

Exercice 1

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n \sim v_n$. Démontrez que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2. Déterminez le signe au voisinage de l'infini de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. Par définition il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 1 et telle que, à partir d'un rang n_0 , on a $u_n = v_n \alpha_n$. On choisit un rang n_1 à partir duquel $\alpha_n > 0$ et alors, pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a u_n et v_n de même signe.

2. Comme, en 0, on a les développements limités $\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, par différence $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{6n^3}$ et, donc, $u_n < 0$ pour n assez grand.

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{R}$ les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1. Démontrez que ces deux suites sont adjacentes.

2. On admet que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e$. Démontrez que e est irrationnel.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et supposer que $e = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels.

1. On a immédiatement croissance de $(u_n)_n$ et convergence vers 0 de la suite $(v_n - u_n)_n$.

De plus $v_n - v_{n+1} = \frac{1}{n!} - \frac{2}{(n+1)!} = \frac{n-1}{(n+1)!} \geq 0$ dès que $n \geq 1$, d'où la décroissance de $(v_n)_{n \geq 1}$. Cela montre que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

2. En fait $(u_n)_n$ est strictement croissante, $v_1 = v_2$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e < v_n$.

Si $e \in \mathbb{Q}$ alors il existe p et q dans $\mathbb{N}^*$ tels que $e = \frac{p}{q}$ et alors $u_q < e < u_q + \frac{1}{q!}$ d'où $q!u_q < p(q-1)! < q!u_q + 1$ ce qui est absurde car $q!u_q$ est entier et donc $]q!u_q, q!u_q + 1[\cap \mathbb{N} = \emptyset$. Donc $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3

1. Pour une suite de réels (u_n) , énoncez le critère de Cauchy.
2. Soit f une fonction dérivable de $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]0, 1], |f'(x)| \leq 1$. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $U_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Démontrez, en utilisant le critère de Cauchy, que cette suite converge.

1. $(u_n)_n$ est dite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_ε dans $\mathbb{N}$ tel que, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $(n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon)$.
On rappelle qu'une suite de nombres réels converge si, et seulement si, elle est de Cauchy.

2. L'inégalité des accroissements finis prouve que f est lipschitzienne de rapport 1 sur $]0, 1]$.

$$\text{Si } (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \text{ alors } |U_{n+p} - U_n| \leq \left| \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n} \right|.$$

Comme la suite de terme général $\frac{1}{n}$ converge vers 0 elle est de Cauchy et, donc, $(U_n)_n$ est également de Cauchy et, par conséquent, convergente.

Exercice 4

1. Déterminez le développement limité à l'ordre 5 de $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{1-x}$.
2. Donnez, pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, la valeur de $f^{(k)}(0)$.

1. Il s'agit à coup sûr de développer en 0.

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) + o(x^5) \text{ par produit, soit}$$
$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{13x^4}{24} + \frac{13x^5}{24} + o(x^5).$$

2. f est le produit de fonctions développables en série entière sur $] -1, 1[$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle. Le développement limité est par suite

$$\text{son développement de Taylor, à savoir } f(x) = \sum_{k=0}^5 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^5) \text{ d'où}$$
$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, f'''(0) = 3, f^{(4)}(0) = 13 \text{ et } f^{(5)}(0) = 65.$$

Exercice 5

$$\text{On pose } f(x) = \frac{1}{(x+1)(3-x)}.$$

1. Décomposez $f(x)$ en éléments simples et déduisez-en les primitives de f sur l'intervalle $]3, +\infty[$.
2. Déterminez le développement en série entière en 0 de la fonction f et précisez le rayon de convergence.
3. Déterminez le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction f .

1. $f(x) = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{3-x}$ et, en utilisant les équivalents en -1 et en 3 , on obtient $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$.

Par suite F est primitive de f sur $]3, +\infty[$ si, et seulement si, il existe un réel k tel que $x > 3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x+1}{x-3} \right) + k$.

2. On a $f(x) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \right] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n + 3^{-n-1}] x^n$ si $|x| < 1$ en utilisant les séries géométriques. Le rayon de convergence est le plus petit module des pôles, soit 1.

3. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ son développement limité s'obtient en tronquant son développement en série entière,

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{7x^2}{27} - \frac{20x^3}{81} + \frac{61x^4}{243} - \frac{182x^5}{729} + o(x^5).$$

Exercice 6

1. Donnez l'idée de la démonstration de la formule de Leibniz, concernant la dérivée n -ième d'un produit de fonctions.

2. On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$ pour $x > -1$. Calculez $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On procède par récurrence sur n en utilisant $(fg)^{(n+1)} = (f'g + fg')^{(n)}$ l'hypothèse de récurrence et le triangle de Pascal.

2. On pose $g : x \mapsto e^{2x}$ et $h : x \mapsto (1+x)^{-1}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$ avec $g^{(p)} : x \mapsto 2^p e^{2x}$ et $h^{(q)} : x \mapsto (-1)^q q!(1+x)^{-q-1}$.

par suite $x > -1 \Rightarrow f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k! (1+x)^{-k-1} 2^{n-k} e^{2x}$, soit

$$f^{(n)}(x) = \frac{2^n n! e^{2x}}{1+x} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(n-k)!(2+2x)^k}.$$

Exercice 7

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Donnez la définition d'une fonction convexe définie sur I , à valeurs réelles.

2. Soit f une fonction convexe de I dans $\mathbb{R}$. Démontrez la propriété suivante, où n désigne un entier supérieur ou égal à 3 : Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des nombres positifs tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et si $x_1, x_2, \dots, x_n$ appartiennent à I , alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Indication : on pourra remarquer que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \left(1 - \sum_{i=3}^n \lambda_i\right) \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{1 - \sum_{i=3}^n \lambda_i} + \sum_{i=3}^n \lambda_i x_i.$$

3. Déduisez de ce qui précède, en utilisant la fonction $\ln$, que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ on a l'inégalité :

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

1. f est dite convexe sur I si

pour tout $(x, y, t) \in I^2 \times [0, 1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

2. Il s'agit de la notion d'associativité du barycentre. On va donc procéder par récurrence sur n , les cas où $1 \leq n \leq 2$ étant immédiats. On suppose la propriété établie à un rang $n \geq 2$ et on choisit $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ positifs de somme 1 et $x_1, \dots, x_{n+1}$ dans I .

Si $\lambda_{n+1} \in \{0, 1\}$ alors la propriété est immédiate.

Sinon on choisit pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, α_i positif tel que $\alpha_i \lambda_{n+1} = \lambda_i$ et on pose

$$x = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i ; \text{ ainsi } x \in I \text{ intervalle donc convexe.}$$

Par convexité $f((1 - \lambda_{n+1})x + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \leq (1 - \lambda_{n+1})f(x) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})$

soit $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq (1 - \lambda_{n+1})f(x) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})$ car $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1}$ et,

comme on a, par hypothèse de récurrence, $f(x) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_i)$ car

$$\frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ on obtient en définitive}$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i),$$

ce qui termine la récurrence.

3. Comme $\ln$ est concave on a $\frac{1}{n} \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)$

et le résultat en découle par croissance de $\exp$.

Exercice 8

Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$. On suppose que f est dérivable sur $]a, b[$, sauf peut-être en un point x_0 de $]a, b[$.

1. Démontrez que si la fonction f' admet une limite en x_0 , alors la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

2. Démontrez que la réciproque de la propriété de la question 1 est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

1. Soit $\varphi : x \mapsto f(x) - f(x_0) - \ell(x - x_0)$ où ℓ est la limite de f' en x_0 .

La fonction φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[\setminus \{x_0\}$ avec, sur cet ensemble, $\varphi'(x) = f'(x) - \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. Au voisinage de x_0 on a $|\varphi'| \leq \varepsilon$ et, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à droite et à gauche de x_0 , on en déduit que φ est localement ε -lipschitzienne, d'où $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon|x - x_0|$ au voisinage de x_0 . Comme $\varphi(x_0) = 0$ cela montre que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = \ell$.

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $g(x) = O(x^2)$, donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. Si $x \neq 0$ alors $g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et donc $g'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -1$, ce qui montre que g' n'est pas continue en 0.

Quant à parler de réciproque, avec $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ dans la conclusion ...

Exercice 9

Soit f une fonction numérique continue sur $[0, +\infty[$ telle que f a une limite finie ℓ quand $x \rightarrow +\infty$.

1. Écrivez la définition de : « $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ » et de : « f uniformément continue sur $[0, +\infty[$ ».

2. Démontrez que f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

1. La première assertion est : $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$ tel que $x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. La deuxième est :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $A > 0$ tel que $x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ (1).
 f est continue sur le segment $[0, A + 1]$ donc uniformément continue.
 Soit $\eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [0, A + 1]^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ (2).
 Quitte à remplacer η par 1 on peut supposer $\eta \leq 1$.
 Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ vérifiant $|x - y| \leq \eta$.
 Si x ou y est inférieur à A alors $(x, y) \in [0, A + 1]^2$ car $\eta \leq 1$, et donc, par (2),
 $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
 Sinon, par (1), $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| \leq 2\varepsilon$ et donc, en définitive :
 $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2\varepsilon$
 ce qui montre que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 10

- Démontrez que, dans un espace vectoriel normé complet, toute série absolument convergente est convergente.
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est-il complet ?

1. Si $\sum x_n$ est absolument convergente dans un espace vectoriel normé complet E on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \sum_{k=0}^n x_k$ et $Y_n = \sum_{k=0}^n \|x_k\|$.

$(Y_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$ et, donc, est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n \geq n_0 \Rightarrow Y_{n+p} - Y_n \leq \varepsilon$.

Si $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et $n \geq n_0$ alors $\|X_{n+p} - X_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|$ par

inégalité triangulaire, d'où $\|X_{n+p} - X_n\| \leq Y_{n+p} - Y_n \leq \varepsilon$ et $(X_n)_n$ est de Cauchy dans E complet, donc convergente. Par suite $\sum x_n$ converge dans E .

2. $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie n^2 , donc complet.

Exercice 11

Étudiez la série de terme général $u_n = \frac{1}{n[\ln(n)]^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indication : on distinguera le cas $\alpha \leq 0$ et le cas $\alpha > 0$.

Si $\alpha \leq 0$ alors dès que $n \geq 3$ on a $u_n \geq \frac{1}{n}$ et, donc, $\sum u_n$ diverge.

Sinon $f : t \mapsto \frac{1}{t[\ln(t)]^\alpha}$ est positive continue et décroissante sur $[2, +\infty[$, et donc $\sum u_n$ converge si, et seulement si, f est intégrable sur $[2, +\infty[$.

Si $X \geq 2$ le changement de variable $u = \ln(t)$ montre $\int_e^X f(t) dt = \int_1^{\ln(X)} \frac{du}{u^\alpha}$
 et, donc, f est intégrable sur $[2, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.
 En résumé : $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice 12

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrez que si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrivez judicieusement la définition de $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ puis majorez, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{n}{(3n+1)!}$?

1. Soit $q = \frac{1+\ell}{2}$, alors $\ell < q < 1$ et, par définition de la limite, à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$ d'où $u_n = O(q^n)$. Comme $\sum q^n$ est une série à termes positifs convergente, par domination $\sum u_n$ converge.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n}{(3n+1)!}$.

Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(3n)^3} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 = \ell < 1$ et la question précédente montre la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 13

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrez que : $u_n \sim v_n \Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Étudiez la convergence de la série $\sum \frac{(i-1) \sin(\frac{1}{n})}{\sqrt{n}-1}$.
 (i est ici le nombre complexe de carré égal à -1).

1. Par définition de $\sim$ à partir d'un certain rang $0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 2$.

$\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum (2u_n)$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ converge par majoration.

$\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum \frac{u_n}{2}$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge toujours par majoration.

On a également utilisé la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes.

2. On évitera de faire remarquer à l'examinateur que $X^2 = -1$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$ mais on doit le savoir.

On pose, pour tout $n \geq 2$, $\alpha_n = \frac{(i-1) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}-1}$.

Alors $|\alpha_n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$ et la question précédente montre que $\sum \alpha_n$ est absolument convergente et, donc, convergente.

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

1. Démontrez que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

2. Indiquez un majorant du reste de cette série. Démontrez ce résultat.

1. L'hypothèse de positivité de u_n est redondante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} = \sum_{k=0}^n (u_{2k} - u_{2k+1})$ et donc, comme $(u_n)_n$ décroît, la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante car, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} - u_{2k+1} \geq 0$.

De même $S_{2n} = u_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+1} - u_{2k+2})$ et $(S_{2n})_n$ décroît.

De plus $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ par hypothèse. Cela montre que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes, elles convergent donc et ont même limite. Par suite $(S_n)_n$ converge i.e. $\sum u_n$ converge.

2. Le résultat attendu est : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k u_k \right| \leq u_n$.

Si, par exemple, n est pair on pose $n = 2p$.

Alors $\sum_{k=2p}^{\infty} (-1)^k u_k = \sum_{k=p}^{\infty} (u_{2k} - u_{2k+1}) \geq 0$ et aussi

$\sum_{k=2p}^{\infty} (-1)^k u_k = u_{2p} - \sum_{k=p}^{\infty} (u_{2k+1} - u_{2k+2}) \leq u_{2p}$ d'où $0 \leq \sum_{k=2p}^{\infty} (-1)^k u_k \leq u_{2p}$.

Le cas où n est impair se traite de même.

Exercice 15

Soit X un ensemble, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et f une fonction de X dans $\mathbb{C}$.

1. On suppose que : $(\forall x \in X)(\forall n \in \mathbb{N}) |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ où $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$. Démontrez que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X .

2. La suite $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément dans le disque ouvert $D\left(0, \frac{1}{2}\right)$ de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$? Converge-t-elle uniformément dans le disque ouvert $D(0, 1)$ de centre 0 et de rayon 1 ?

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, α_n majore $\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in X\}$ donc $\|f_n - f\|_{\infty}^X \leq \alpha_n$. Comme $(\alpha_n)_n$ converge vers 0, par majoration $(\|f_n - f\|_{\infty}^X)_n$ converge vers 0 i.e. $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X .

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : z \mapsto z^n$.

Si $|z| < \frac{1}{2}$ alors $|f_n(z)| \leq \frac{1}{2^n} = \alpha_n$ et $(\alpha_n)_n$ converge vers 0. Donc $(f_n)_n$

converge uniformément vers la fonction nulle sur $D\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

En revanche $\sup_{|z| < 1} |f_n(z)| = 1$ alors que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $D(0, 1)$. Il n'y a donc pas convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $D(0, 1)$.

Exercice 16

On pose $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$.

1. Étudiez la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. a) Démontrez que, pour tout $a > 0$, cette suite converge uniformément sur les intervalles $] -\infty, -a[$ et $[a, +\infty[$.

b) Converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Indication : on pourra considérer $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et, si $x \neq 0$, par croissances comparées, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$.

2. Par parité il suffit, pour le début de la question, de se limiter à $[a, +\infty[$. $\|f_n\|_{\infty}^{[a, +\infty[} = f_n(a)$ et donc, d'après la question précédente, $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R} \setminus] -a, a[$.

En revanche si $(f_n)_n$ convergerait uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ alors elle convergerait uniformément sur cet intervalle vers la fonction nulle et, donc, $\left(f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right)_n$

converge vers 0. Comme $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e\sqrt{\pi}}$ la convergence uniforme est en défaut.

Exercice 17

On pose $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrez que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

2. Calculez $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$.

1. $\forall (x, n) \in [0, 1] \times \mathbb{N}$, $|f_n(x) - (x^2 + 1)e^x| = \frac{2x(x^2 + 1)\operatorname{ch}(x)}{n+x} \leq \frac{4\operatorname{ch}(1)}{n}$ qui est indépendant de x et tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, donc $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $f : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$.

2. Comme chaque f_n est continue sur $[0, 1]$ la question précédente montre que la suite de terme général $\int_0^1 f_n$ converge vers $\int_0^1 f$, autrement dit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx = \int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx = \left[(x^2 - 2x + 3)e^x \right]_0^1$$

en intégrant deux fois par parties, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx = 2e - 3$.

Exercice 18

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f . On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

Démontrez que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X .

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$.

a) Étudiez la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Étudiez la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$) puis sur $]0, +\infty[$.

1. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty^X$ et, donc, $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ converge vers 0, ce qui est exclu ici.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ et, si $x \neq 0$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + n^2x^2}$ d'où la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $(f_n)_n$ vers la fonction nulle.

b) Si $x \geq a > 0$ alors $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + n^2a^2}$ d'où la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[a, +\infty[$.
 $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin(1)}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, la question 1. montre que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

Exercice 19

1. Soit (f_n) une suite d'applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une application f , et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0 , avec $x_0 \in [a, b]$.

Démontrez que f est continue en x_0 .

2. On pose, pour tout $x \in [0, 1]$, $g_n(x) = x^n$. La suite (g_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

1. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

f_n est continue en x_0 donc il existe un voisinage V de x_0 dans $[a, b]$ sur lequel $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \varepsilon$.

Si $x \in V$ alors, par inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq \|f - f_n\|_\infty + \varepsilon + \|f_n - f\|_\infty \leq 3\varepsilon$$

ce qui est la définition de la continuité de f en x_0 .

2. Si $0 \leq x < 1$, $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $1^n = 1$ donc $(g_n)_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction caractéristique de $\{1\}$ qui est discontinue en 1.

Comme chaque g_n est continue en 1 la question précédente montre que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 20

1. On note E l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.

On pose, pour tout f de E , $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Démontrez succinctement que l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est une norme sur E .

2. Soit (g_n) une suite d'applications de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g .

Démontrez que l'application g est bornée.

1. Si $f \in E$, $\{|f(x)| \mid x \in X\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et, donc, admet une borne supérieure, d'où l'existence de $\|f\|_\infty$.

Si $\|f\|_\infty = 0$ alors, pour tout $x \in X$, $0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty \leq 0$ d'où f est nulle.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in X} (|\lambda| \times |f(x)|) = |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)|$ car $x \mapsto |\lambda|$ est constante, d'où $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty$.

Enfin si $g \in E$, pour tout $x \in X$, $|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ et, donc, $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Cela finit d'établir que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .

2. Par définition de la convergence uniforme sur X , en reprenant la notation E de la question 1., si $(g_n)_n$ est à valeurs dans E et converge uniformément vers g sur X alors, à partir d'un rang n_0 , $g_n - g \in E$ et, par structure d'espace vectoriel de E , cela montre que $g \in E$ ou encore que g est bornée sur X .

Exercice 21

1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Démontrez que si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$.

2. Justifiez comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions puis démontrez que : $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

1. D'après un théorème du cours, f est continue sur $[a, b]$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|,$$

d'après l'inégalité de la moyenne. La convergence uniforme de (f_n) vers f implique : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$. On déduit du théorème d'encadrement

$$\text{que } \int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f.$$

2. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues sur $[a, b]$. Elle converge uniformément sur $[a, b]$ de somme f si, et seulement si, la suite de fonctions

$(f_n)_{n \geq 0}$ définie par $f_n = \sum_{k=0}^n u_k$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f

définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. Comme $\int_a^b f_n = \sum_{k=0}^n \int_a^b u_k$, par linéarité de

l'intégration, 1. implique $\int_a^b f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n$.

Posons $a = 0, b = 1/2$. Comme $[a, b] \subset]-1, 1[$ la série entière $\sum x^n$ converge uniformément sur $[a, b]$. Avec $u_n(x) = x^n$, on a $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in [a, b]$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u_n = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}, \text{ donc } \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Exercice 22

1. Démontrez que toute série de fonctions normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X .

2. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

1. Dire que $\sum u_n$ converge normalement sur X signifie que $\sum \|u_n\|_\infty^X$ est une série à termes positifs convergente. Comme, pour tout $x \in X$, $|u_n(x)| \leq \|u_n\|_\infty^X$, la série numérique $\sum u_n(x)$ converge absolument, si $x \in X$ et l'on peut écrire

$$\forall x \in X, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \|u_k\|_\infty^X = r_n.$$

Comme $(r_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et comme r_n est indépendant de x , la suite de fonctions $(R_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur X i.e. la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur X .

2. Compte tenu de ce résultat, il suffit de prouver la convergence normale de $\sum f_n$ sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ où $f_n(z) = \frac{n^2}{n!} z^n$.

$$\forall z \in D, |f_n(z)| \leq \frac{n^2}{n!} R^n = \lambda_n.$$

$\lambda_n > 0$ est indépendant de z et $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{R}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \in [0, 1[$.

D'après la règle de d'Alembert pour les séries à termes positifs, $\sum \lambda_n$ converge. Donc $\sum f_n$ converge normalement sur D .

Exercice 23

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], u_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$.

1. Démontrez que S est dérivable sur $[0, 1]$.

2. Calculez $S'(1)$.

Indication : pensez à décomposer une fraction rationnelle en éléments simples.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $u'_n(x) = -\frac{x}{n(n+x)}$.

Comme, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0, 1]$, $|u'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, la série $\sum u'_n$ converge normalement *a fortiori* uniformément sur $[0, 1]$. Comme $u_n(0) = 0$, la série $\sum u_n(0)$ converge, on déduit du théorème de dérivation des séries de fonctions que $S \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $\forall x \in [0, 1]$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+x)}$.

2. $S'(1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = -1$ car

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n+1} - 1$ par télescopage.

Exercice 24

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrez l'implication : (1) $\Rightarrow$ (2).

(1) La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A ,

(2) la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur A .

2. La série entière $\sum z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 ?

1. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur A alors la suite (R_n) définie par

$R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur A .

Donc : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in A$, $|R_n(x)| \leq \varepsilon/2$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n = R_n - R_{n+1}$, on a

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in A$, $|f_n(x)| \leq |R_n(x)| + |R_{n+1}(x)| \leq \varepsilon$.

i.e. la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur A .

2. Soit $f_n(z) = z^n$.

Comme, pour $n \geq 1$, $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} \neq 0$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur D , le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. Donc la série entière $\sum z^n$ n'est pas uniformément convergente sur D .

Exercice 25

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$, x désignant un réel.

1. Étudiez la simple convergence de cette série. On note D l'ensemble des x où cette série converge, et $S(x)$ la somme de cette série.

2. a) Étudiez la convergence normale puis la convergence uniforme de cette série sur D .

b) La fonction S est-elle continue sur D ?

1. Notons $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} x^n$ pour $n \geq 1$. On a $|u_n(x)| \leq |x|^n$. Comme la série géométrique $\sum |x|^n$ converge si $|x| < 1$, la série entière donnée est de rayon de convergence $R \geq 1$. Comme $\sum u_n(-1)$ diverge, la série entière est de rayon $R \leq 1$. Finalement $R = 1$. Comme $\sum u_n(1)$ converge avec le théorème spécial des séries alternées, l'ensemble de définition de S est $D =]-1, 1[$. De plus, pour tout $x \in]-1, 1[$, $S(x) = -\ln(1-x)$.

2. a) Comme $\sup_{x \in D} |u_n(x)| = \frac{1}{n}$, la série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D . On sait, d'après le cours sur les séries entières, que $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur tout compact inclus dans $] -1, 1[$.

On n'a pas convergence uniforme sur $] -1, 1[$. En effet, si c'était le cas, on déduirait du théorème de la double limite que $\sum \lim_{x \rightarrow -1} u_n(x)$ converge ce qui

n'est pas puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

b) Montrons que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Si $x \in [0, 1]$, la série $\sum u_n(x)$ est une série alternée convergente.

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0$. Si $x \in]0, 1[$, $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{n}{n+1} x < 1$ pour $n \geq 1$.

Donc $(|u_n(x)|)_{n \geq 1}$ est décroissante et de limite nulle. Donc $\sum u_n(x)$ converge avec le théorème spécial des séries alternées. Il s'ensuit que

$\forall x \in [0, 1]$, $\forall n \geq 1$, $|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} u_k(x) \right| \leq |u_n(x)| = \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

La suite de fonctions $(R_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle i.e. la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

D'après le cours sur les séries entières, on sait que S est continue et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$, intervalle ouvert de convergence. On déduit du théorème de continuité des séries de fonctions et de 2.a) que S est continue sur $[0, 1]$. Donc S est continue sur D . Il s'ensuit que $S(1) = -\ln(2)$.

Exercice 26

1. Démontrez que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. On pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
Démontrez que : $f(z) \times f(z') = f(z + z')$, sans utiliser le fait que $f(z) = e^z$.
3. Déduisez-en que : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) \neq 0$ et $\frac{1}{f(z)} = f(-z)$.

1. Notons $u_n(z) = \frac{z^n}{n!}$. La série $\sum |u_n(z)|$ converge de somme $e^{|z|}$. Donc la série $\sum u_n(z)$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. On peut aussi justifier l'absolue convergence avec la règle de d'Alembert.

2. Notons $v_n(z') = \frac{z'^n}{n!}$. On déduit du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes que $f(z) \times f(z') = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(z, z')$, avec

$$w_n(z, z') = \sum_{k=0}^n u_k(z) v_{n-k}(z') = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k}.$$

D'après la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$, $w_n(z, z') = \frac{(z + z')^n}{n!}$.

Donc $f(z) \times f(z') = f(z + z')$.

3. En prenant $z' = -z$ dans l'égalité précédente, on a $f(0) = 1 = f(z) \times f(-z)$.

Donc : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) \neq 0$ et $\frac{1}{f(z)} = f(-z)$.

Exercice 27

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Démontrez que cette série converge uniformément sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon r tel que $0 \leq r < R$.

2. Démontrez que la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue en tout point du disque ouvert de convergence.

1. Soit $r < R$. Pour tout z tel que $|z| \leq r$, $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n = \lambda_n$. Comme λ_n est indépendant de z et $\sum \lambda_n$ converge ; donc $\sum a_n z^n$ converge normalement *a fortiori* uniformément sur le disque fermé de centre 0 et de rayon r .

2. C'est une conséquence du théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions continues.

Exercice 28

Calculez le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

1. $\sum n^\alpha z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$.

1. Notons $u_n = n^\alpha z^n$. Si $n \geq 1$ et $z \neq 0$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |z|$.

D'après la règle de d'Alembert pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge si $|z| < 1$ et diverge si $|z| > 1$. On déduit de la définition du rayon de convergence que $R = 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n \right| \leq |x|^n$. Comme la série géométrique $|x|^n$ converge si $|x| < 1$, on a $R \geq 1$. Comme la série $\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ diverge grossièrement puisque $\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in 3\mathbb{N} \\ -\frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$ on a $R \leq 1$.

Finalement $R = 1$.

Exercice 29

1. Démontrez que si $|a_n| \sim_{n \rightarrow \infty} |b_n|$ alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.

2. Trouvez le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{i^n n^2}{n^2 + 1} z^n$ où $i^2 = -1$.

1. $|a_n| \sim_{n \rightarrow \infty} |b_n| \Rightarrow |a_n| |z|^n \sim_{n \rightarrow \infty} |b_n| |z|^n$. Du théorème d'équivalence des séries à termes positifs, on déduit que $\sum |a_n| |z|^n$ converge si, et seulement si, $\sum |b_n| |z|^n$ converge.

• Si $|z| < R_a$, $\sum |a_n| |z|^n$ converge, donc $\sum |b_n| |z|^n$ converge. Donc $R_b \geq R_a$.

• Si $|z| < R_b$, $\sum |b_n| |z|^n$ converge, donc $\sum |a_n| |z|^n$ converge. Donc $R_a \geq R_b$.

Donc $R_a = R_b$.

2. Posons $a_n = \frac{i^n n^2}{n^2 + 1}$. Alors $|a_n| = \frac{n^2}{n^2 + 1} \sim_{n \rightarrow \infty} 1$. D'où $R_a = 1$.

Exercice 30

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) x^n$.

1. Si $\sum a_n$ diverge, alors $R \leq 1$. Comme (a_n) est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n||z^n| \leq M|z|^n$. Comme la série géométrique $\sum M|z|^n$ converge pour $|z| < 1$, il en est de même de la série $\sum |a_n||z^n|$ par comparaison de séries à termes positifs, donc $R \geq 1$. Finalement $R = 1$.

2. Comme $\left| \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right| \leq 1$ et $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^k$ si $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, la série $\sum \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ diverge grossièrement, on déduit de 1. que $R = 1$.

Exercice 31

1. Que savez-vous du rayon de convergence de la somme de deux séries entières (on ne demande pas de démonstration) ?

2. Développez en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$. La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? Si oui quelle est sa somme ?

1. Avec des notations évidentes, $R_S \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$. Il est à noter que l'on peut avoir $R_a = R_b$ et $R_S \neq R_a$ comme le montre l'exemple où $a_n = -b_n = 1$. On a $R_a = R_b = 1$ et $R_S = +\infty$.

2. $\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, R_a = 1$.

$\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \ln(1-2x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n, R_b = \frac{1}{2}$.

Donc : $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 2^n}{n} x^n, R_f = \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{4} < R$, donc $f\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{5}{8}\right)$. Comme $\sum 2^{-n} a_n$ converge et $\sum 2^{-n} b_n$ diverge, la série $\sum 2^n(a_n + b_n)$ diverge.

Exercice 32

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ admet une limite ℓ .

1. Démontrez que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont le même rayon de convergence. On le note R .

2. Démontrez que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est dérivable sur l'intervalle $] -R, R[$.

1. Appliquons la règle de d'Alembert à la série à termes positifs $\sum |a_n x^n|$ si $x \neq 0$. Comme il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $a_n \neq 0$ si $n \geq N$, on a : $\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell |x|$. $\sum |a_n x^n|$ converge si $\ell |x| < 1$ et diverge si $\ell |x| > 1$.

D'où le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$ (avec les conventions habituelles) par définition du rayon de convergence.

Procédons de même. $\left| \frac{(n+1)a_{n+1} x^n}{n a_n x^{n-1}} \right| = |x| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell |x|$. Donc le rayon de convergence de $\sum n a_n x^{n-1}$ est aussi égal à R .

2. L'application $u_n : x \mapsto a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u'_n(x) = n a_n x^{n-1}$. Soit $r \in]0, R[$. Pour tout $n \geq 1$ et $x \in [-r, r]$, $|u'_n(x)| \leq n |a_n| r^{n-1} = \lambda_n$.

Comme la série entière $\sum n a_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R , la série numérique $\sum \lambda_n$ converge. Il s'ensuit que la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement *a fortiori* uniformément sur $[-r, r]$ donc sur tout compact inclus dans $] -R, R[$. Il découle du théorème de dérivation des séries de fonctions

que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -R, R[$ et $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Exercice 33

Déterminez le développement en série entière à l'origine de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en précisant son rayon de convergence.

f est définie sur $] -1, 1[$ et $\forall x \in] -1, 1[, f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$.

$\forall x \in] -1, 1[, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = 2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$.

Ceci étant vrai pour $|x| < 1$, on a $R \geq 1$. Comme $\sum \frac{1}{2p+1}$ diverge, $R = 1$.

Exercice 34

1. Déterminez le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Déterminez le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$, et précisez le rayon de convergence.

3. a) Déterminez $S(x)$.

b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(0) = 1, f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{x})$ pour $x > 0, f(x) = \cos(\sqrt{-x})$ pour $x < 0$.

Démontrez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{x^n}{(2n)!} \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} \text{ terme général de la série de somme } e^{|x|}$$

La série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ étant convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, son rayon de convergence est $+\infty$.

$$2. \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$.

$$3. a) \text{ Si } x \geq 0, S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(\sqrt{x}).$$

$$\text{Si } x < 0, S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} \cos(\sqrt{-x}).$$

b) $f = S$ fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$. D'après le cours sur les séries entières, $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Exercice 35

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de période 2π , définie ainsi :

$$f(x) = x \text{ sur }]-\pi, \pi[\text{ et } f(-\pi) = 0$$

1. La série de Fourier de f converge-t-elle vers $f(x)$ en tout point x de $\mathbb{R}$?

2. Déterminez la série de Fourier de f .

Le lecteur a intérêt à faire un dessin.

1. $f \in \mathcal{C}^1 \mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et f est impaire, pour tout $n \geq 0, a_n(f) = 0$ et pour tout $n \geq 1, b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ de somme la fonction $\tilde{f} : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ qui est égale à $f(x)$ si f est continue en x .

Donc $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2\pi\mathbb{Z}\}$ et $\tilde{f}(\pi + 2k\pi) = \frac{1}{2}(\pi - \pi) = 0$ si $k \in \mathbb{Z}$.

Comme $f(\pi + 2k\pi) = 0$ par définition de f ($f(-\pi) = 0$ et f est 2π -périodique) Donc la série de Fourier de f converge simplement et a pour somme f sur $\mathbb{R}$.

2. Par intégration par parties,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[-t \sin(nt) \right]_0^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos(nt) dt = \frac{2(-1)^n}{n}.$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx).$$

Complément : le théorème de Parseval applicable car $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^2}{3} \text{ qui implique } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 36

Soit f la fonction 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall t \in [0, 2\pi[, f(t) = t^2$.

1. Expliquez pourquoi, pour tout réel t , la série de Fourier de f converge, et précisez sa limite.

2. Déterminez la série de Fourier de f . En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Le lecteur a intérêt à faire un dessin.

1. $f \in \mathcal{C}^1 \mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ de somme la fonction $\tilde{f} : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ qui est égale à $f(x)$ si f est continue en x i.e. $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et sinon, $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}((2\pi)^2 + 0) = 2\pi^2$.

$$2. \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t^2 e^{-int} dt.$$

Pour calculer cette intégrale, on peut, soit utiliser sa calculette, soit effectuer 2 intégrations par parties, soit noter qu'une primitive de la fonction $t \mapsto t^2 e^{-int}$ est de la forme $(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) e^{-int}$ et déterminer $\alpha = -\frac{1}{ni}, \beta = \frac{2}{n^2}, \gamma = \frac{-2i}{n^3}$.

dans le cas où $n \neq 0$. Donc $c_0(f) = \frac{(2\pi)^2}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}^*, c_n(f) = \frac{2}{n^2}(1 + ni\pi)$.

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{n^2}(1 + ni\pi)e^{inx}.$$

$$\text{En particulier, } \tilde{f}(0) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{n^2}(1 + ni\pi) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\text{car } \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \frac{1}{k^2}(1 + i\pi k) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}. \text{ D'où } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 37

Soit f la fonction 2π -périodique définie par : $\forall x \in [-\pi, \pi[, f(x) = x^2$.

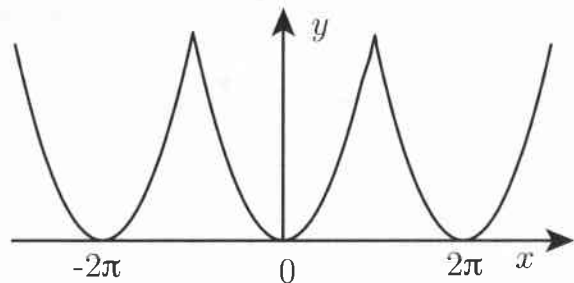
1. a) Expliquez pourquoi la série de Fourier de f converge sur $\mathbb{R}$. Précisez la somme de cette série.

b) La série de Fourier de f converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

2. a) Déterminez la série de Fourier de f .

b) Déduisez-en la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

1. f est 2π -périodique paire telle que, pour tout $x \in [0, \pi]$, $f(x) = x^2$, alors $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et à valeurs réelles, le théorème de convergence normale s'applique. La série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f .



2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$, $a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$, et, pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) = -\frac{1}{n} b_n(Df) = -\frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx$ d'où

$$a_n(f) = \frac{4}{n^2\pi} \left[x \cos(nx) \right]_0^\pi - \frac{4}{n^2\pi} \int_0^\pi \cos(nx) dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

$$b) \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

En particulier, comme $f(0) = 0$, on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 38

1. Démontrez que pour tout entier n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculez $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 < f_n(t) \leq \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{-2}$. Donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Il s'ensuit que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. La suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+$, $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers f définie par $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ si $t \in [0, 1]$, 0 si $t > 1$ et $\frac{1}{2+e^{-1}}$ si $t = 1$.

Comme f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et comme la condition de domination a été prouvée en 1. le théorème de convergence dominée implique

$$\lim(u_n) = \int_0^{+\infty} f = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 39

Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{-1}{1+t^2} \right)^n dt$.

1. Justifiez que I_n est bien définie.

2. Démontrez que $((-1)^n I_n)_{n \geq 1}$ décroît et déterminez sa limite.

3. La série $\sum I_n$ est-elle convergente ?

1. Notons $(-1)^n f_n(t) = \left(\frac{-1}{1+t^2} \right)^n$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$. Comme $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{2n}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Il s'ensuit que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc $\forall n \geq 1, I_n \in \mathbb{R}$.

2. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{1+t^2} \in]0, 1]$ la suite $(f_n(t))_{n \geq 1}$ est décroissante,

donc la suite $\left(\int_0^{+\infty} f_n \right)_{n \geq 1} = ((-1)^n I_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Comme la suite $(f_n(t))_{n \geq 1}$ est décroissante, on a : $\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq f_n(t) \leq f_1(t)$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f définie par $f(t) = 0$ si $t > 0$ et $f(0) = 1$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$,

toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée étant vérifiées, on

peut conclure que la suite $((-1)^n I_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\int_0^{+\infty} f = 0$.

3. La série $\sum I_n$ converge avec le théorème spécial des séries alternées dont les hypothèses ont été vérifiées dans les questions précédentes.

Exercice 40

On pose $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2 x^2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Étudiez la convergence simple sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis l'uniforme convergence sur $[0, 1]$.

2. Trouvez la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. $f_n(0) = 1$. Pour x fixé et > 0 , $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Donc la suite de fonctions

$(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Les fonctions f_n étant continues sur $[0, 1]$ et pas f , la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], 0 \leq f_n(x) \leq \varphi(x) = e^{-x}$.

La fonction φ est intégrable sur $[0, 1]$ car continue sur ce segment. Comme f est continue par morceaux sur $[0, 1]$, les hypothèses du théorème de convergence

dominée sont toutes vérifiées. On conclut que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \int_0^1 f = 0$.

Exercice 41

N.B : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

2. La fonction $g : x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ est-elle intégrable sur $]1, +\infty[$?

1. f est continue sur $]0, +\infty[$.

Comme $\sqrt{x} \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ par croissances comparées, $\sqrt{x} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Il

s'ensuit que f est intégrable sur $]0, 1]$ d'après la règle de Riemann.

Comme, par croissances comparées, $x^{3/2} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, la fonction f est

intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après la règle de Riemann.

Donc f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On notera que le changement de variable $t = \frac{1}{x}$ donne $\int_0^{+\infty} f = 0$.

2. g est continue sur $]1, +\infty[$. Par croissances comparées, $x^2 g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

La fonction g est intégrable sur $[2, +\infty[$ d'après la règle de Riemann.

$(1-x)^{\frac{1}{2}} g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} e^{-1}$. Il s'ensuit que g est intégrable sur $]1, 2]$ d'après la

règle de Riemann. Donc g est intégrable sur $]1, +\infty[$.

Exercice 42

On pose, pour tout x de $]0, +\infty[$ et pour tout t de $[0, +\infty[$, $f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$.

1. Démontrez que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose, pour $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

2. Démontrez que, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. Démontrez que Γ est de classe C^1 et exprimez $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

1. Si $x \in \mathbb{R}$ et $f_x : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ alors f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$, en effet f_x est continue positive sur $]0, +\infty[$ et on a les comparaisons :

• $f_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ donc f_x est intégrable sur $]0, 1]$ si, et seulement si, $x > 0$;

• $f_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On conclut en rappelant que f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, elle l'est sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$.

2. Si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a, par parties : $\int_{1/n}^n f_{x+1} = \left[t^x e^{-t}\right]_{1/n}^n + x \int_{1/n}^n f_x$

d'où, quand $n \rightarrow \infty$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. $f : (x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[^2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \ln(t) f(x, t)$.

Soit $]a, b[\subset]0, +\infty[$.

$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) = |\ln(t)| (f(a, t) + f(b, t))$.

La fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$. Elle est d'une part, intégrable sur $[1, +\infty[$, puisque $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$, d'autre part intégrable sur $]0, 1]$ puisque

$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(t^{\frac{a}{2}-1})$. Par conséquent φ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On déduit

du théorème de dérivation des intégrales paramétrées que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln(t) dt$.

Exercice 43

1. Énoncez le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

2. Prouvez que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. Trouvez une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont f est solution.

1. Soient I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$.

Si • pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur J ,

• la fonction f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $I \times J$

• pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur J

• pour tout $t \in J$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I

• pour tout segment $[a, b] \subset I$, il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times J, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t),$$

alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

2. La fonction $f : (x, t) \mapsto e^{-t} \cos(xt)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2, |f(x, t)| \leq e^{-t^2}$. Donc, par croissances comparées, $x^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

4 des 5 hypothèses du théorème rappelé sont vérifiées.

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -te^{-t^2} \sin(tx) \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2} = \varphi(t).$$

La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $t \mapsto t^{-2}$ au voisinage de $+\infty$. On déduit de 1. que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \mathbb{R}$ et $g'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(tx) dt$.

3. Effectuons une intégration par parties en posant $u(t) = \frac{e^{-t^2}}{2}, v(t) = \sin(tx)$.

Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et comme $(uv)(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} uv = 0$, $f'(x) = -\frac{x}{2} f(x)$. La fonction f est solution de l'équation différentielle linéaire

du premier ordre $y' + \frac{x}{2}y = 0$ que l'on résout classiquement en écrivant

$$\frac{d}{dx} (e^{\frac{x^2}{4}} y(x)) = 0. \text{ Donc } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)e^{\frac{-x^2}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{-x^2}{4}}.$$

Exercice 44

Calculez l'intégrale double $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

où D est défini par : $x^2 + y^2 - 2y \geq 0; x^2 + y^2 - 1 \leq 0; x \geq 0; y \geq 0$.

Un dessin des cercles d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 - 2y = 1$ montre que D est décrit en coordonnées polaires par $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ et $2 \sin(\theta) \leq \rho \leq 1$ d'où :

$$I = \int_0^{\pi/6} \left(\int_{2 \sin(\theta)}^1 \rho^2 d\rho \right) d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/6} [1 - 8 \sin^3(\theta)] d\theta = \frac{\pi}{18} + \sqrt{3} - \frac{16}{9}$$

car l'intégrale se calcule facilement si l'on note que $\sin^3 = (1 - \cos^2)(-\cos')$.

Exercice 45

1. Démontrez que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Pour chaque nombre $r > 0$, on note C_r le carré $[0, r] \times [0, r]$ et D_r l'ensemble défini par : $x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0$.

a) Quelle relation y a-t-il entre $\iint_{C_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ et $\int_0^r e^{-t^2} dt$?

b) Calculez en fonction de r l'intégrale double $\iint_{D_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

c) Déduisez de ce qui précède la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Indication : on pourra remarquer que $D_r \subset C_r \subset D_{2r}$.

1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $t \mapsto t^{-2}$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées. Elle est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. a) La fonction $f : (x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ étant continue sur le compact C_r , on a : $\iint_{C_r} f = \left(\int_0^r e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^r e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_0^r e^{-x^2} dx \right)^2$.

b) Par changement de variables en coordonnées polaires, on a

$$\iint_{D_r} f(x, y) dx dy = \iint_{D'_r} \rho e^{-\rho^2} d\rho d\theta \text{ où}$$

$$D'_r = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

$$\text{Donc } \iint_{D_r} f(x, y) dx dy = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \left(\int_0^r \rho e^{-\rho^2} d\rho \right) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-r^2}).$$

$$\text{Comme } \forall r > 0, D_r \subset C_r \subset D_{2r}, \iint_{D_r} f \leq \iint_{C_r} f \leq \iint_{D_{2r}} f,$$

On a, en tenant compte de la question 2.a),

$$\forall r > 0, \frac{\pi}{4} (1 - e^{-r^2}) \leq \left(\int_0^r e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-(2r)^2}).$$

Par passage à la limite, d'après 1. on a $I^2 = \frac{\pi}{4}$. Comme $I > 0$, $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 46

Résolvez sur l'intervalle $]1, +\infty[$ l'équation différentielle : $y' + \frac{x}{1-x^2} y = 2x$.

L'équation différentielle donnée $(\mathcal{L})$ est linéaire du premier ordre à coefficients fonctions continues sur $]1, +\infty[$. Une primitive de $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ sur $]1, +\infty[$ est

$$\text{la fonction } x \mapsto -\frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right).$$

$$\text{Donc } \forall x > 1, (\mathcal{L}) \iff \frac{d}{dx} \left(\frac{y(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{d}{dx} (2\sqrt{x^2 - 1}).$$

Donc la solution générale de $(\mathcal{L})$ sur $]1, +\infty[$ est :

$$x \mapsto y(x) = C\sqrt{x^2 - 1} + 2(x^2 - 1) \text{ où } C \text{ parcourt } \mathbb{R}.$$

Exercice 47

Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos(x)$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

L'équation différentielle donnée ($\mathcal{L}$) est linéaire du second ordre à coefficients constants et à second membre fonction continue sur $\mathbb{R}$.

$$y'' + y = 0 \iff \exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = a \cos(x) + b \sin(x).$$

Utilisons, comme demandé, la méthode de variation des constantes.

On cherche $a, b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = a(x) \cos(x) + b(x) \sin(x)$.

$$a'(x), b'(x) \text{ sont solutions du système } \begin{cases} a'(x) \cos(x) + b'(x) \sin(x) = 0 \\ -a'(x) \sin(x) + b'(x) \cos(x) = \cos(x) \end{cases}$$

Ce système est de Cramer et avec les formules de Cramer, on obtient :

$$a'(x) = -\sin(x) \cos(x) \text{ et } b'(x) = \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

$$\text{Une primitivation immédiate donne : } \begin{cases} a(x) = \frac{\cos^2(x)}{2} + \alpha \\ b(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin(2x)}{2} \right) + \beta \end{cases} \text{ avec}$$

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La solution générale de ($\mathcal{L}$) est :

$$x \mapsto y(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \frac{\cos^3(x)}{2} + x \frac{\sin(x)}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x).$$

$$\text{Comme } \frac{\cos^3(x)}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) = \frac{\cos(x)}{2} (\cos^2(x) + \sin^2(x)) = \frac{\cos(x)}{2},$$

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \frac{\cos(x)}{2} + \frac{x \sin(x)}{2}.$$

Exercice 48

Toute fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ peut être écrite, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, sous la forme $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, u et v désignant deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de trouver, s'il en existe, des fonctions f satisfaisant aux conditions suivantes :

C1. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

C2. Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$.

1. Démontrez que, si u et v existent, alors, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

2. On suppose que $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + 3x$.

a) Trouvez les fonctions v telles que les conditions C1 et C2 soient satisfaites.

b) Démontrez qu'il existe une fonction $f = u + iv$ unique telle que $f(0) = 1$ et explicitez $f(z)$ en fonction de z .

c) Pour cette fonction f , construisez dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, le point A d'affixe $f(i)$.

1. Les deux équations obtenues sont une conséquence immédiate de C2 et du théorème de Schwarz puisque u et v sont de classe ≥ 2 .

$$2. a) \text{ On a } \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 4x + 3 = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y).$$

Donc $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 4xy + 3y + \varphi(x)$ où $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

$$\text{Mais alors } \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 6xy + 4y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 6xy + 4y.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = 0$. D'où $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = C$.

Il s'ensuit que $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 4xy + 3y + C$, puis que

$$f(z) = (x + iy)^3 + 2(x + iy)^2 + 3(x + iy) + iC.$$

$f(0) = 0 \Rightarrow f(z) = z^3 + 2z^2 + 3z$. En particulier $f(i) = -2 + 2i$ est l'affixe du point A de coordonnées $(-2, 2)$.

Exercice 49

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ (H).

1. Trouvez les solutions de cette équation développables en série entière à l'origine. Déterminez la somme des séries entières obtenues.

2. Indiquez une méthode pour trouver toutes les solutions de l'équation différentielle sur chacun des intervalles $]0, 1[$, $] - \infty, 0[$ et $]1, +\infty[$.

1. On cherche y solution de (H) et développable en série entière en 0.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ pour } x \in]-R, R[\text{ et } R > 0. \text{ On sait que } y \in \mathcal{C}^\infty(]-R, R[).$$

$$\text{et } y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

De l'unicité des coefficients du développement en série entière de la fonction nulle, on déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n + 3na_n + n(n-1)a_n - n(n-1)a_{n+1} = 0$

$$(1) \iff n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 a_n = n(n+1)a_{n+1} \iff (n+1)a_n = na_{n+1}.$$

Il en résulte que $a_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $\frac{a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{n+1}$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = na_1$.

Si $a_1 = 0$ alors $R = +\infty$ et sinon, $R = 1$.

$$\text{On a } \forall x \in]-1, 1[, y(x) = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = a_1 x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = a_1 \frac{x}{(1-x)^2}.$$

L'ensemble des solutions de (H) est donc la droite engendrée par la fonction $] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{(1-x)^2}$.

2. Soit $u : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, x \mapsto \frac{x}{(1-x)^2}$. La restriction de u à chacun des intervalles $]0, 1[,]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ est solution de (H) et ne s'y annule pas car l'équation différentielle est à coefficients polynomiaux et u est rationnelle.

En posant $y = uz$, on a, d'après le cours le théorème suivant : y est solution de (H) sur un intervalle I où u ne s'annule pas si, et seulement si, $Z = u^2 z'$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène.

Exercice 50

On pose $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Démontrez que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Démontrez que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

1. Comme, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\|(x, y)\|_2.$$

Donc $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par théorème généraux, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Toujours par théorème généraux, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Donc y a des dérivées partielles.

Pour $t \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{t}(f(t, 0) - f(0, 0)) = 0$ implique l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et sa valeur qui est 0. Comme $f(x, y) = f(y, x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe et est égale à 0.

En conclusion, f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 51

1. Étudiez les extrema de la fonction définie par : $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ en utilisant la méthode générale de recherche d'extrema d'une fonction de 2 variables.

2. Retrouvez géométriquement le résultat précédent.

Indication : quelle est la surface d'équation $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$?

1. Notons D le disque fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon 2.

f est définie et continue sur le compact D , donc admet un minimum et un maximum. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de D . Si un extremum est atteint à l'intérieur de D alors c'est un point critique de f . De plus df n'est nulle qu'au centre de D avec $rt - s^2 = \frac{1}{4} > 0$, il s'agit d'un maximum local (au moins). Or $f(0, 0) = 2$ et c'est, clairement, le maximum de f sur D .

Si (x, y) appartient au cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2 alors $f(x, y) = 0$ et c'est clairement le minimum de f sur D .

2. Si $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ alors $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, ce qui montre que $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ est une équation de la demi-sphère de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 2 située au dessus du plan xOy . Sur cette surface z est maximal uniquement en $(0, 0, 2)$ et minimal sur l'intersection avec xOy , laquelle est le cercle de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 2 (tracé dans xOy).

Exercice 52

1. Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E .

Montrez que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

2. Démontrez que si A est un sous-espace vectoriel de E , alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E .

1. Malheur à ceux qui ont eu cette définition de l'adhérence dans leurs cours. Il faut ici définir $x \in \bar{A}$ par : $\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$.

Si $x \in \bar{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on choisit x_n dans $B(a, 2^{-n}) \cap A$. Alors $(x_n)_n$ est à valeurs dans A et converge vers x par construction.

Réciproquement si x est la limite d'une suite convergente $(x_n)_n$ d'éléments de A et si $r > 0$, alors à partir d'un rang n_0 on a $\|x_n - x\| < r$ et, donc $x_{n_0} \in B(a, r) \cap A$ qui est donc non vide.

2. Comme $0 \in A$ et comme $A \subset \bar{A}$ on a $0 \in \bar{A}$.

Soient $(a, b) \in (\bar{A})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On choisit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ des suites d'éléments de A qui convergent respectivement vers a et b . Par structure d'espace vectoriel de l'ensemble des suites convergentes et par linéarité de la limite $(\lambda a_n + \mu b_n)$ converge vers $\lambda a + \mu b$ et c'est une suite d'éléments de A . Par suite $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 53

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E .

Démontrez que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

P1. f est continue en a .

P2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

2. Soit A une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé E , et soient f et g deux applications continues de E dans F , F désignant un espace vectoriel normé. Démontrez que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

1. Supposons **P1** et considérons une suite (x_n) d'éléments de E qui converge vers a . Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la continuité il existe $r > 0$ tel que $x \in B(a, r) \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$.

Par définition de la convergence de $(x_n)_n$ vers a il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - a\| < r$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|f(x_n) - f(a)\| \leq \varepsilon$, ce qui montre que $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.

Supposons que **P1** n'est pas vérifiée. Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $r > 0$, $B(a, r)$ contient un élément x vérifiant $\|f(x) - f(a)\| \geq \varepsilon_0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on choisit x_n dans $B(a, 2^{-n})$ tel que $\|f(x_n) - f(a)\| \geq \varepsilon_0$. Alors $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de E qui converge vers a mais telle que $(f(x_n))_n$ est à distance au moins ε_0 de $f(a)$, donc **P2** n'est pas vérifiée.

Cela établit l'équivalence entre **P1** et **P2**.

2. Si $x \in E = \overline{A}$ on choisit $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(a_n) = g(a_n)$ par hypothèse et, par unicité de la limite, la question précédente montre que $f(x) = g(x)$. Donc f et g coïncident sur E .

Exercice 54

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1. A est un sous-ensemble compact de E , et f une fonction de E dans F . Démontrez que si f est continue sur A , alors $f(A)$ est un sous-ensemble compact de F .

2. On suppose que g est une fonction continue de E dans $\mathbb{C}$.

Démontrez que si A est un sous-ensemble compact de E , alors :

a) $g(A)$ est une partie bornée de $\mathbb{C}$;

b) $\exists x_0 \in A$ tel que $\sup_{x \in A} |g(x)| = |g(x_0)|$.

1. Soit $(b_n)_n \in f(A)^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $a_n \in A$ tel que $b_n = f(a_n)$.

Comme A est compact il existe φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(a_{\varphi(n)})_n$ converge dans A ; on note a sa limite.

Par continuité de f en a la suite de terme général $f(a_{\varphi(n)})$ converge vers $f(a)$ i.e. $(b_{\varphi(n)})_n$ converge vers l'élément $f(a)$ de $f(A)$. Cela établit la compacité de $f(A)$.

2. a) Comme g est continue sur A compact la question précédente montre que $g(A)$ est un compact de $\mathbb{C}$ et, donc, une partie bornée.

b) De la même façon $|g|(A)$ est un compact de $\mathbb{R}_+$ et, si l'on ajoute l'hypothèse $A \neq \emptyset$, ce compact est non vide. Comme tout compact non vide de $\mathbb{R}$ admet un maximum l'existence de x_0 est assurée.

Exercice 55

Soit E un espace normé complet et soit A un sous-ensemble de E .

1. Démontrez que : A complet $\iff A$ fermé.

2. Pour chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$, dites s'il est complet ou non, en justifiant votre réponse :

a) $]0, 1]$,

b) $[-2, 2] \cup [3, +\infty[$,

c) $]0, 1 \cup]-\infty, 2]$.

1. Si A est complet et si $a \in \overline{A}$ il existe $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a . Cette suite est de Cauchy dans A complet donc converge dans A , par suite $a \in A$. Cela montre que A est fermé.

Si A est fermé et si $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy dans A alors elle est de Cauchy dans E complet et, donc converge vers un élément a de E , par définition adhérent à A . Comme A est fermé le point a est dans A , donc $(a_n)_n$ converge dans A , ce qui montre que A est complet.

2. $\mathbb{R}$ est complet, on peut donc utiliser la question précédente.

a) 0 est adhérent à $]0, 1]$ sans lui appartenir, ce qui montre que $]0, 1]$ n'est pas complet.

b) $[-2, 2] \cup [3, +\infty[$ est fermé comme réunion de deux fermés, donc complet.

c) Cet ensemble est en fait $] -\infty, 2]$ fermé, donc complet.

Exercice 56

Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrez que si f est une application linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1. f est continue sur E ,

P2. f est continue en 0,

P3. $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|w\|$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications linéaires et continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$.
Démontrez que φ est linéaire et continue.

1. On a immédiatement **P1** $\Rightarrow$ **P2**.

Si **P2** est vérifiée alors il existe $r > 0$ tel que sur la boule fermée de centre 0 et de rayon r on a $\|f(x)\| \leq 1$.

Si $x \in E \setminus \{0\}$ en posant $x' = \frac{rx}{\|x\|}$ on a $\|x'\| = r$ et, par linéarité de f et

homogénéité de la norme $\|f(x')\| = \frac{r}{\|x\|} \|f(x)\| \leq 1$, d'où $\|f(x)\| \leq \frac{\|x\|}{r}$.

C'est encore vérifié si $x = 0$, d'où **P3**.

Si **P3** est vérifiée alors $\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| \leq k\|x - y\|$, ce qui montre que f est lipschitzienne sur E donc continue.

On a montré l'équivalence des **Pi**.

2. L'inégalité de la moyenne montre que φ est lipschitzienne de rapport 1, comme elle est linéaire la question précédente montre qu'elle est continue sur E .

Exercice 57

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout f de E : $p_\infty(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ et $p_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1. a) Démontrez succinctement que p_∞ et p_1 sont deux normes sur E .

b) Démontrez qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E , $p_1(f) \leq p_\infty(f)$.

c) Démontrez que tout ouvert pour la norme p_1 est un ouvert pour la norme p_∞ .

2. Démontrez que les normes p_1 et p_∞ ne sont pas équivalentes.

1. a) Si $f \in E$ alors, par compacité de $[0, 1]$ f est bornée et, donc, $p_\infty(f)$ est définie.

Si $p_\infty(f) = 0$ alors pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq p_\infty(f) = 0$ d'où $f = 0$.

Si $g \in E$, $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq p_\infty(f) + p_\infty(g)$ et, donc, $p_\infty(f + g) \leq p_\infty(f) + p_\infty(g)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, comme $x \mapsto |\lambda|$ est constante, on a $p_\infty(\lambda f) = \sup_{x \in [0, 1]} (|\lambda| \times |f(x)|) = |\lambda| \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = |\lambda| p_\infty(f)$.

De même si $p_1(f) = 0$, comme $|f|$ est continue et positive sur $[0, 1]$ d'intégrale nulle, on a $f = 0$.

Par linéarité de l'intégration $p_1(\lambda f) = |\lambda| p_1(f)$.

Pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ et, en intégrant sur $[0, 1]$, il vient $p_1(f + g) \leq p_1(f) + p_1(g)$.

Par suite p_∞ et p_1 sont des normes sur E .

b) L'inégalité de la moyenne prouve que $k = 1$ convient.

c) Soit O un ouvert de E pour p_1 . Si $f \in O$ soit $r > 0$ tel que $(g \in E \text{ et } p_1(f - g) < r) \Rightarrow g \in O$.

Si $g \in E$ et $p_\infty(f - g) < r$ alors $p_1(f - g) < r$ d'après la question précédente et, donc, $g \in O$ qui est donc ouvert pour p_∞ .

2. Si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$, alors $f_n \in E$, $p_1(f_n) = \frac{1}{n+1}$ et $p_\infty(f_n) = 1$. Comme $(p_1(f_n))_n$ converge vers 0 sans que $(p_\infty(f_n))_n$ fasse de même les normes p_1 et p_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 58

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout polynôme $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, n désignant le degré de P , on pose :

$$p_1(P) = \sum_{i=0}^n |a_i| \text{ et } p_2(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|.$$

1. a) Démontrez succinctement que p_1 et p_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Démontrez que tout ouvert pour la norme p_2 est un ouvert pour p_1 .

c) Démontrez que les normes p_1 et p_2 ne sont pas équivalentes.

2. On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k . On note p'_1 la restriction de p_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et p'_2 la restriction de p_2 à $\mathbb{R}_k[X]$.

Les normes p'_1 et p'_2 sont-elles équivalentes ?

1. a) Les p_i sont définies sur $\mathbb{R}[X]$ si l'on convient de $p_1(0) = p_2(0) = 0$.

Si $p_1(P) = 0$ ou $p_2(P) = 0$ et si P est de degré n , comme on a $|a_n| \leq \min(p_1(P), p_2(P))$, il y a contradiction, donc :

$$(p_1(P) = 0 \text{ ou } p_2(P) = 0) \Rightarrow P = 0.$$

Par définition des coefficients de λP si $\lambda \in \mathbb{R}$, et en distinguant les cas $\lambda \neq 0$ et $\lambda = 0$, il vient $p_i(\lambda P) = |\lambda| p_i(P)$ si $i = 1$ ou $i = 2$.

Enfin soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Si P, Q ou $P + Q$ est nul on a $\forall i \in [1, 2], p_i(P + Q) \leq p_i(P) + p_i(Q)$.

Si on peut écrire $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ où n est supérieur aux degrés de P et de Q . $\forall k \in [0, n]$ on a $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$ d'où, si $1 \leq i \leq 2$, $p_i(P + Q) \leq p_i(P) + p_i(Q)$.

Par suite p_1 et p_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Immédiatement $p_2 \leq p_1$.

Si O est un ouvert pour p_2 et si $P \in O$ on choisit $r > 0$ tel que si, $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $p_2(P - Q) < r$, alors $Q \in O$.

Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $p_1(P - Q) < r$ alors aussi $p_2(P - Q) < r$ et, donc, $Q \in O$. Cela montre que O est aussi ouvert pour p_1 .

c) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$. Alors $p_1(P_n) = n + 1$ et $p_2(P_n) = 1$.

La suite $(p_2(P_n))_n$ est constante alors que $(p_1(P_n))_n$ diverge. Cela montre que les deux normes ne sont pas équivalentes.

2. Comme $\mathbb{R}_k[X]$ est de dimension finie $k + 1$ et que p_1 et p_2 induisent des normes sur ce sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, ces normes induites sont équivalentes.

Exercice 59

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)$ de nombres complexes telles que la série $\sum |x_n|^2$ converge.

1. Démontrez que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres complexes.

2. a) Démontrez que pour $x = (x_n) \in \ell^2$ et $y = (y_n) \in \ell^2$, la série $\sum \overline{x_n} y_n$ converge. On pose $(x|y) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{x_n} y_n$.

b) Démontrez que l'on définit ainsi un produit scalaire dans ℓ^2 .

3. On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme associée. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_n$. Démontrez que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{C}$ et calculez $\|\varphi\|$, où $\|\varphi\|$ désigne la norme usuelle dans l'espace vectoriel des applications linéaires et continues de ℓ^2 dans $\mathbb{C}$.

1. Tout d'abord par définition $\ell^2 \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et la suite nulle est élément de ℓ^2 . Si $\sum |x_n|^2$ converge et si $\lambda \in \mathbb{C}$ alors, par structure d'espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes, $\sum |\lambda x_n|^2$ converge.

Si $(x, y) \in (\ell^2)^2$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n + y_n|^2 = (\overline{x_n + y_n})(x_n + y_n) = |x_n|^2 + |y_n|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{x_n} y_n) \leq 2(|x_n|^2 + |y_n|^2)$$

car $2\operatorname{Re}(\overline{x_n} y_n) \leq 2|x_n| \times |y_n| \leq |x_n|^2 + |y_n|^2$. En effet $(|x_n| - |y_n|)^2 \geq 0$.

Par majoration on en déduit que $\sum |x_n + y_n|^2$ converge. Cela montre que ℓ^2 est stable par combinaison linéaire et, donc, sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

2. a) On vient de voir l'inégalité $2|\overline{x_n} y_n| \leq |x_n|^2 + |y_n|^2$ qui montre que, si $(x, y) \in (\ell^2)^2$, alors $\sum \overline{x_n} y_n$ est absolument convergente et donc convergente.

b) $(x, y) \mapsto (x|y)$ est linéaire à gauche, à symétrie hermitienne positive.

Si $(x|x) = 0$ alors, comme chaque $|x_n|^2$ est élément de $\mathbb{R}_+$ et que la somme est nulle, nécessairement x est la suite nulle. Par conséquent $(x, y) \mapsto (x|y)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 .

2. On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée au produit scalaire.

Il faut comprendre que n est fixé dans $\mathbb{N}$. On note δ l'élément de ℓ^2 défini par $\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et alors $\varphi : x \mapsto (\delta|x)$, ce qui montre sa linéarité ainsi que, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'étude du cas d'égalité $\|\varphi\| = \|\delta\|_2 = 1$.

Exercice 60

Soit A une algèbre normée de dimension finie ayant e pour élément unité.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

a) Démontrez que la série $\sum u^n$ est convergente.

b) Démontrez que $(e - u)$ est inversible et que $(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$.

2. Démontrez que, pour tout u de A , la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

Comme A est de dimension finie c'est un espace vectoriel normé complet et, donc, toute série absolument convergente d'éléments de A est convergente.

On rappelle également que, pour tout $(a, b) \in A^2$, on a $\|ab\| \leq \|a\| \times \|b\|$.

1. a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u^n\| \leq \|u\|^n$, terme général d'une série géométrique convergente car, par hypothèse, $\|u\| < 1$. Par suite $\sum u^n$ est absolument convergente et, donc, convergente.

b) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(e - u) \sum_{n=0}^N u^n = \sum_{n=0}^N u^n - \sum_{n=1}^{N+1} u^n = e - u^{N+1}$ et $\|u^{N+1}\| \leq \|u\|^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ car $\|u\| < 1$.

Comme $a \mapsto (e - u)a$ est linéaire sur A de dimension finie et donc continue, on en déduit, lorsque $N \rightarrow \infty$, $(e - u) \sum_{n=0}^{\infty} u^n = e$.

La démonstration de $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u^n \right) (e - u)$ est similaire et finit de prouver que $e - u$ est inversible d'inverse $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$.

2. De même pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\| \frac{u^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|u\|^n}{n!}$ terme général d'une série convergente (de somme $e^{\|u\|}$), ce qui montre que $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente et, donc, convergente.
