e - u)$ est inversible et que $(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.
2. Démontrez que, pour tout u de A , la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

I

Exercices 1 à 10	27
Exercices 11 à 20	29
Exercices 21 à 30	32
Exercices 31 à 40	34
Exercices 41 à 50	37
Exercices 51 à 60	39

1. Exercices 1 à 10

1.1. Exercice : AG01

Question

[Solution p]

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposez en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme:

$$P = X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1 \ .$$

ag01a

1.2. Exercice : AG02

Question

[Solution p]

On considère les polynômes $P = 3X^4 - 9X^3 + 7X^2 - 3X + 2$ et $Q = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$.

1. Décomposez P et Q en facteurs premiers sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$ (on pourra calculer les valeurs de P et de Q en 1 et en 2).
2. Déterminez le ppcm et le pgcd des polynômes P et Q .

1.3. Exercice : AG03

Question

[Solution p]

On considère les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ suivants : $P = 2X^4 - 3X^2 + 1$ et $Q = X^3 + 3X^2 + 3X + 2$.

1. Décomposez en facteurs premiers de P dans $\mathbb{C}[X]$ (on pourra calculer les valeurs de P en 1 et en -1).
2. Décomposez en facteurs premiers de Q dans $\mathbb{C}[X]$ (on pourra calculer la valeur de Q en -2).
3. - Déduisez des questions *1.* et *2.* qu'il existe deux polynômes U et V tels que $PU + QV = 1$.
   - Indiquez une méthode pour déterminer deux polynômes U et V en utilisant l'algorithme d'Euclide.

1.4. Exercice : AG04

Question

[Solution p]

On considère la fraction rationnelle $R = \dfrac{X^5 + X^4}{(X-2)^2(X+1)^2}$.

1. Décomposez R en éléments simples.
2. Déterminez les primitives de la fonction $x \longmapsto R(x)$ sur l'intervalle $]-1;2[$.

1.5. Exercice : AG05

Question

[Solution p]

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n et f l'endomorphisme de E défini par : $f(P) = P - P'$.

1. Démontrez que f est bijectif de deux manières :
   - sans utiliser de matrice de f ,
   - en utilisant une matrice de f .
2. Soit $Q \in E$. Trouvez P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

1.6. Exercice : AG06

Question

[Solution p]

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminez Ker f .
2. f est-il surjectif ?
3. Trouvez une base de $\mathrm{Ker} f$ et une base de $\mathrm{Im} f$.

1.7. Exercice : AG07

Question

[Solution p]

1. Démontrez que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n alors AB et BA ont même trace.
   Indication : on rappelle que la trace d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux.
2. Déduisez-en qu'en dimension finie toutes les matrices d'un même endomorphisme ont même trace.
3. Démontrez que si A et B sont semblables alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k ont même trace.

1.8. Exercice : AG08

Question

[Solution p]

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Pour $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $||A|| = \sup\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \left|a_{i,j}\right|$.

1. Démontrez que $||AB|| \leqslant n\,||A||\,||B||$, puis que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $||A^p|| \leqslant n^{p-1}\,||A||^p$.
2. Démontrez que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.

   Est-elle convergente ?

1.9. Exercice : AG09

Question

[Solution p]

Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $P(X) \overset{\Phi}{\longmapsto} P(X) - P(X-1)$.

Donnez la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et déduisez-en $\operatorname{Im} \Phi$ et $\operatorname{Ker} \Phi$.

1.10. Exercice : AG10

Question

[Solution p]

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et f , g deux endomorphismes de E tels que : $f \circ g = \operatorname{Id}$.

1. Démontrez que : $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$.
2. Démontrez que : $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.
3. Démontrez que : $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

2. Exercices 11 à 20

2.1. Exercice : AG11

Question

[Solution p]

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ag11a

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A .

1. Démontrez que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminez D_n en fonction de n .
3. Justifiez que la matrice A est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A ?

2.2. Exercice : AG12

Question

[Solution p]

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, (e_i) une base de E et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n vecteurs de E .

1. Démontrez qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que, $\forall i \in \{1;2;\ldots;n\},\ f(e_i) = v_i$.
2. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E , et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. Pour tout u de $\mathcal{L}(E)$, on pose : $\varphi(u) = \operatorname{Mat}_{(e_i)} u$ ($\operatorname{Mat}_{(e_i)} u$ désignant la matrice de u dans la base (e_i)).
   - Démontrez que l'application φ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est linéaire et bijective.
   - Déterminez la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

2.3. Exercice : AG13

Question

[Solution p]

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés $n \times n$ à coefficients réels. On admet que $\mathcal{L}(E)$ muni des lois $+$ et $\circ$ est un anneau, et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni des lois $+$ et $\times$ est un anneau.

1. Précisez l'élément neutre pour la loi $\circ$ dans $\mathcal{L}(E)$ et l'élément neutre pour la loi $\times$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. (e_i) désignant une base de E , on pose, pour tout u de $\mathcal{L}(E)$, $\varphi(u) = \mathrm{Mat}_{(e_i)}u$ ($\mathrm{Mat}_{(e_i)}u$ désignant la matrice de u dans la base (e_i)).
   - Démontrez que φ est un isomorphisme d'anneau de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Démontrez que, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Mat}_{(e_i)}(\underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}) = (\mathrm{Mat}_{(e_i)}u)^n$.

2.4. Exercice : AG14

Question

[Solution p]

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

1. Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E . Démontrez que pour tout $i = 2, 3, \ldots, n$, $\{e_1 + e_i, e_2, \ldots, e_n\}$ est une base de E .
2. Déterminez tous les endomorphismes de E dont la matrice est diagonale dans toute base de E .

2.5. Exercice : AG15

Question

[Solution p]

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n .

1. Démontrez que: $E = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f \Longrightarrow \mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$.
2.
   - Démontrez que: $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2$.
   - Démontrez que: $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f$.

2.6. Exercice : AG16

Question

[Solution p]

N.B : Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E . On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E . Démontrez que, dans $\mathcal{L}(E)$, la famille $\left\{\mathrm{Id}, f, f^2, \cdots, f^{n^2}\right\}$ est liée et déduisez-en que f admet un polynôme annulateur non identiquement nul.
2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et λ une valeur propre de f . Démontrez que si P est un polynôme annulateur de f alors : $P(\lambda) = 0$.

2.7. Exercice : AG17

Question

[Solution p]

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrez que:
   $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
   - Démontrez que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   - Démontrez que pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
     $(P \text{ polynôme annulateur de } u) \implies (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrivez le polynôme caractéristique de A , puis déduisez-en que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A .

2.8. Exercice : AG18

Question

[Solution p]

Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres réels.

1. Démontrez que E est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
2. On pose $\varphi(a+ib) = M(a,b)$. Démontrez que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{C}$ sur E , $\mathbb{C}$ étant considéré comme un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
   Est-il un isomorphisme d'anneaux ?

2.9. Exercice : AG19

Question

[Solution p]

p désigne un entier naturel non nul.

On considère dans $\mathbb{Z}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par : $x \mathcal{R} y \overset{\text{déf.}}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kp$.

On note $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation $\mathcal{R}$.

1. Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? Quelle est celle de p ?
2. Donnez soigneusement la définition de l'addition usuelle et de la multiplication usuelle dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. On admet que muni de ces opérations, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un anneau.
   Démontrez que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier.

2.10. Exercice : AG20

Question

[Solution p]

On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble constitué par les n premiers entiers non nuls $\{1;2;3;\ldots;n\}$.

1. Démontrez que, muni de la loi $\circ$, $\mathfrak{S}_n$ est un groupe.
2. On note σ l'élément de $\mathfrak{S}_8$ défini de la manière suivante :
   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   l'image de chaque terme de la première ligne étant écrit juste en dessous.
   - Démontrez que la permutation σ est égale à la composée de deux cycles que l'on précisera.
   - On note σ^n la permutation $\underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{n \text{ fois}}$.

     Déterminer $\sigma^{12}, \sigma^{24}, \sigma^4$ et σ^{2016} .

3. Exercices 21 à 30

3.1. Exercice : AG21

Question

[Solution p]

1. u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie n et I désigne l'application identité de E .
   Rappelez la définition d'une valeur propre puis démontrez que :
   $(\lambda \text{ valeur propre de } u) \Longleftrightarrow (\det(u - \lambda I) = 0)$
   Déduisez-en que u admet au plus n valeurs propres distinctes.
2. Trouvez un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ admettant comme valeurs propres 0 et 1 .

3.2. Exercice : AG22

Question

[Solution p]

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

1. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
2. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

3.3. Exercice : AG23

Question

[Solution p]

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrez que A est diagonalisable de quatre manières :
   - sans calculs,
   - en calculant directement le déterminant $\det(A - \lambda I_3)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   - en utilisant le théorème du rang,
   - en calculant A^2 .
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.
   - Que peut-on dire de l'endomorphisme u ?
   - Trouvez une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

3.4. Exercice : AG24

Question

[Solution p]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.

1. Quel est le rang de A ? La matrice A est-elle inversible ?
2. A est-elle diagonalisable ?

3.5. Exercice : AG25

Question

[Solution p]

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A . A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduisez de la question *1.* les éléments propres de B .

3.6. Exercice : AG26

Question

[Solution p]

On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ la projection vectorielle f sur le plan d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite d d'équation $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Trouvez simplement une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
2. Déduisez-en la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3.7. Exercice : AG27

Question

[Solution p]

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n , et soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E .

On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E .

f est-il diagonalisable ? (discutez en fonction du vecteur v)

3.8. Exercice : AG28

Question

[Solution p]

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
2. Déterminez toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et déduisez-en l'ensemble des matrices qui commutent avec A .

3.9. Exercice : AG29

Question

[Solution p]

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   - Déterminez les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
   - Déterminez la matrice de passage P de la base initiale à la base de vecteurs propres, puis sa matrice inverse P^{-1} .
2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + y - z + t \\ y' = 2y + z + 1 \\ z' = 3z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t , dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Résolvez ce système différentiel en utilisant la question *1.*

3.10. Exercice : AG30

Question

[Solution p]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrez que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A . Trouvez une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
3. Déduisez-en une méthode de résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

4. Exercices 31 à 40

4.1. Exercice : AG31

Question

[Solution p]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrez que $\lambda = 2$ est valeur propre de A et que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

   On admet que A admet deux autres valeurs propres -2 et 4 avec comme vecteurs propres respectivement associés $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes a_0, b_0, c_0 et :

   $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = -2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -3a_n + b_n + 3c_n \\ c_{n+1} = -a_n + b_n + 3c_n \end{cases}.$

   On suppose que $a_0 = 2$, $b_0 = 2$ et $c_0 = 0$.
   Calculez a_n , b_n et c_n en fonction de n .

4.2. Exercice : AG32

Question

[Solution p]

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

On considère la forme quadratique q définie sur E par :

$$q(v) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz$$

ag32a

où v est le vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base e .

1. Quelle est la matrice A de q dans la base e ?
2. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
3. Indiquez une méthode pour trouver une base e' telle que si v a pour coordonnées (X, Y, Z) dans la base e' , alors $q(v)$ soit de la forme $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2$.

4.3. Exercice : AG33

Question

[Solution p]

1. Démontrez l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.
   Indication : on considérera $||x + \lambda y||^2$.
2. Dans quel cas a-t-on égalité ?

4.4. Exercice : AG34

Question

[Solution p]

Soit E un espace euclidien et A un sous-espace vectoriel de E .

1. Démontrez que $E = A \oplus A^{\perp}$.
   Indication : on admettra le fait que toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E .
2. Démontrez que $(A^{\perp})^{\perp} = A$.

4.5. Exercice : AG35

Question

[Solution p]

Soit E un espace euclidien et F, G des sous-espaces vectoriels de E .

1. Démontrez que $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
2. Démontrez que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

4.6. Exercice : AG36

Question

[Solution p]

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E . On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y .

1. Soit u un endomorphisme de E , tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   - Démontrez que : $\forall (x, y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   - Démontrez que u est bijectif.
2. Démontrez que l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.

4.7. Exercice : AG37

Question

[Solution p]

1. Soient a et b deux réels avec $a < b$.
   Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Démontrez que : $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout f et tout g de E , $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Démontrez que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
3. Majorez $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

4.8. Exercice : AG38

Question

[Solution p]

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrez que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.
   Déterminez le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

4.9. Exercice : AG39

Question

[Solution p]

Soient $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace engendré par les cinq applications :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\quad f_2 : x \mapsto \cos x\ ,\quad f_3 : x \mapsto \sin x\ ,\quad f_4 : x \mapsto \cos(2x)\ ,$$
$$f_5 : x \mapsto \sin(2x)\ ,$$

ag39a

et F le sous-espace vectoriel engendré par f_1, f_2, f_3 : $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

1. Démontrez que $\langle f \mid g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur E .
2. Vérifiez que f_4 et f_5 sont unitaires et orthogonaux.
   On admettra pour la suite que $\mathcal{B} = (f_i)_{i=1,\dots,5}$ est une base orthonormée de E .
3. Déterminez le sous-espace vectoriel $F^\perp$, orthogonal de F pour ce produit scalaire.

4.10. Exercice : AG40

Question

[Solution p]

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}({}^tAA')$, où $\mathrm{tr}({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A' . On note

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} .$$

ag40a

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Démontrez que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminez une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminez la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

5. Exercices 41 à 50

5.1. Exercice : AG41

Question

[Solution p]

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$.

On admet que pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $||x - y_0||$.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, alors on pose $\langle A \mid A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrez que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

5.2. Exercice : AG42

Question

[Solution p]

E désigne un espace euclidien. On note $x|y$ le produit scalaire de x et de y .

1. Démontrez que si f est une forme linéaire sur E , il existe un unique élément a de E tel que, pour tout x de E , $f(x) = x|a$.
2. x_0 est un élément non nul de E , tel que $||x_0|| = 1$. On note [x_0] la droite vectorielle engendrée par x_0 et $[x_0]^\perp$ l'orthogonal de $[x_0]$.
   - Donnez la définition de la projection orthogonale p sur $[x_0]$.
   - Si $p(x) = \lambda x_0$, on pose $g(x) = \lambda$. Démontrez que g est une forme linéaire sur E et indiquez l'élément b de E tel que, pour tout x de E , $p(x) = x|b$.

5.3. Exercice : AG43

Question

[Solution p]

E désigne un espace euclidien. On note $x|y$ le produit scalaire de x et de y .

Si u est un endomorphisme de E , on note u^* l'endomorphisme adjoint de u .

1.
   - Si u est un endomorphisme de E , précisez, en justifiant votre réponse, l'endomorphisme $(u^*)^*$.
   - Si u et v sont deux endomorphismes de E , précisez, en justifiant votre réponse, l'endomorphisme $(u \circ v)^*$.
2.
   - Soit (e_i) une base orthonormale de E . On note A la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base (e_i) et B la matrice de u^* dans la base (e_i) . En justifiant votre réponse, donnez la relation qui existe entre A et B ?
   - Retrouvez le résultat de la question *1.a)* à l'aide de la question *2.a)*.

5.4. Exercice : AG44

Question

[Solution p]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Justifiez que A est diagonalisable.
2. Déterminez P et D dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : ${}^tP = P^{-1}$, D est diagonale et ${}^tPAP = D$.

5.5. Exercice : AG45

Question

[Solution p]

Étudiez la courbe définie paramétriquement par $\begin{cases} x = \dfrac{u-1}{u^2} \\ y = \dfrac{u^2}{u+1} \end{cases}$.

Puis, donnez l'allure de cette courbe.

5.6. Exercice : AG46

Question

[Solution p]

On considère la courbe définie en coordonnées polaires par : $r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$.

1. Étudiez les symétries éventuelles de cette courbe.
2. Donnez l'allure de cette courbe.
3. Précisez la tangente au point de paramètre $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

5.7. Exercice : AG47

Question

[Solution p]

Étudiez au voisinage du point de paramètre $t = 1$ la courbe définie par :

$$x = \int_1^t \frac{u^2-1}{u^2+1} \mathrm{d}u \qquad , \qquad y = \int_1^t \frac{u^2-1}{u^3+1} \mathrm{d}u$$

ag47a

Indication : on pourra calculer les dérivées successives de x et y.

5.8. Exercice : AG48

Question

[Solution p]

Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe d'équation

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0 .$$

ag48a

1.
   - Précisez la nature de cette courbe.
   - Tracez cette courbe.
2. Calculez la pente de la tangente en chacun des points d'intersection de la courbe et de l'axe $\left(O, \vec{j}\right)$.

5.9. Exercice : AG49

Question

[Solution p]

On considère la courbe paramétrée, définie par : $\begin{cases} x = \cos^3 t\,, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$.

1. Étudiez les symétries de cette courbe.
2. Donnez l'allure de cette courbe.
3. Déterminez une équation de la tangente à la courbe, au point de paramètre $t = \dfrac{\pi}{6}$.

5.10. Exercice : AG50

Question

[Solution p]

On considère la courbe C définie paramétriquement par : $\begin{cases} x = \dfrac{u^2 - 1}{u} \\ y = \dfrac{u^2 + 1}{u + 1} \end{cases}$, $u > 0$.

Donnez l'allure de la courbe C, et précisez la (ou les) asymptote(s) éventuelle(s).

6. Exercices 51 à 60

6.1. Exercice : AG51

Question

[Solution p]

Donnez l'allure de la courbe définie en coordonnées polaires par : $r = 2(\cos\theta - \cos 2\theta)$.

Précisez la tangente à cette courbe au point de paramètre $\theta = \pi$.

6.2. Exercice : AG52

Question

[Solution p]

On considère la courbe paramétrée C: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, f et g étant deux fonctions de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I.

1. Expliquez comment on peut étudier la position de C par rapport à sa tangente au voisinage du point M_0 de paramètre t_0, avec $t_0 \in I$.
2. Appliquez les résultats précédents aux deux courbes suivantes au voisinage du point de paramètre 0 :

   $C_1 : \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^6 \end{cases}$ et $C_2 : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 \end{cases}$

   Retrouvez ces résultats simplement sans utiliser la question *1.*

6.3. Exercice : AG53

Question

[Solution p]

1. Donnez une représentation paramétrique, dans un repère orthonormé, du cercle de centre O et de rayon $a > 0$. Puis, déterminez le repère de Frénet en chaque point de ce cercle. Précisez la valeur du rayon de courbure.
2. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, on considère l'arc paramétré défini par $\begin{cases} x = u \\ y = u^2 \end{cases}$, pour $u \in [0;+\infty[$.
   Déterminez, au point M de cette courbe correspondant au paramètre $u = 1$, le repère de Frénet, ainsi que le rayon de courbure.

6.4. Exercice : AG54

Question

[Solution p]

Soit l'intégrale curviligne $I = \int_\Gamma \omega$ où

$$\begin{cases} \omega = y\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y \\ \text{et} \\ \Gamma \text{ est la courbe fermée composée des portions de courbes comprises} \\ \text{entre les deux points d'intersection des courbes } C_1 \text{ et } C_2 \text{ d'équations} \\ \text{respectives } y = x^2 \text{ et } y = x, \text{ dans un repère orthonormé.} \end{cases}$$

La courbe Γ étant décrite dans le sens trigonométrique, calculez l'intégrale I :

1. directement,
2. en utilisant la formule de Green-Riemann.

6.5. Exercice : AG55

Question

[Solution p]

On considère la quadrique (S) d'équation $xy + yz = 1$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1. On note q la forme quadratique associée à (S) .
   - Déterminez la matrice de q dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On la notera A .
   - Déterminez une base orthonormée $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ constituée par des vecteurs propres de A .
2.
   - On note P la matrice de passage de la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ à la base $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$. Expliquez pourquoi la matrice de q dans la base $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ est égale à $P^{-1}AP$.
   - Quelle est la nature de la quadrique (S) ?

6.6. Exercice : AG56

Question

[Solution p]

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les trois normes usuelles p_0 , p_1 et p_2 définies ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$p_0(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ p_1(x, y) = |x| + |y|\ ,\ p_2(x, y) = \max(|x|, |y|)\ .$$

ag56a

1. Démontrez que ces trois normes sont équivalentes, sans utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie.
2. On note, pour $i \in \{0, 1, 2\}$, $B_i((0;0), 1)$, la boule ouverte de centre $(0;0)$ et de rayon 1 pour la norme p_i . $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ désigne un repère orthonormal du plan.
   Pour chaque $i \in \{0, 1, 2\}$, déterminez l'ensemble E_i des points M du plan dont les coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont telles que $(x, y) \in B_i((0;0), 1)$.

6.7. Exercice : AG57

Question

[Solution p]

On considère la similitude directe s d'écriture complexe, dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$: $z' = (i - 1)z + 2 - i$.

1. Déterminez le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.
2. On considère dans le plan complexe les points A d'affixe i , B d'affixe -1 et C d'affixe $-i$.
   - Déterminez les points A' , B' et C' , images respectives de A , B et C par la similitude s .
   - Quel est la valeur de l'angle $\widehat{A'B'C'}$? de la longueur $A'C'$? de l'aire du triangle $A'B'C'$?

6.8. Exercice : AG58

Question

[Solution p]

1. On considère le système $\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ x + y + 2z & = & 0 \\ 2x - y - z & = & -1 \\ x - 2y + z & = & m \end{array}\right.$ où m désigne un réel.
   Démontrez qu'il existe une unique valeur m_0 de m pour laquelle ce système admet une solution unique et donnez cette solution.
2. Dans l'espace rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = u \\ y = 2 + u \\ z = -1 + u \end{array}\right.$ et la droite d' de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -1 \end{array}\right.$.
   - Démontrez que d et d' sont concourantes.
   - Démontrez que d peut être définie comme intersection des deux plans d'équations $x + y + z = 1$ et $x + y + 2z = 0$ et que d' peut être définie comme intersection des deux plans d'équations $2x - y - z = -1$ et $x - 2y + z = -5$.
     Déduisez-en le résultat de la question *1.*

6.9. Exercice : AG59

Question

[Solution p]

On considère dans le plan une droite d et un point F non situé sur d . On suppose que la distance du point F à d est égale à 1.

Déterminez, en utilisant un repère orthonormé judicieusement choisi, que l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{2}$ est une conique, H désignant le projeté orthogonal de M sur d .

Déterminez la nature et une équation réduite de cette conique et donnez l'allure de cette courbe.

6.10. Exercice : AG60

Question

[Solution p]

Soit dans l'espace une sphère de centre O et de rayon R , et un point A non situé sur la sphère.

On note d la distance OA . Une droite Δ passant par A coupe la sphère en P et Q .

Exprimez le produit $AP \times AQ$ en fonction de d et de R , en utilisant, dans un repère orthonormé judicieusement choisi, une équation de la sphère et une représentation paramétrique de Δ .