Exercice 1

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Décomposez en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme : $P = X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$.

La principale difficulté, dans cet exercice, tient dans l'éventuelle présence de racines réelles de P.

On utilise deux résultats :

si $\varphi \in \mathbb{R}$ alors $X^2 - 2X\cos(\varphi) + 1 = (X - e^{i\varphi})(X - e^{-i\varphi})$ et

$z^n = e^{in\varphi}$ a pour ensemble de solutions dans $\mathbb{C}$ $\{e^{i(\varphi + \frac{2k\pi}{n})} \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$.

• Si $n\theta \equiv 0\ [2\pi]$ alors $P = (X^n - 1)^2 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}})^2$, décomposition dans $\mathbb{C}[X]$.

Si n est pair, $n = 2p$ alors $P = (X-1)^2(X+1)^2 \prod_{k=1}^{p-1}(X - e^{i\frac{k\pi}{p}})^2(X - e^{-i\frac{k\pi}{p}})^2$ en regroupant chaque racine dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et sa conjuguée, d'où la décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = (X-1)^2(X+1)^2 \prod_{k=1}^{p-1}\left[X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) + 1\right]^2.$$

Si $n = 2p+1$ de même $P = (X-1)^2 \prod_{k=1}^{p}\left[X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k\pi}{2p+1}\right) + 1\right]^2$.

• Si $n\theta \equiv \pi\ [2\pi]$ alors $P = (X^n + 1)^2 = (X^n - e^{i\pi})^2 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{i\frac{2k+1}{n}\pi})^2$.

Si $n = 2p+1$ de même $P = (X+1)^2 \prod_{k=0}^{p-1}\left[X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k+1}{2p+1}\pi\right) + 1\right]^2$,

si $n = 2p$ alors $P = \prod_{k=0}^{p-1}\left[X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k+1}{2p}\pi\right) + 1\right]^2$.

• Enfin si $n\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ $P = (X^n - e^{in\theta})(X^n - e^{-in\theta})$ d'où, dans $\mathbb{C}[X]$,

$P = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}})(X - e^{-i\frac{\theta+2k\pi}{n}})$ et, dans $\mathbb{R}[X]$,

$P = \prod_{k=0}^{n-1}\left[X^2 - 2X\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + 1\right]$.

Exercice 2

On considère les polynômes $P = 3X^4 - 9X^3 + 7X^2 - 3X + 2$ et $Q = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$.

1. Décomposez P et Q en facteurs premiers sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$ (on pourra calculer les valeurs de P et de Q en 1 et en 2).

2. Déterminez le ppcm et le pgcd des polynômes P et Q.

---

1. $P(1) = P(2) = Q(1) = Q(2) = 0$ et, en effectuant les divisions euclidiennes de P et Q par $(X-1)(X-2)$, on obtient $P = (X-1)(X-2)(3X^2+1)$ et $Q = (X-1)(X-2)(X^2+1)$ qui sont des décompositions en produits de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.
De plus $P = (X-1)(X-2)(X\sqrt{3}-i)(X\sqrt{3}+i)$ et
$Q = (X-1)(X-2)(X-i)(X+i)$.

2. Immédiatement leur pgcd est $(X-1)(X-2)$ et leur ppcm est
$(X-1)(X-2)(3X^2+1)(X^2+1)$.

Exercice 3

On considère les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ suivants : $P = 2X^4 - 3X^2 + 1$ et $Q = X^3 + 3X^2 + 3X + 2$.

1. Décomposez en facteurs premiers P dans $\mathbb{C}[X]$ (on pourra calculer les valeurs de P en 1 et en -1).

2. Décomposez en facteurs premiers Q dans $\mathbb{C}[X]$ (on pourra calculer la valeur de Q en -2).

3. a) Déduisez des questions 1. et 2. qu'il existe deux polynômes U et V tels que $PU + QV = 1$.

b) Indiquez une méthode pour déterminer deux polynômes U et V en utilisant l'algorithme d'Euclide.

---

1. $P(1) = P(-1) = 0$ et, par division euclidienne de P par $(X-1)(X+1)$, on a $P = (X-1)(X+1)(2X^2-1) = (X-1)(X+1)(X\sqrt{2}-1)(X\sqrt{2}+1)$.

2. De même $Q(-2) = 0$ et, par division euclidienne, $Q = (X+2)(X^2+X+1)$ soit $Q = (X+2)(X-j)(X-\bar{j})$.

3. a) P et Q n'ont pas de racine complexe commune, donc sont premiers entre eux. Le théorème de Bézout assure l'existence d'un couple (U, V).

b) On effectue une suite de divisions euclidiennes $P = QQ_1 + R_1$, $\deg(R_1) < 2$, $Q = R_1Q_2 + R_2$ où $\deg(R_2) < \deg(R_1) = 1$ (calcul) et enfin $R_1 = R_2Q_3 + r$ où $r \in \mathbb{R}^\star$ car P et Q sont premiers entre eux.
Alors $R_1 = P - QQ_1$, $R_2 = Q - (P - QQ_1)Q_2$ puis
$r = P - QQ_1 - [Q - (P - QQ_1)Q_2]Q_3$ et, en divisant par r, on obtient un couple solution (U, V).

Exercice 4

On considère la fraction rationnelle $R = \dfrac{X^5 + X^4}{(X-2)^2(X+1)^2}$.

1. Décomposez R en éléments simples.

2. Déterminez les primitives de la fonction $x \mapsto R(x)$ sur l'intervalle $]-1, 2[$.

---

1. $R = \dfrac{X^4}{(X-2)^2(X+1)} = X + 3 + \dfrac{a}{(X-2)^2} + \dfrac{b}{X-2} + \dfrac{c}{X+1}$ en effectuant la division euclidienne de X^4 par $(X-2)^2(X+1)$.
Un équivalent en 2 fournit $a = \dfrac{16}{3}$ et, en -1, $bc = \dfrac{1}{9}$.
En 0 on obtient $0 = 3 + \dfrac{a}{4} - \dfrac{b}{2} + c$ d'où $b = \dfrac{80}{9}$.

2. F est une primitive de $x \mapsto R(x)$ sur $]-1, 2[$ si et seulement s'il existe un réel K tel que $F : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + 3x - \dfrac{16}{3(x-2)} + \dfrac{80}{9}\ln(2-x) + \dfrac{1}{9}\ln(x+1) + K$.

Exercice 5

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n et f l'endomorphisme de E défini par : $f(P) = P - P'$.

1. Démontrez que f est bijectif de deux manières :

a) sans utiliser de matrice de f,

b) en utilisant une matrice de f.

2. Soit $Q \in E$. Trouvez P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

---

1. a) $P \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow P = P'$ et donc il existe un scalaire λ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \lambda e^x$ d'où $P = 0$. f est donc un endomorphisme injectif de $\mathbb{K}_n[X]$ espace vectoriel de dimension finie, par suite c'est un automorphisme.

b) La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc inversible. Par suite f est un automorphisme.

2. $\forall Q \in \mathbb{K}_n[X]$, $f\left(\sum\limits_{k=0}^{n} Q^{(k)}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} Q^{(k)} - \sum\limits_{k=0}^{n} Q^{(k+1)} = Q - Q^{(n+1)} = Q$ car $Q^{(n+1)} = 0$ et donc, par injectivité de f, on a $P = \sum\limits_{k=0}^{n} Q^{(k)}$.

Remarque : s d est l'endomorphisme de E défini par $d(P) = P'$.
$f = I_E - d$. Comme $d^{n+1} = 0$, on a $f \circ \sum\limits_{k=0}^{n} d^k = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} d^k\right) \circ f = I$.

Donc f est inversible et $f^{-1} = \sum_{k=0}^{n} d^k$.

Cela permet d'en déduire immédiatement la solution de l'équation $f(P) = Q$.

Exercice 6

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminez $\mathrm{Ker}(f)$.

2. f est-il surjectif ?

3. Trouvez une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

---

1. $M \in \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Ker}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ car $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Donc $\mathrm{Ker}(f)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. f est un endomorphisme non injectif de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4 donc non surjectif. Plus précisément le théorème de rang montre que f est de rang 2.

3. On a déjà donné une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ forment une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ en somme directe avec $\mathrm{Ker}(f)$, et donc supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$, leurs images par f forment une base de $\mathrm{Im}(f)$, et ce sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

1. Démontrez que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n alors AB et BA ont même trace.

2. Déduisez-en qu'en dimension finie toutes les matrices d'un même endomorphisme ont même trace.

3. Démontrez que si A et B sont semblables alors, pour tout $k \in N$, A^k et B^k ont même trace.

---

1. Posons $C = AB$ et $D = BA$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}$ d'où $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}\right)$ et, en permutant les Σ, $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k}\right) = \sum_{k=1}^{n} d_{k,k} = \mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(BA)$.

2. Si U et V sont deux matrices de l'endomorphisme u de l'espace vectoriel E de dimension n, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $V = P^{-1}UP$ et alors, d'après la question 1., $\mathrm{tr}(V) = \mathrm{tr}\left((P^{-1}U)P\right) = \mathrm{tr}\left(P(P^{-1}U)\right) = \mathrm{tr}(U)$ en posant $A = P^{-1}U$ et $B = P$.

3. Si A et B sont semblables alors ce sont les matrices d'un même endomorphisme u et, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k sont des matrices de u^k, la question précédente montre que $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$.

Exercice 8

On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \sup_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$.

1. Démontrez que $\|AB\| \leqslant n\|A\|\,\|B\|$, puis que, $\forall p \in \mathbb{N}^\star$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\|A\|^p$.

2. Démontrez que, pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente. Est-elle convergente ?

---

1. Posons $C = AB$. $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $|c_{i,j}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \times |b_{k,j}|$ par inégalité triangulaire, d'où $|c_{i,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A\| \times \|B\| = n\|A\| \times \|B\|$.
Par suite $\|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$.
Montrons par récurrence que, si $p \in \mathbb{N}^\star$, alors $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\|A\|^p$, l'inégalité est immédiate si $p = 1$.
Supposons la établie à un rang p, alors $\|A^{p+1}\| = \|A \times A^p\| \leqslant n\|A\| \times \|A^p\|$ d'où, par hypothèse de récurrence, $\|A^{p+1}\| \leqslant n\|A\|^{p+1}$, ce qui prouve l'hérédité et termine la preuve.

2. Si $p \in \mathbb{N}^\star$ la question précédente montre $\left\|\frac{A^p}{p!}\right\| \leqslant \frac{n^{p-1}\|A\|^p}{p!} \leqslant \frac{(n\|A\|)^p}{p!}$ terme général d'une série convergente de somme $e^{n\|A\|}$. Cela montre que $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente dans l'espace vectoriel normé $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ qui est complet car de dimension finie n^2. Par suite $\sum \frac{A^p}{p!}$ converge.

Exercice 9

Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\Phi : P(X) \mapsto P(X) - P(X-1)$. Donnez la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et déduisez-en $\mathrm{Im}(\Phi)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\Phi(X^p) = X^p - \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} X^k = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} X^k$ d'après la formule du binôme. Donc le coefficient i, j de la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est 0 si $i \geqslant j$ et $\binom{i}{j} (-1)^{i-j}$ sinon pour $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$.
La forme triangulaire de cette matrice avec une sous-diagonale à coefficients tous non nuls montre qu'elle est de rang n, que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Vect}(X^0, \dots, X^{n-1})$, soit $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Le théorème de rang montre alors que $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est une droite vectorielle et, comme elle contient $\mathbb{R}_0[X]$ car $\Phi(X^0) = 0$, on en déduit $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{R}_0[X]$.

Exercice 10

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et f, g deux endomorphismes de E tels que : $f \circ g = Id$.

1. Démontrez que : $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

2. Démontrez que : $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

3. Démontrez que : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

---

1. $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ est immédiat.
Comme $f = f \circ (g \circ f)$ on a également l'inclusion réciproque et, donc, l'égalité.

2. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ est immédiat.
De même $g = (g \circ f) \circ g \Rightarrow \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$ puis $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f)$.

3. $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$, par suite $g \circ f$ est un projecteur, d'où $E = \mathrm{Ker}(g \circ f) \oplus \mathrm{Im}(g \circ f)$ ou encore, d'après les questions précédentes, $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 11

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A.

1. Démontrez que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

2. Déterminez D_n en fonction de n.

3. Justifiez que la matrice A est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A?

---

1. On développe $Dn + 2$ selon sa première colonne :

$$D_{n+2} = 2D_{n+1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n+1} - D_n$$ en développant le dernier déterminant selon sa première ligne.

2. On a $D_1 = 2$ et $D_2 = 3$ donc, en posant $D_0 = 1$, on a $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(D_n)_{n \geqslant 0}$ suit donc une récurrence linéaire d'ordre 2, l'équation caractéristique est $(r-1)^2 = 0$.
On en déduit l'existence d'un couple (α, β) de réels tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = \alpha + \beta n$ et, en utilisant $n = 0$ et $n = 1$, il vient $\alpha = \beta = 1$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = n + 1$.

3. $A \in S_n(\mathbb{R})$, elle est donc diagonalisable. Enfin $\det(A) = D_n \neq 0$ donc 0 n'est pas valeur propre de A.

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, (e_i) une base de E et $v_1, v_2, \dots, v_n$ n vecteurs de E.

1. Démontrez qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = v_i$.

2. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E, et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. Pour tout

u de $\mathcal{L}(E)$, on pose : $\varphi(u) = Mat_{(e_i)}u$ ($Mat_{(e_i)}u$ désignant la matrice de u dans la base (e_i)).

a) Démontrez que l'application φ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est linéaire et bijective.

b) Déterminez la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

C'est intégralement une question de cours.

1. Si f esiste alors, par linéarité, $\forall(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$ et, donc, f est unique.

Soit $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ la base duale de $(e_1,\ldots,e_n)$, en posant $f : x \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(x)v_i$ on définit un endomorphisme de E car les φ_i sont linéaires et, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $f(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(e_j)v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{i,j}v_i = v_j$, donc f est solution.

2. a) Soit $M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose, $\forall j\in[\![1,n]\!], v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j}e_i$ et $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$.

$M = \mathfrak{M}_\mathcal{E}(f) \iff \forall j\in[\![1,n]\!],\ f(e_j) = v_j \iff f = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i v_i$ avec les notations de la question précédente.

Par suite $f \mapsto \mathfrak{M}_\mathcal{E}(f)$ est une bijection linéaire de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont on vient de fournir la réciproque.

b) Par isomorphisme $\dim\big(\mathcal{L}(E)\big) = \dim\big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\big) = n^2$ car la famille des matrices élémentaires est une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de n^2 éléments.

Exercice 13

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés $n\times n$ à coefficients réels. On admet que $\mathcal{L}(E)$ muni des lois $+$ et $\circ$ est un anneau, et que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ muni des lois $+$ et $\times$ est un anneau.

1. Précisez l'élément neutre pour la loi $\circ$ dans $\mathcal{L}(E)$ et l'élément neutre pour la loi $\times$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. (e_i) désignant une base de E, on pose, $\forall u\in\mathcal{L}(E)$, $\varphi(u) = Mat_{(e_i)}u$ ($Mat_{(e_i)}u$ désignant la matrice de u dans la base (e_i)).

a) Démontrez que φ est un isomorphisme d'anneau de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Démontrez que, pour tout $u\in\mathcal{L}(E)$, $Mat_{(e_i)}(\underbrace{u\circ u\circ\cdots\circ u}_{n\,fois}) = \big(Mat_{(e_i)}u\big)^n$.

---

1. Les neutres sont respectivement $Id_E : \begin{pmatrix} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{pmatrix}$ et I_n.

2. a) Par définition $\varphi(Id_E) = I_n$.

Soit $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ la base duale de $(e_1,\ldots,e_n)$ et soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.

Si $(u,v)\in\big(\mathcal{L}(E)\big)^2$ on posez $U = \mathfrak{M}_\mathcal{E}(u)$ et $V = \mathfrak{M}_\mathcal{E}(v)$. Soit enfin $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Si $W = \mathfrak{M}_\mathcal{E}(\lambda u+\mu v)$ alors $w_{i,j} = \varphi_i\big((\lambda u+\mu v)(e_j)\big) = \lambda\varphi_i\big(u(e_j)\big)+\mu\varphi_i\big(v(e_j)\big)$ par linéarités de $\varphi_i\circ u$ et de $\varphi_i\circ v$. Par suite $w_{i,j} = \lambda u_{i,j} + \mu v_{i,j}$ et, donc, $W = \lambda U + \mu V$ *i.e.* $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u + \mu\varphi(v)$.

De même si $X = \mathfrak{M}_\mathcal{E}(u\circ v)$ alors $x_{i,j} = (\varphi_i\circ u)\big(v(e_j)\big) = (\varphi_i\circ u)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_{k,j}e_k\right)$ et, par linéarité de $\varphi_i\circ u$, $x_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} v_{k,j}\varphi_i\big(u(e_k)\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} v_{k,j}u_{i,k} = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{i,k}v_{k,j}$, ce qui montre que $X = UV$ ou encore $\varphi(u\circ v) = \varphi(u)\times\varphi(v)$ et φ est un morphisme d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $U\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $U = \mathfrak{M}_\mathcal{E}(u) \iff \forall j\in[\![1,n]\!],\ u(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{i,j}e_i$ et donc φ est une bijection dont on vient de définir la réciproque.

b) On procède par récurrence, le cas $n=0$ découle de $\varphi(Id_E) = I_n$.

Si, pour un élément n fixé de $\mathbb{N}$ on a $\varphi(u^n) = \varphi(u)^n$ alors, comme φ est un morphisme d'anneaux, $\varphi(u^{n+1}) = \varphi(u^n\circ u) = \varphi(u^n)\times\varphi(u) = \varphi(u)^{n+1}$, ce qui termine la récurrence et montre que, pour tout $(n,u)\in\mathbb{N}\times\mathcal{L}(E)$ on a $\mathfrak{M}_\mathcal{E}(u^n) = \big(\mathfrak{M}_\mathcal{E}(u)\big)^n$.

Exercice 14

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Démontrez que pour tout $i = 2,3,\ldots,n$, $(e_1+e_i,e_2,\ldots,e_n)$ est une base de E.

2. Déterminez tous les endomorphismes de E dont la matrice est diagonale dans toute base de E.

---

1. La matrice de $(e_1+e_i,e_2,\ldots e_n)$ dans $(e_1,\ldots,e_n)$ est triangulaire supérieure à diagonale de 1 donc inversible. Cela montre que $(e_1+e_i,e_2,\ldots e_n)$ est une base de E.

2. Si u est solution alors sa matrice dans la base $(e_1,\ldots,e_n)$ est diagonale ; soit $\mathrm{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

Soit $i\in[\![2,n]\!]$. La matrice Δ de u dans la base $(e_1+e_i,e_2,\ldots e_n)$ est aussi diagonale ; soit $\mathrm{Diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$. Alors $u(e_1+e_i) = \mu_1(e_1+e_i)$ et aussi $u(e_1+e_i) = u(e_1)+u(e_i) = \lambda_1e_1+\lambda_ie_i$. Par liberté de (e_1,e_i) on en déduit $\lambda_1 = \mu_1$ et $\lambda_i = \mu_1$ d'où $D = \lambda_1 I_n$ puis $u = \lambda Id_E\in\mathrm{Vect}(Id_E)$.

Réciproquement si $u\in\mathrm{Vect}(Id_E)$ alors sa matrice dans toute base est diagonale.

Exercice 15

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. Démontrez que : $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) \Rightarrow \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.

2. a) Démontrez que : $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

b) Démontrez que : $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \Rightarrow E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

---

1. $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ est toujours vraie.
Si $y \in \text{Im}(f)$, soit $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et décomposons x en $x = f(z) + t$ où $z \in E$ et $t \in \text{Ker}(f)$ en utilisant $E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$. Alors $y = f(f(z) + t)$ *i.e.* $y = f^2(z) + f(t) = f^2(z) \in \text{Im}(f^2)$ et, donc, $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.

2. a) $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ sont toujours vraies.
Par suite $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \iff \text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$ et, également,
$\text{ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \dim\left[\text{Ker}(f)\right] = \dim\left[\text{Ker}(f^2)\right] \iff \text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$ en appliquant le théorème de rang à f et à f^2.
Cela montre : $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

b) Si $x \in E$ alors $f(x) \in \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$. On choisit $z \in E$ tel que $f(x) = f^2(z)$ et alors $f\big(x - f(z)\big) = 0$ d'où $x = f(z) + \left[x - f(z)\right] \in \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$.
On vient de montrer que $E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$.
Le théorème de rang montre alors que $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

Exercice 16

N.B : Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Démontrez que, dans $\mathcal{L}(E)$, la famille $(Id, f, f^2, \ldots, f^{n^2})$ est liée et déduisez-en que f admet un polynôme annulateur non identiquement nul.

2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et λ une valeur propre de f. Démontrez que si P est un polynôme annulateur de f alors : $P(\lambda) = 0$.

---

1. Comme $\dim\big(\mathcal{L}(E)\big) = n^2$ et $\text{Card}\left(\llbracket 0, n^2 \rrbracket\right) = n^2 + 1$ la famille $(f^k)_{0 \leqslant k \leqslant n^2}$ est liée. On choisit un (n^2+1)-uplet de scalaires $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n^2})$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{k=0}^{n^2} \alpha_k f^k = 0$, alors le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k$ est non nul et annulateur de f.

2. Soient λ est une valeur propre de f et x un vecteur propre associé.
Comme $P(X) - P(\lambda)$ admet λ pour racine il existe $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) - P(\lambda) = Q(X)(X - \lambda)$ et, donc $P(f) - P(\lambda)Id_E = Q(f) \circ (f - \lambda Id_E)$.

Comme $x \in \text{Ker}(f - \lambda Id_E)$, si P est annulateur de f, on en déduit $P(\lambda)x = 0$ et, comme x est non nul, $P(\lambda) = 0$.

Exercice 17

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrez que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

2. a) Démontrez que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

b) Démontrez que pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
(P polynôme annulateur de u) $\Rightarrow$ (PQ polynôme annulateur de u).

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrivez le polynôme caractéristique de A, puis déduisez-en que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

---

1. Posons $P = \sum\limits_{p=0}^{\infty} a_p X^p$ et $Q = \sum\limits_{q=0}^{\infty} b_q X^q$ où $(a_p)_p$ et $(b_q)_q$ stationnent en 0.
Alors $PQ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{p+q=n} a_p b_q$.
On a $(PQ)(u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n u^n$ et $P(u) \circ Q(u) = \left(\sum\limits_{p=0}^{\infty} a_p u^p\right) \circ \left(\sum\limits_{q=0}^{\infty} b_q u^q\right)$ et, en réordonnant cette somme finie, comme pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $u^p \circ u^q = u^{p+q}$, il vient $P(u) \circ Q(u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n u^n = (PQ)(u)$.

2. a) Si $(P,Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$, la question précédente montre $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ et aussi $(QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$.
Comme $PQ = QP$ on en déduit $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

b) Si $(P,Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$ et $P(u) = 0$ alors $(PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$ endomorphisme nul car $Q(u) \in \mathcal{L}(E)$ et $P(u) = 0$.

3. $\chi_A(X) = X^2 - X\,\text{tr}(A) + \det(A) = X^2 - X$.
De plus $R(0) = R(1) = 0$ donc R est un multiple de χ_A. Le théorème de Cayley-Hamilton et la question précédente montrent que R est annulateur de A.

Exercice 18

Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres réels.

1. Démontrez que E est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

2. On pose $\varphi(a+ib) = M(a,b)$. Démontrez que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{C}$ sur E, $\mathbb{C}$ étant considéré comme un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Est-il un isomorphisme d'anneaux ?

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M(a,b) = aI_2 + bK$ où l'on a posé $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, comme (I_2, K) est libre et que $K^2 \in \mathrm{Vect}(I_2, K)$ (théorème de Cayley-Hamilton ou $K^2 = -I_2$) on en déduit que E est la sous-algèbre commutative $\mathbb{R}[K]$ de dimension 2 de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ de base (I_2, K).

2. φ est clairement linéaire par définition de $M(a,b)$, $\varphi(1) = I_2$, $\varphi(i) = K$ donc φ transforme une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ en une base de E sur $\mathbb{R}$; il s'agit d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Enfin $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$ et, par calcul, $M(a,b)M(c,d) = M(ac-bd, ad+bc)$, donc φ est un isomorphisme d'anneaux, ce qui fait de E un corps.

Exercice 19

p désigne un entier naturel non nul. On considère dans $\mathbb{Z}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par : $x\mathcal{R}y \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kp$.
On note $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation $\mathcal{R}$.

1. Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? Quelle est celle de p ?

2. Donnez soigneusement la définition de l'addition usuelle et de la multiplication usuelle dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

3. On admet que muni de ces opérations, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un anneau. Démontrez que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier.

Si $x \in \mathbb{Z}$ on note $Cl(x)$ la classe d'équivalence de x.

1. $Cl(0) = Cl(p) = p\mathbb{Z}$.

2. Soit $(x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4$ tel que $x' \in Cl(x)$ et $y' \in Cl(y)$.
Alors $Cl(x+y) = Cl(x'+y')$ ainsi que $Cl(xy) = Cl(x'y')$.
On définit donc les lois $+$ et $\times$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en posant :

$$Cl(x) + Cl(y) = Cl(x+y) \text{ et } Cl(x) \times Cl(y) = Cl(xy).$$

3. Si p est premier et si $x \in \mathbb{Z}$. Supposons $Cl(x) \neq Cl(0)$ *i.e.* $x \notin p\mathbb{Z}$. Alors x est premier avec p et, par le théorème de Bézout, on peut choisir deux entiers u et v tels que $ux + vp = 1$. Alors $Cl(u) \times Cl(x) + Cl(v) \times Cl(p) = Cl(1)$ *i.e.* $Cl(u) \times Cl(x) = Cl(1)$, donc $Cl(x)$ admet $Cl(u)$ comme inverse dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et, donc, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.
Si p n'est pas premier alors il existe a et b dans $[\![2, p-1]\!]$ tels que $p = ab$.
Nécessairement ni a ni b n'est dans $p\mathbb{Z}$ et $Cl(0) = Cl(ab) = Cl(a) \times Cl(b)$, donc $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ n'est pas un corps car $Cl(a) \neq Cl(0)$ et $Cl(b) \neq Cl(0)$.

Exercice 20

On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble constitué par les n premiers entiers non nuls $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Démontrez que, muni de la loi $\circ$, $\mathfrak{S}_n$ est un groupe.

2. On note σ l'élément de $\mathfrak{S}_8$ défini de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

l'image de chaque terme de la première ligne étant écrit juste en dessous.

a) Démontrez que la permutation σ est égale à la composée de deux cycles que l'on précisera.

b) On note σ^n la permutation $\underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{n fois}$.

Déterminez σ^{12}, σ^{24}, σ^4 et σ^{2016}.

---

1. La composée de deux bijections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$, autrement dit $\circ$ est une loi interne sur $\mathfrak{S}_n$. L'élément $e : k \mapsto k$ est neutre pour $\circ$, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ alors, par définition σ^{-1} est définie et élément de $\mathfrak{S}_n$ et, enfin, la loi $\circ$ est associative. Donc $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe.

2. a) Si on pose $c_1 = (1, 5, 8, 3)$ et $c_2 = (2, 4, 7)$ alors $\sigma = c_1 \circ c_2$. De plus c_1 et c_2 commutent, $c_1^4 = c_2^3 = e$.

b. Comme c_1 et c_2 commutent, $\sigma^{12} = (c_1^4)^3 \circ (c_2^3)^4 = e \circ e = e$.
De même $\sigma^{24} = (\sigma^{12})^2 = e^2 = e$, $\sigma^4 = c_1^4 \circ c_2^3 \circ c_2 = c_2$ et $\sigma^{2016} = (\sigma^{12})^{168} = e$.

Exercice 21

1. u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n et I désigne l'application identité de E. Rappelez la définition d'une valeur propre puis démontrez que :

$$(\lambda \text{ valeur propre de } u) \text{ si, et seulement si, } (\det(u - \lambda I) = 0).$$

Déduisez-en que u admet au plus n valeurs propres distinctes.

2. Trouvez un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ayant comme valeurs propres 0 et 1.

---

1. λ est valeur propre de u si, et seulement si, il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$ *i.e.* $(u - \lambda I)$ est non injectif ce qui équivaut à $(u - \lambda I) \notin \mathrm{GL}(E)$ car E est de dimension finie. Comme $(u - \lambda I) \notin \mathrm{GL}(E) \iff \det(u - \lambda I) = 0$, l'équivalence est prouvée. On a $\det(u - \lambda I) = 0 \iff \chi_u(\lambda) = 0$ si χ_u est le polynôme caractéristique de u. Ce polynôme étant de degré n, u a au plus n racines distinctes. Donc u au au plus n valeurs propres distinctes.

2. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. L'endomorphisme u défini par $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = 0$ est le projecteur de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}e_1$ parallèlement à $\mathbb{R}e_2$. Il n'a que 0 et 1 comme valeurs propres.

Exercice 22

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

1. M est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$?

2. M est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$?

$\chi_M(X) = -X^3 + (bc + ca + ab)X$ par la méthode de Sarrus, la calculette,...

1. Si $bc+ca+ab > 0$, M a 3 valeurs propres réelles distinctes, est diagonalisable sur $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Si $bc + ca + ab < 0$, comme χ_M n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, M n'est pas diagonalisable sur $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Si $bc + ca + ab = 0$, comme $\chi_M = -X^3$, 0 est la seule valeur propre de M. Elle est diagonalisable si, et seulement si, elle est nulle *i.e.* $a = b = c = 0$.

2. Si Si $bc + ca + ab \neq 0$, M a 3 valeurs propres complexes distinctes, est diagonalisable sur $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.

Si $bc + ca + ab = 0$ le raisonnement fait dans le cas réel conduit à la même conclusion.

Exercice 23

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrez que A est diagonalisable de quatre manières :

a) sans calculs,

b) en calculant directement le déterminant $\det(A - \lambda I_3)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,

c) en utilisant le théorème du rang,

d) en calculant A^2.

2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

a) Que peut-on dire de l'endomorphisme u ?

b) Trouvez une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

---

1. a) A est symétrique réelle donc diagonalisable.

b) Calculons le polynôme caractéristique de A sans calculette.

$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ par l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$. En faisant l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, on obtient $\chi_A(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$. En développant par rapport à le première ligne, on obtient $\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda) = \lambda^2(3 - \lambda)$.

Avec des notations classiques $E_0(\lambda) = \mathrm{Ker}(A)$ et $E_3(\lambda) = \mathrm{Ker}(A - 3I_3)$.

• $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff AX = 0 \iff x - y + z = 0.$

Donc $E_0(A)$ est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + z = 0$.

En écrivant $(x, y, z) = (y-z, y, z) = ye'_1 + e'_2$ où $e'_1 = (1, 1, 0)$ et $e'_2 = (-1, 0, 1)$, on a une base de $E_0(A)$.

• $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A) \iff (A - 3I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad (\star)$

$(\star) \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff (x, y, y) = xe'_3$ où $e'_3 = (1, -1, 1)$.

Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et comme les sous-espaces propres de A sont de dimensions égales aux multiplicités des valeurs propres associeées, A est diagonalisable.

c) Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice A. Comme $C_1 = -C_2 = C_3$ et $C_3 \neq 0$ la matrice A est de rang 1. On déduit du théorème du rang que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$. Donc 0 est valeur propre de A de multiplicité $m(0) \geqslant 2$. Comme $\mathrm{tr}(A) = 3 = 0 + 0 + \lambda$, la matrice A a pour valeur propre 3. Il s'ensuit que $3 \leqslant \dim(E_0(A)) + \dim(E_3(A)) \leqslant 3$ et donc A est diagonalisable.

d) $A^2 = 3A$. Le polynôme $X^2 - X = X(X - 3)$ est scindé à racines simples et annulateur de A. La matrice A est donc diagonalisable.

2. a) Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique **(orthonormée) de $\mathbb{R}^3$**. Alors $A = M_{\mathcal{B}_0}(u)$. Notons $B = \dfrac{A}{3}$. Alors ${}^tB = B$ et $B^2 = B$. On peut conclure que $v = \dfrac{u}{3}$ est un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$.

b) Les sous-espaces propres $E_0(u)$ et $E_3(u)$ associés à des valeurs propres distinctes de $A \in S_3(\mathbb{R})$ sont orthogonaux. $e_1'' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e_1'$, $e_2'' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2)$ constituent une base orthonormale de $E_0(A)$. Comme $e_3'' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e_3'$ est un vecteur unitaire base de $E_3(A)$, la base $\mathcal{B}_1 = (e_1'', e_2'', e_3'')$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ telle que $M_{\mathcal{B}_1}(u) = \mathrm{Diag}(0,0,3)$.

Exercice 24

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.

1. Quel est le rang de A ? La matrice A est-elle inversible ?

2. A est-elle diagonalisable ?

---

1. Notons C_1, C_2 et C_3 les vecteurs colonnes de la matrice A.
Si $a = 0, \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, C_2) = 2$. Sinon, $\mathrm{rg}(A) = 3$ et dans ce cas seulement A est inversible.

2. Si $a \notin \{1,2\}$ $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ a 3 valeurs propres distinctes, est diagonalisable.

• Si $a = 1$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff (A - I_3)X = 0 \iff y = z = 0.$

On a dans ce cas, $E_1(A)$ de dimension 1 alors que 1 est valeur propre double de A. Donc A n'est pas diagonalisable.

• Si $a = 2$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \iff (A - 2I_3)X = 0 \iff -x + y + 2z = 0.$

$E_2(A)$ est de dimension 2 et la valeur propre 2 double. Comme 1 est valeur propre simple, on sait qu'alors $\dim(E_1(A)) = 1$, on a A diagonalisable.

Exercice 25

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduisez de la question **1.** les éléments propres de B.

---

1. Recherchons simultanément valeurs propres et vecteurs propres de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq 0$. Alors $AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_3 = \lambda x_2 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ x_2 = \lambda x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = \lambda x_2 \\ x_2 = \lambda^2 x_1 \\ x_3 = \lambda^3 x_1 \end{cases}$

$x_1 \neq 0$ car $X \neq 0$, Donc $\lambda^3 = 1 \iff \lambda \in \{1, j, j^2\}$. Donc $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ a 3 valeurs propres distinctes. Elle est diagonalisable. On déduit immadiatement du calcul précédent les sous-espaces propres de A associés.

$E_1(A) = \mathrm{Vect}(e_1')$ où $e_1' = (1,1,1)$; $E_j(A) = \mathrm{Vect}(e_2')$ où $e_2' = (1, j^2, j)$ et $E_{j^2}(A) = \mathrm{Vect}(e_3')$ où $e_1' = (1, j, j^2)$.

2. $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{Diag}(1, j, j^2)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$.

Des calculs sur les polynômes de matrices, on déduit que $B = PB'P^{-1}$ avec $B' = aI_3 + bD + cD^2 = \mathrm{Diag}\left(a + b + c, a + bj + cj^2, a + bj^2 + cj\right)$. Comme $B = PB'P^{-1}$, (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{C}^3$ de vecteurs propres de B.

Exercice 26

On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ la projection vectorielle f sur le plan d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite d d'équation $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Trouvez simplement une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

2. Déduisez-en la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

---

1. $\mathrm{Im}(f)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$. En écrivant $(x,y,z) = (-y-z, y, z) = ye_1' + ze_2'$ où $e_1' = (-1,1,0)$ et $e_2' = (-1,0,1)$, on a une base de $\mathrm{Im}(f)$. Comme $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}e_3'$ où $e_3' = (1,2,3)$, $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ dans laquelle la matrice de f est Δ avec $\Delta = \mathrm{Diag}(1,1,0) = P^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)P$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. La matrice P étant la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

$$\begin{cases} e_1' = -e_1 + e_2 \\ e_2' = -e_1 + \quad + e_3 \\ e_3' = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \dfrac{1}{6}(-2e_1' - 3e_2' + e_3') \\ e_2 = \dfrac{1}{6}(4e_1' - 3e_2' + e_3') \\ e_3 = \dfrac{1}{6}(-2e_1' + 3e_2' + 6e_3') \end{cases}$$

2. $M_{\mathcal{B}}(f) = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Donc $M_{\mathcal{B}}(f) = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 27

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E. f est-il diagonalisable ? (discutez en fonction du vecteur v)

Si $v = 0$ alors $f = 0$ puisqu'une application linéaire est déterminée par l'image d'une base.

Si $v \neq 0$ le rang de f est 1 ; d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n-1$. 0 est valeur propre de f de multiplicité $\geqslant n-1$. En tant que vecteur de E, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Par linéarité de f, on a $f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) v$. Comme $v \neq 0$, v est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha$.

Si $\alpha \neq 0$, f est diagonalisable de valeur propre 0 de multiplicité $(n-1)$ et α de multiplicité 1.

Si $\alpha = 0$, $f(v) = 0 \Rightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!], f^2(e_i) = 0) \Rightarrow f^2 = 0$; f est nilpotente. Si f est diagonalisable, alors $f = 0$, ce qui n'est pas, puisque $v \neq 0$. Dans ce cas, f n'est pas diagonalisable.

Exercice 28

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2. Déterminez toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et déduisez-en l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

---

1. $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$.
A ayant 2 valeurs propres distinctes réelles, est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_3(A) \iff (A - 3I_2)X = 0 \iff x = y$. Donc $E_3(A)$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $e_1' = (1, 1)$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-2}(A) \iff (A + 2I_2)X = 0 \iff 4x + y = 0$. Donc $E_{-2}(A)$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $e_2' = (1, -4)$.
Donc $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{Diag}(3, -2)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $BD = DB \iff b = c = 0 \iff B = \mathrm{Diag}(a, d)$.
Soit $C \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. On a $AC = CA \iff PDP^{-1}C = CPDP^{-1}$ $(\star)$.
La matrice P étant inversible et le produit matriciel associatif,
$(\star) \iff D(P^{-1}CP) = (P^{-1}CP)D \iff P^{-1}CP = \mathrm{Diag}(a, d)$, $(a, d) \in \mathbb{R}^2$.
Donc les matrices commutant avec A sont les matrices de la forme $P\Delta P^{-1}$ où $\Delta = \mathrm{Diag}(a, d)$ avec a et d parcourant $\mathbb{R}$.

Exercice 29

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminez les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

b) Déterminez la matrice de passage P de la base initiale à la base de vecteurs propres, puis sa matrice inverse P^{-1}.

2. On considère le système différentiel : $\begin{cases} x' = x + y - z + t \\ y' = 2y + z + 1 \\ z' = 3z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.

Résolvez ce système différentiel en utilisant la question **1.**

---

1. a) La matrice A étant trigonale supérieure, $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$.
Ayant 3 valeurs propres réelles distinctes, A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. L'examen de la première colonne de A montre que $E_1(A) = \mathbb{R}e_1$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \iff (A - 2I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Donc $E_2(A) = \mathbb{R}e_2'$ où $e_2' = (1, 1, 0) = e_1 + e_2$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A) \iff (A - 3I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$

Donc $E_3(A) = \mathbb{R}e_3'$ où $e_3' = (0, 1, 1) = e_2 + e_3$.

b) $\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = e_1 + e_2 \\ e'_3 = e_2 + e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = e'_1 \\ e_2 = -e'_1 + e'_2 \\ e_3 = e'_1 - e'_2 + e'_3 \end{cases}$

D'où P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et P^{-1} matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{Diag}(1, 2, 3)$.

2. Le système différentiel s'écrit $X' = AX + B(t)$ où ${}^tB(t) = (t\ 1\ 0)$.

$$X' = AX + B(t) \iff \begin{cases} X = PY \\ Y' = DY + P^{-1}B(t) \end{cases} \text{ où } P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons ${}^tY = (y_1\ y_2\ y_3)$. Alors (1) : $Y' = DY + P^{-1}B(t)$. Alors

$$(1) \iff \begin{cases} y'_1 = y_1 + t - 1 \\ y'_2 = 2y_2 + 1 \\ y'_3 = 3y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = C_1e^t - t \\ y_2 = C_2e^{2t} - \dfrac{1}{2} \\ y_3 = C_3e^{3t} \end{cases} \text{ où } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

On termine la résolution en écrivant $X = PY$ *i.e.* $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{2t} - t - \dfrac{1}{2} \\ y = C_2e^{2t} + C_3e^{3t} - \dfrac{1}{2} \\ z = C_3e^{3t} \end{cases}$

Exercice 30

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrez que A n'est pas diagonalisable.

2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Trouvez une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

3. Déduisez-en une méthode de résolution du système différentiel suivant :

$$(S) : \begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

---

1. $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$.
A n'a qu'une valeur propre qui est 1. Comme $A \neq I_2$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice A est trigonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff (A - I_2)X = 0 \iff x + 2y = 0$

Donc $E_1(A) = \mathbb{R}e'_1$ où $e'_2 = -2e_1 + e_2$.

Cherchons e'_2 tel que $Ae'_2 = e'_2 + e'_1$.

Notons $e'_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors $Ae'_2 = e'_2 + e'_1 \iff (A - I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1)

$(1) \iff \begin{cases} -2x - 4y = -2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \iff x + 2y = 1$. Le couple $(x, y) = (1, 0)$ convient. Donc $e'_2 = e_1$ vérifie $Ae'_2 = e'_2 + e'_1$.

Donc $A = PTP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Le système différentiel s'écrit $X' = AX$.

$$X' = AX \iff \begin{cases} X = PY \\ Y' = TY \end{cases}.$$

$$Y' = TY \iff \begin{cases} y'_1 = y_1 + y_2 \\ y'_2 = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y'_1 - y_1 = c_2e^t \\ y_2 = c_2e^t \end{cases} \text{ où } c_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme $y'_1 - y_1 = c_2e^t \iff \dfrac{d}{dt}\left(y_1e^{-t}\right) = c_2 \iff y_1 = e^t(c_1 + tc_2), c_1 \in \mathbb{R}$.

Comme $X = PY$, on conclut : $\begin{cases} x(t) = e^t(-2c_2t + c_2 - 2c_1) \\ y(t) = e^t(c_1 + tc_2) \end{cases}$ où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Une autre solution : $A - I = N$ où $N^2 = 0$ avec le théorème de Cayley-Hamilton ou par un calcul direct. Comme $X' = AX \iff X(t) = e^{tA}X(0)$, il suffit de calculer $e^{tA} = e^{t(I_2+N)} = e^te^{tN}$ car $IN = NI = N$ et $e^{tI} = e^tI$.
Comme $N^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$, on a $e^{tN} = I_2 + tN$.

Il s'ensuit que $e^{tA} = e^t(I_2 + t(A - I_2)) = e^t\begin{pmatrix} 1 - 2t & -4t \\ t & 1 + 2t \end{pmatrix}$.

En notant $X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ on obtient $\begin{cases} x(t) = e^t(x_0 - 2t(x_0 + 2y_0)) \\ y(t) = e^t(y_0 + t(x_0 + y_0)) \end{cases}$

Exercice 31

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Démontrez que $\lambda = 2$ est valeur propre de A et que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

On admet que A admet deux autres valeurs propres -2 et 4 avec comme vecteurs propres respectivement associés $V' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes a_0, b_0, c_0 et : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = -2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -3a_n + b_n + 3c_n \\ c_{n+1} = -a_n + b_n + 3c_n \end{cases}$.

On suppose que $a_0 = 2, b_0 = 2, c_0 = 0$. Calculez a_n, b_n et c_n en fonction de n.

---

1. On vérifie que $AV = 2V$ ave $V \neq 0$. D'où V est un vecteur propre asocié à la valeur propre 2. On vérifie aussi que $AV' = -2V'$ et $AV'' = 4V''$.

La matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ ayant 3 valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Donc $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Notons ${}^tX_n = (a_n\, b_n\, c_n) \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$. On a $X_{n+1} = AX_n$. Par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$ où $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2V' = Pe_2$.

Donc $X_n = A^n X_0 = 2A^n V' = 2(-2)^n V'$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n = 2(-2)^n$ et $c_n = 0$.

Exercice 32

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère la forme quadratique q définie sur E par : $q(v) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz$ où v est le vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base e.

1. Quelle est la matrice A de q dans la base e ?

2. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

3. Indiquez une méthode pour trouver une base e' telle que si v a pour coordonnées (X, Y, Z) dans la base e', alors $q(v)$ soit de la forme $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2$.

---

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_3(\mathbb{R})$.

2. Si C_1, C_2, C_3 sont les vecteurs colonnes de A, on a $C_1 = C_3$ et (C_1, C_2) libre. Donc $\text{rg}(A) = 2$. D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) = 1$. Donc 0 est valeur propre de A de multiplicité $1 = \dim(\text{Ker}(A))$ puisque A est diagonalisable. Comme $Ae_2 = e_2$, 1 est valeur propre de A. Comme $\text{tr}(A) = 3$ et est égal à la somme des valeurs propres, 2 est aussi valeur propre de A.

$A(e_1 - e_3) = 0$ et $A(e_1 + e_2) = 2(e_1 + e_2)$ on peut dire que $e'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$ est un vecteur propre unitaire de A associé à la valeur propre 0 et $e'_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ est un vecteur propre unitaire de A associé à la valeur propre 2.

3. Dans la base orthonormale $e' = (e'_1, e_2, e'_3)$, $q(v) = 0X^2 + 1Y^2 + 2Z^2$. Noter que $q(v) = 0$ est une équation d'un cylindre elliptique d'axe $(0, e'_1)$.

Exercice 33

1. Démontrez l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

Indication : on considèrera $\|x + \lambda y\|^2$.

2. Dans quel cas a-t-on égalité ?

---

1. On peut utiliser l'indication et refaire son cours. Proposons une autre méthode.

Si $\|x\| = 1$, $\|y - (x|y)x\|^2 = \|y\|^2 - 2(x|y)^2 + (x|y)^2 = \|y\|^2 - (x|y)^2 \geqslant 0$.

Donc $|(x|y)| \leqslant \|y\|$ *i.e.* $|(x|y)| \leqslant \|x\|.\|y\|$.

Si $x \neq 0$, $x' = \dfrac{x}{\|x\|} \Rightarrow \|x'\| = 1$ et donc $|(x'|y)| \leqslant \|y\| \Rightarrow |(x|y)| \leqslant \|x\|.\|y\|$.

Si $x = 0$, on a égalité.

2. Si $x = 0$ ou $(y = \lambda x, x \neq 0, \lambda \in \mathbb{R})$ on a égalité. Réciproquement, si $x \neq 0$ et $|(x|y)| = \|x\|\|y\|$, avec les notations précédentes, $|(x'|y)| = \|y\|$. Il découle du calcul précédent que $\|y - (x'|y)x'\|^2 = \|y\|^2 - (x'|y)^2 = 0$.

$\|\cdot\|$ étant une norme, il s'ensuit que $y - (x'|y)x' = 0$ et donc (x, y) est liée.

Donc on a égalité si, et seulement si, (x, y) est liée.

Exercice 34

Soit E un espace euclidien et A un sous-espace vectoriel de E.

1. Démontrez que $E = A \oplus A^\perp$.

Indication : on admettra le fait que toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

2. Démontrez que $(A^\perp)^\perp = A$.

---

1. Comme A est un sous-espace vectoriel de dimension p d'un espace vectoriel euclidien, il existe $(e_1, \ldots, e_p)$ base orthonormale de A. D'après le résultat admis, il existe $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ tel que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base orthonormale de E. Donc $\forall x \in E, \exists!((x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)e_i$.

$x \in A^\perp \iff (\forall y \in A, (y|x) = 0) \iff \forall i \in [\![1,p]\!], (e_i|x) = 0$ car la forme linéaire $t \mapsto (t|x)$ est nulle sur A si, et seulement si, elle l' est sur une base de A. Donc $x \in A^\perp \iff x = \sum_{i=p+1}^{n} (e_i|x)e_i$ i.e. $x \in \text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

Comme $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est libre, c'est une base de $A^\perp$.
$A = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, donc $E = A \oplus A^\perp$.
2. On déduit de 1. que $A^\perp \oplus (A^\perp)^\perp = E$ et donc $\dim(A) = \dim\left((A^\perp)^\perp\right)$.
Comme $A \subset (A^\perp)^\perp$, on conclut que $A = (A^\perp)^\perp$

Exercice 35

Soit E un espace euclidien et F, G des sous-espaces vectoriels de E.

1. Démontrez que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

1. Démontrez que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Rappelons que $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
1. Comme $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$, on a $(F+G)^\perp$ inclus dans $F^\perp$ et dans $G^\perp$. Donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
Inversement, si $x \in F^\perp \cap G^\perp$ alors $x \in F^\perp$ et $x \in G^\perp$.
Pour tout $(y,z) \in F \times G$, $(x|y+z) = (x|y) + (x|z) = 0$. D'où $x \in (F+G)^\perp$.
Donc $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$ et finalement $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Par application de 1. $(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G$ car $(F^\perp)^\perp = F$ et $(G^\perp)^\perp = G$.
Comme $(A^\perp)^\perp = A$ si A est un sous-espace vectoriel de E, il s'ensuit que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 36

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

a) Démontrez que : $\forall (x;y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

b) Démontrez que u est bijectif.

2. Démontrez que l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

---

1. a) Rappelons que : $\forall (a,b) \in E^2, 4(a|b) = \|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 \qquad (\star)$
Donc $\forall (x,y) \in E^2, 4(u(x)|u(y)) = \|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2$
$= \|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2$ car u est linéaire,
$= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$ car u conserve le norme,
$= 4(x|y)$ d'après $(\star)$.

b) $\forall x \in \text{Ker}(u), \|u(x)\| = 0 = \|x\| \Rightarrow x = 0$ car $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
Donc $u \in \mathcal{L}(E)$ est injective. Comme E est euclidien, donc de dimension finie, u est un automorphisme de E.

2. Montrons que $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un sous groupe de $\text{GL}(E)$.
• $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$ car $I_E \in \mathcal{O}(E)$.
• Soit $(u,v) \in (\mathcal{O}(E))^2$. $\forall x \in E, \|(u \circ v^{-1})(x)\| = \|v^{-1}(x)\|$ car $u \in \mathcal{O}(E)$.
Or $\|x\| = \|I_E(x)\| = \|(v \circ v^{-1})(x)\| = \|v^{-1}(x)\|$ car $v \in \mathcal{O}(E)$.
Donc $u \circ v^{-1} \in \text{GL}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ et conserve la norme ; d'où $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

Exercice 37

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrez que : $\int_a^b h(x)dx = 0 \Rightarrow h = 0$.

2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout f et tout g de E, $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Démontrez que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. Majorez $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

---

1. $H : x \mapsto \int_a^x h(t)dt$ est la primitive sur $[a,b]$ de la fonction h qui s'annule en a. La continuité de h sur $[a,b]$ implique $H \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ et $H'(x) = h(x) \geqslant 0$.
La fonction H est croissante sur $[a,b]$. Comme $H(a) = H(b) = 0$, on a, pour tout $x \in [a,b], H(x) = 0$; par suite $\forall x \in [a,b], H'(x) = h(x) = 0$.
2. Si $f, g \in E, (f|g) \in \mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto f(x)g(x)$ est continue sur le segment $[a,b]$. Comme $f.g = g.f$, $(f|g) = (g|f)$. On déduit de la linéarité de l'intégration que $f \mapsto \int_a^b f.g$ est linéaire.

Donc $(f,g) \mapsto (f|g)$ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Si $f \in E \setminus \{0\}, (f|f) = \int_a^b f^2(x)dx > 0$ d'après 1. car f^2 est continue, positive et distincte de la fonction nulle sur $[a,b]$.
Donc $(f,g) \mapsto (f|g)$ est un produit scalaire sur E.
3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit dans ce cas :
$$\forall (f,g) \in E^2 |(f|g)| \leqslant \|f\|.\|g\|.$$

Prenons $a=0, b=1, f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=e^{-x}$, on obtient

$$\left|\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx\right| = \int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx \leqslant \sqrt{\int_0^1 xdx}\sqrt{\int_0^1 e^{-2x}dx} = \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{2}.$$

Exercice 38

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Prouvez que $(f|g)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.

2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $f : x\mapsto \cos(x)$ et $g : x\mapsto \cos(2x)$. Déterminez le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x\mapsto \sin^2(x)$.

---

1. Si $f,g\in E$, $(f|g)\in\mathbb{R}$ car la fonction $x\mapsto f(x)g(x)$ est continue sur le segment $[0,2\pi]$. Comme $f.g=g.f$, $(f|g)=(g|f)$. On déduit de la linéarité de l'intégration que $f\mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f.g$ est linéaire.

Donc $(f,g)\mapsto (f|g)$ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Si $f\in E\setminus\{0\}$, $(f|f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(x)dx>0$ car f^2 est continue, positive et distincte de la fonction nulle sur $[0,2\pi]$.

Donc $(f,g)\mapsto (f|g)$ est un produit scalaire sur E.

2. $(f|g)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(x)\cos(2x)dx=\dfrac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(3x)+\cos(x))dx=0$

car $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(kx)dx=\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{2\pi}=0$ si $k\in\mathbb{N}^\star$.

$$\|f\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2x)}{2}dx=\frac{1}{2}.$$

$$\|g\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(2x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(4x)}{2}dx=\frac{1}{2}.$$

Donc $(\sqrt{2}f,\sqrt{2}g)$ est une base orthonormale de F.

Comme, on sait que si $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de F et si l'on note $P_F(x)$ le projeté orthogonal de x sur F est $P_F(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^n (e_i|x)e_i$,

$P_F(u)=(\sqrt{2}f|u)\sqrt{2}f+(\sqrt{2}g|u)\sqrt{2}g.$

$$(u|f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(x)\cos(x)dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin^3(x)}{3}\right]_0^{2\pi}=0.$$

$$(u|g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(x)\cos(2x)dx=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(2x)-\cos^2(2x))dx.$$

Donc $(u|g)=\dfrac{-1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2(2x)dx=\dfrac{-1}{8\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos(4x))dx=\dfrac{-1}{4}.$

Donc $P_F(u)=-\dfrac{1}{2}g.$

Exercice 39

Soient $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace engendré par les cinq applications : $f_1 : x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $f_2 : x\mapsto\cos(x)$, $f_3 : x\mapsto \sin(x)$, $f_4 : x\mapsto\cos(2x)$, $f_5 : x\mapsto\sin(2x)$ et F le sous-espace vectoriel engendré par f_1,f_2,f_3 : $F=\mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3)$.

1. Prouvez que $(f|g)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ définit un produit scalaire sur E.

2. Vérifiez que f_4 et f_5 sont unitaires et orthogonaux. On admettra pour la suite que $\mathcal{B}=(f_1,\dots,f_5)$ est une base orthonormée de E.

3. Déterminez le sous-espace vectoriel $F^\perp$; orthogonal de F pour ce produit scalaire.

---

1. Si $f,g\in E$, $(f|g)\in\mathbb{R}$ car la fonction $x\mapsto f(x)g(x)$ est continue sur le segment $[-\pi,\pi]$. Comme $f.g=g.f$, $(f|g)=(g|f)$. On déduit de la linéarité de l'intégration que $f\mapsto\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f.g$ est linéaire.

Donc $(f,g)\mapsto(f|g)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$.

Si $f\in\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $(f|f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx>0$ car f^2 est continue, positive et distincte de la fonction nulle sur $[-\pi,\pi]$.

Donc $(f,g)\mapsto(f|g)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$. Ce produit scalaire induit un produit scalaire sur le sous-espace vectoriel E.

2. Comme $x\mapsto f_4(x)f_5(x)$ est impaire, $(f_4|f_5)=0$.

$$\|f_4\|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(2x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos(4x))dx=1.$$

$$\|f_5\|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(2x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos(4x))dx=1.$$

Donc f_4 et f_5 sont unitaires et orthogonaux.

3. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, $F=\mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3)$ et comme $E=F\oplus F^\perp$, on peut conclure que $F^\perp=\mathrm{Vect}(f_4,f_5)$.

Exercice 40

On définit dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ l'application $\varphi(AA')) = \mathrm{tr}({}^tAA')$, où $\mathrm{tr}({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'. On note

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Démontrez que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminez une base de $\mathcal{F}^\perp$.

3. Déterminez la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

---

1. Notons $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(I_2, N)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Comme (I_2, N) est trivialement libre, (I_2, N) est une base de $\mathcal{F}$. On a aussi $N^2 = -I_2$.

Notons que $\mathcal{F} = \mathbb{R}[N]$ la sous algèbre commutative des polynômes de la matrice N.

2. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^\perp \iff \begin{cases} (M|I_2) = 0 \\ (M|N) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + d = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$ si, et seulement si, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

Donc $\mathcal{F}^\perp = \mathrm{Vect}(A, B)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme (A, B) est libre, c'est une base de $\mathcal{F}^\perp$.

Notons que $(A|B) = 0$, $\|A\| = \|b\| = \sqrt{2}$. Donc $\left(\frac{A}{\sqrt{2}}, \frac{B}{\sqrt{2}}\right)$ est une base orthonormale de $\mathcal{F}^\perp$.

3. Rappelons que si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de H et si l'on note $P_H(x)$ le projeté orthogonal de x sur H est $P_H(x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)e_i$.

Ici, $P_{\mathcal{F}^\perp}(J) = (J|\frac{A}{\sqrt{2}})\frac{A}{\sqrt{2}} + (J|\frac{B}{\sqrt{2}})\frac{B}{\sqrt{2}}$. Or $(J|A) = 0$ et $(J|B) = 2$.
Donc $P_{\mathcal{F}^\perp}(J) = B$.

Exercice 41

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. On admet que pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, alors on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrez que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

---

1. $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$ identifié à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Rappelons que $d^2(x, F) = \|x - y_0\|^2 = \|x\|^2 - \|y_0\|^2$ d'après le théorème de Pythagore et que si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de F et si l'on note $y_0 = P_F(x)$ le projeté orthogonal de x sur F est $P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)e_i$.

Ici $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $x = A$. Donc $d^2(A, F) = \|y_0\|^2 - \left((e_1|A)^2 + (e_2|A)^2 + (e_3|A)^2\right)$.
D'où $d^2(A, F) = 6 - (1 + 0 + 4) = 1$. On a donc $d(A, F) = 1$.

Exercice 42

E désigne un espace euclidien. On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y.

1. Démontrez que si f est une forme linéaire sur E, il existe un unique élément a de E tel que, pour tout x de$E$, $f(x) = (x|a)$

2. x_0 est un élément non nul de E, tel que $\|x_0\| = 1$. On note $[x_0]$ la droite vectorielle engendrée par x_0 et $[x_0]^\perp$ l'orthogonal de $[x_0]$.

a) Donnez la définition de la projection orthogonale p sur $[x_0]$.

b) Si $p(x) = \lambda x_0$, on pose $g(x) = \lambda$. Démontrez que g est une forme linéaire sur E et indiquez l'élément b de E tel que, pour tout x de E, $p(x) = (x|b)$.

---

1. L'application $\theta : E \to E^\star, a \mapsto (\cdot|a)$ est linéaire car le produit scalaire est une forme bilinéaire. θ est injective car $\theta(a) = 0 \Rightarrow \forall x \in E, (x|a) = 0$.
En particulier $(a|a) = \|a\|^2 = 0$, d'où $a = 0$.
Comme $\dim(E) = \dim(E^\star)$, il s'ensuit que θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Donc, pour tout $f \in E^\star$, il existe un unique $a \in E$ tel que $f = \theta(a)$.
i.e. $\forall f \in E^\star, \exists! a \in E, \forall x \in E, f(x) = (x|a)$.

2. a) p est l'application de E dans E telle que :

$$\forall x \in E, (p(x) - x) \in [x_0]^\perp \text{ et } p(x) \in [x_0].$$

b) $p(x) \in [x_0] \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, p(x) = \lambda x_0$;
$(p(x) - x) \in [x_0]^\perp \Rightarrow \lambda = (x|x_0)$ car $\|x_0\| = 1$. Donc $g(x) = \lambda = (x|x_0)$.

Exercice 43

E désigne un espace euclidien. On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y. Si u est un endomorphisme de E, on note $u^\star$ l'endomorphisme adjoint de u.

1. a) Si u est un endomorphisme de E, précisez, en justifiant votre réponse, l'endomorphisme $(u^\star)^\star$.

b) Si u et v sont deux endomorphismes de E, précisez, en justifant votre réponse, l'endomorphisme $(u \circ v)^\star$.

2. a) Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1<i\leqslant n}$ une base orthonormale de E. On note A la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base $\mathcal{B}$ et B la matrice de $u^\star$ dans la base $\mathcal{B}$. En justifiant votre réponse, donnez la relation qui existe entre A et B.

b) Retrouvez le résultat de la question 1.(a) à l'aide de la question 2.(a).

Rappelons que $u^\star$ est l'unique endomorphisme de E tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \big(u(x)|y\big) = \big(x|u^\star(y)\big).$$

1. a) On a donc : $\forall (x,y) \in E^2, \big(u^\star(x)|y\big) = \big(x|(u^\star)^\star(y)\big)$, par définition de l'adjoint de $u^\star$. Le produit scalaire étant symétrique, $\big(u^\star(x)|y\big) = \big(y|u^\star(x)\big) = \big(u(y)|x\big) = \big(x|u(y)\big)$.
On déduit de l'unicité de l'adjoint de $u^\star$ que $u = (u^\star)^\star$.

b) $\forall (x,y) \in E^2, \big((u \circ v)(x)|y\big) = \big(v(x)|u^\star(y)\big)$ par définition de $u^\star$,

$$= \big(x|v^\star(u^\star(y))\big), \text{ par définition de } v^\star.$$

On déduit de l'unicité de l'adjoint que $(v \circ u)^\star = v^\star \circ u^\star$.

2. a) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \big(u(e_i)|e_j\big) = \big(e_i|u^\star(e_j)\big)$.

Comme $A = (a_{i,j}) = M_{\mathcal{B}}(u)$, on a $u(e_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}e_k$ et donc $\big(u(e_i)|e_j\big) = a_{j,i}$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

Comme $B = (b_{i,j}) = M_{\mathcal{B}}(u^\star)$, on a $u^\star(e_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}e_k$ donc $\big(e_i|u^\star(e_j)\big) = b_{i,j}$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.
Donc : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{j,i} = b_{i,j}$ *i.e.* $B = {}^tA$.

b) Comme ${}^t({}^tA) = A$ et comme un endomorphisme d'un espace vectoriel a une unique matrice dans une base donnée, on retrouve $(u^\star)^\star = u$.

Exercice 44

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

1. Justifiez que A est diagonalisable.

1. Déterminez P et D dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : ${}^tP = P^{-1}$, D est diagonale, et ${}^tPAP = D$.

---

1. $A \in S_3(\mathbb{R})$. Donc A est diagonalisable.

2. En faisant la somme des vecteurs colonnes de A, on voit que -3 est une valeur propre de A associée au vecteur propre $e'_1 = (1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

$A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ étant de rang 1, on déduit du théorème du rang que -3 est valeur propre double de A. Comme $\operatorname{tr}(A) = -3$, l'autre valeur propre de A est 3.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-3}(A) \iff (A+3I_3)X = 0 \iff x - 2y + z = 0.$$

Donc $e'_1 = (1,1,1)$ et $e'_2 = (1,0,-1)$ est une base orthogonale du plan $E_{-3}(A)$.
La matrice A étant symétrique réelle diagonalisable, $\mathbb{R}^3 = E_{-3}(A) \oplus E_3(A)$ et les deux sous-espaces propres sont orthogonaux. $E_3(A)$ est donc la droite vectorielle $\mathbb{R}e'_3$ où $e'_3 = (1,-2,1)$. Notons $\mathcal{B}'' = (e''_1, e''_2, e''_3)$ avec $e''_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e'_1$, $e''_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e'_2$ et $e''_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}e'_3$. La base $\mathcal{B}''$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ constituée de valeurs propres de A. La matrice de passage P de la base canonique (orthonormale) $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ à la base orthonormale $\mathcal{B}''$ est orthogonale *i.e.* ${}^tP = P^{-1}$. On a $A = PDP^{-1} = PD{}^tP$ avec $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \operatorname{Diag}(-3,-3,3)$.

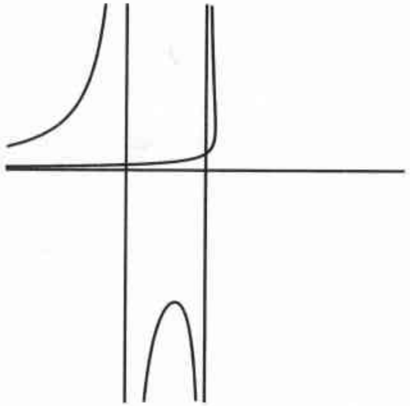
Exercice 45

Étudier la courbe définie paramétriquement par $\begin{cases} x(u) = \dfrac{u-1}{u^2} \\ y(u) = \dfrac{u^2}{u+1} \end{cases}$.

Puis donner l'allure de cette courbe.

En tant que fonctions rationnelles, $x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^\star, \mathbb{R})$ et $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \mathbb{R})$ et $x'(u) = \dfrac{2-u}{u^3}$, $y'(u) = \dfrac{u(u+2)}{(u+1)^2}$.
Les variations de x et y sont immédiates et figurent sur le tableau suivant.

u	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$\frac{dx}{du}$					$-$		‖	$+$		$+$	0	$-$	
x	0		$\searrow$		-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$
$\frac{dy}{du}$	$+$		0	$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$+$		$+$	



Exercice 46

On considère la courbe définie en coordonnées polaires par : $r = 2\sqrt{\cos(2\theta)}$.

1. Étudiez les symétries éventuelles de cette courbe.

2. Donnez l'allure de cette courbe.

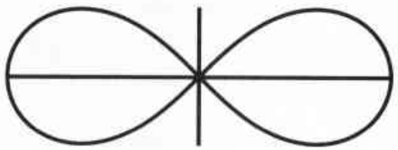
3. Précisez la tangente au point de paramètre $\theta = \frac{\pi}{4}$.

---

1. r est définie si, et seulement si, $\cos(2\theta) \geqslant 0$. Comme la fonction r est π-périodique et paire, il suffit d'étudier r sur $\mathcal{D} = [0, \pi/2] \cap \{\theta \mid \cos(2\theta) \geqslant 0\}$ et de faire subir à la courbe obtenue une symétrie par rapport à l'axe Ox suivie d'une rotation d'angle π pour avoir toute la courbe.

$\mathcal{D} = [0, \pi/4]$. $r(\theta) > 0$ si $\theta \in [0, \pi/4[$ et $\theta(\pi/4) = 0$.

2.



3. Une équation polaire de la tangente au point de paramètre $\theta = \frac{\pi}{4}$ est $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 47

Étudiez au voisinage du point de paramètre $t = 1$ la courbe définie par

$$x(t) = \int_0^t \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}du, \; y(t) = \int_0^t \frac{u^2 - 1}{u^3 + 1}du.$$

Indication : on pourra calculer les dérivées successives de x et y.

En tant que primitives de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ On a : $x'(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ et $y'(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^3 + 1}$.

Notons $f(t) = (x(t), y(t))$. On a $f(1) = f'(1) = (0, 0)$.

$x''(t) = \dfrac{4t}{(t^2+1)^2}$ et $y''(t) = \dfrac{t(-t^4 + 3t + 2)}{(t^3+1)^2}$, d'où $f''(1) = (1, 1)$ et $p = 2$.

$x^{(3)}(t) = \dfrac{4(1 - 3t^2)}{(t^2+1)^3}$ et $y^{(3)}(t) = \dfrac{(t^3+1)(-5t^4 + 6t + 2) - 6t^3(-t^4 + 3t + 2)}{(t^3+1)^3}$,

d'où $f^{(3)}(1) = \left(-1, -\dfrac{9}{4}\right)$ et donc $q = 3$.

Il s'ensuit que le point de paramètre $t = 1$ est de rebroussement de première espèce.

Exercice 48

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la courbe d'équation

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0.$$

1. a) Précisez la nature de cette courbe.

b) Tracez cette courbe.

2. Calculez la pente de la tangente en chacun des points d'intersection de la courbe et de l'axe $(O; \overrightarrow{j})$.

---

1. a) $x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0 \iff (x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 4 \qquad (1).$

$(1) \iff \dfrac{(x+1)^2}{2^2} + \dfrac{(y-1)^2}{1^2} = 1.$

La courbe est une ellipse de centre $\Omega = (-1, 1)$, avec les notations classiques, on a $a = 2$, $b = 1, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$.

b) Le tracé étant immédiat, il est laissé au lecteur.

2. Les points d'intersection de la courbe avec l'axe Oy ont pour ordonnées respectives : $y_1 = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $y_2 = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Comme le vecteur gradient de $f(x_i, y_i), 1 \leqslant i \leqslant 2$ est un vecteur normal à la courbe en M_i et comme $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y) = (2x+2, 8y-8)$, on obtient pour pentes respectives $m_1 = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ et $m_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Exercice 49

On considère la courbe paramétrée, définie par : $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$

1. Étudiez les symétries de cette courbe.

2. Donnez l'allure de cette courbe.

3. Déterminez une équation de la tangente à la courbe, au point de paramètre $t = \dfrac{\pi}{6}$.

---

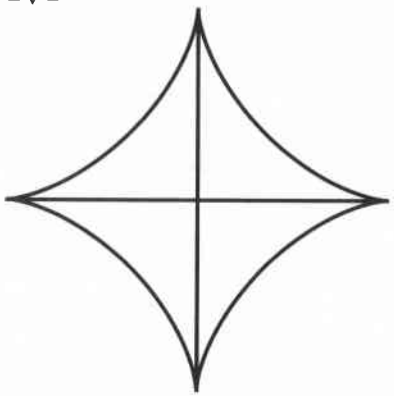
1. x et y étant 2π périodiques, il suffit d'étudier l'arc sur un intervalle d'amplitude 2π pour avoit toute la courbe $\mathcal{C}$.

$x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, donc $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à Ox.

$x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$, donc $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à Oy.

$x\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = y(t)$, donc $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à la première bissectrice.

2. Il suffit d'étudier la courbe en faisant varier t sur $[0, \pi/4]$. On a x décroissante entre 1 et $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, alors que y est croissante entre 0 et $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.



3. Si $t = \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{y(t)}{x'(t)} = -\tan(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Une équation cartésienne de la tangente demandée est $y = -\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2}$.

Exercice 50

On considère la courbe $\mathcal{C}$ définie paramétriquement par : $\begin{cases} x(u) = \dfrac{u^2 - 1}{u} \\ y(u) = \dfrac{u^2 + 1}{u + 1} \end{cases}$

Donnez l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et précisez la (ou les) asymptote(s) éventuelle(s).

---

x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^\star$ et $x(u) = u - \dfrac{1}{u} \Rightarrow x'(u) = 1 + \dfrac{1}{u^2}$.

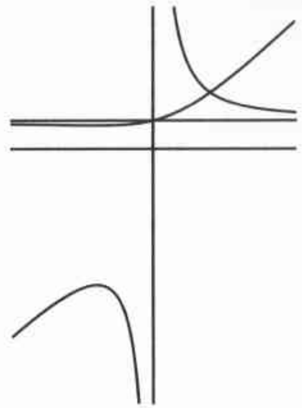
y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $y(u) = u - 1 + \dfrac{2}{u+1}$.

$y'(u) = 1 - \dfrac{2}{(u+1)^2} = \dfrac{(u + 1 + \sqrt{2})(u + 1 - \sqrt{2})}{(u+1)^2}$.

D'où un tableau de variations facile à établir.

On a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, $y(u) - x(u) + 1 = \dfrac{1}{u+1} + \dfrac{1}{u} \underset{|u| \to +\infty}{\sim} \dfrac{3}{u}$.

La droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe et l'équivalent précédent permet de préciser les positions relatives. D'où la courbe.



Exercice 51

Donnez l'allure de la courbe définie en coordonnées polaires par : $r = 2\big[\cos(\theta) - \cos(2\theta)\big]$. Précisez la tangente à cette courbe au point de paramètre $\theta = \pi$.

$\theta \mapsto r$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodique paire. On étudie sur $[0, \pi]$ et le tracé se complète par symétrie d'axe Ox.

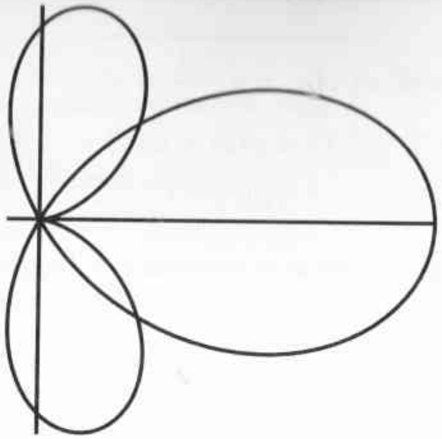
$\cos(\theta) = \cos(2\theta) \iff \theta \equiv \pm 2\pi\ [2\pi] \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ ou $\theta \in \dfrac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$.

On a le tableau

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
r	0	$+$	2	$+$	0	$-$	-4

Lorsque $\theta = \pi$ on a $\dfrac{dr}{d\theta} = 0$ et on rappelle que $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = \dfrac{dr}{d\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\overrightarrow{v_\theta}$, donc la tangente, lorsque $\theta = \pi$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{u_\pi}$ *i.e.* à Ox.

On rappelle également que lorsque $r = 0$ alors $\overrightarrow{u_\theta}$ est tangent à la courbe.



Exercice 52

On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C} : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, f et g étant deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I.

1. Expliquez comment on peut étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente au voisinage du point M_0 de paramètre t_0, avec $t_0 \in I$.

2. Appliquez les résultats précédents aux deux courbes suivantes au voisinage du point de paramètre 0 : $\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^6 \end{cases}$ et $\mathcal{C}_2 : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 \end{cases}$

Retrouvez ces résultats simplement sans utiliser la question **1.**

---

1. On note p le plus petit des éléments k de $\mathbb{N}^\star$ tels que $\dfrac{\overrightarrow{d^k M}}{dt^k}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ (s'il existe) puis q le plus petits des entiers $k > p$ tels que $\dfrac{\overrightarrow{d^k M}}{dt^k}(t_0)$ est linéairement indépendant de $\dfrac{\overrightarrow{d^p M}}{dt^p}(t_0)$ (s'il existe). Alors $\dfrac{\overrightarrow{d^p M}}{dt^p}(t_0)$ est tangent à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$.

- Si p est impair et q pair la courbe est du côté de $\dfrac{\overrightarrow{d^q M}}{dt^q}(t_0)$ et le tracé ressemble à celui d'un point birégulier. En revanche si q est impair il y a inflexion.
- Si p est pair il y a rebroussement avec traversée de tangente si q est impair et sans traversée sinon.

2. Pour $\mathcal{C}_1$ on a le développement $\overrightarrow{OM(t)} = t^3\overrightarrow{\imath} + t^6\overrightarrow{\jmath}$ d'où $(p,q) = (3,6)$. L'axe Ox est tangent et la courbe est au dessus. Comme $t \mapsto t^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même il s'agit en fait de la parabole d'équation $y = x^2$.

Pour $\mathcal{C}_2$ on a $\overrightarrow{OM(t)} = t^2\overrightarrow{\imath} + t^4\overrightarrow{\jmath}$ d'où $(p,q) = (2,4)$. Il s'agit en fait de la partie de $\mathcal{C}_1$ tracée dans le demi-plan fermé défini par $x \geqslant 0$, $M(0)$ étant un point de rebroussement mais les deux portions de parabole obtenues pour $t \leqslant 0$ et pour $t \geqslant 0$ étabnt les mêmes, parcourues dans le sens inverse.

Exercice 53

1. Donnez une représentation paramétrique, dans un repère orthonormé, du cercle de centre O et de rayon $a > 0$. Puis, déterminez le repère de Frenet en chaque point de ce cercle. Précisez la valeur du rayon de courbure.

2. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, on considère l'arc paramétré défini par $\begin{cases} x = u \\ y = u^2 \end{cases}$, pour $u \in [0, +\infty[$.

Déterminez, au point M de cette courbe correspondant au paramètre $u = 1$, le repère de Frenet, ainsi que le rayon de courbure.

---

1. Il suffit de considérer $\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = a\sin(t) \end{cases}$ pour $0 \leqslant t < 2\pi$.

$\forall t \in [0, 2\pi[$, $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)$ est de longueur a et, donc, le repère de Frenet en $M(t)$ a pour origine $M(t)$, pour premier vecteur $\overrightarrow{T} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \overrightarrow{v_t}$ et pour second vecteur $\overrightarrow{N} = -\overrightarrow{u_t}$ avec les notations usuelles.

Toujours avec les notations usuelles $\alpha(t) = t + \dfrac{\pi}{2}$ convient d'où $d\alpha = dt$ et

$$\mathcal{R} = \frac{ds}{d\alpha} = a \text{ car on a vu que } \frac{ds}{dt} = \left\| \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} \right\| = a.$$

2. Pour tout $u \geqslant 0$ on a $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{du} = (1, 2u)$ d'où $ds = \sqrt{1+4u^2}\,du$,

$\overrightarrow{T} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(1, 2u)$ et $\overrightarrow{N} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(-2u, 1)$.

On en déduit $\tan(\alpha) = 2u$ puis, en différentiant, $\dfrac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)} = (1+4u^2)d\alpha = 2du$

d'où $\mathcal{R} = \dfrac{ds}{d\alpha} = \dfrac{(1+4u^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$. Pourquoi se limiter au cas où $u = 1$?

Exercice 54

Soit l'intégrale curviligne $I = \displaystyle\int_\Gamma \omega$ où $\omega = ydx + xydy$ et Γ est la courbe fermée composée des portions de courbes comprises entre les deux points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives $y = x^2$ et $y = x$, dans un repère orthonormé.

La courbe Γ étant décrite dans le sens trigonométrique, calculez l'intégrale I :

1. directement,

2. en utilisant la formule de Green-Riemann.

---

1. On fera impérativement un dessin.
La portion de $\mathcal{C}_1$ est définie par $y = x^2$ et x va de 0 à 1, le long de cette portion $\omega = x^2dx + x^3 \times (2xdx) = (x^2 + 2x^4)dx$.
La portion de $\mathcal{C}_2$ est définie de même par $y = x$ et x va de 1 à 0 avec ici $\omega = xdx + x^2dx = (x + x^2)dx$.
D'où $I = \displaystyle\int_0^1 (x^2 + 2x^4)dx + \int_1^0 (x + x^2)dx = \int_0^1 (2x^4 - x)dx = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$.

2. On pose $\omega = Pdx + Qdy$ et, si l'on note D la partie compacte limitée par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, on rappelle la formule de Green-Riemann :

$$I = \int_\Gamma \omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Ici D est défini (dessin) par $(0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } x^2 \leqslant y \leqslant x)$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = y$.

Par suite $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (y-1)dy\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[(y-1)^2\Big]_{x^2}^x dx$

soit $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (3x^2 - 2x - x^4)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{3} - \frac{2}{2} - \frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{10}$.

Exercice 55

On considère la quadrique (S) d'équation $xy + yz = 1$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. On note q la forme quadratique associée à (S).

a) Déterminez la matrice de q dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On la notera A.

b) Déterminez une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constituée par des vecteurs propres de A.

2. a) On note P la matrice de passage de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Expliquez pourquoi la matrice de q dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est égale à $P^{-1}AP$.

b) Quelle est la nature de la quadrique (S) ?

---

1. a) $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; ainsi si l'on pose $X = {}^t(x\ y\ z)$ une équation de (S) est ${}^tXAX = 1$.

b) Le vecteur ${}^t(1\ 0\ -1)$ est élément du noyau de A au vu des colonnes de rang 1 et 3.
$2A^3 = A$ par le calcul et, donc, comme le polynôme $X(X^2 - 2)$ est annulateur de A, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$. Comme la trace de A est nulle, que A est diagonalisable car symétrique et non nulle, c'est nécessairement une égalité et les sous-espaces propres sont de dimension 1.
$AX = \sqrt{2}X \iff y = x\sqrt{2}$ et $x - y\sqrt{2} + z = 0$ d'où $\vec{\imath} + \sqrt{2}\,\vec{\jmath} + \vec{k}$ est vecteur propre associé à $\sqrt{2}$.
En rendant les vecteurs unitaires on prend donc $\vec{u} = \dfrac{1}{2}(\vec{\imath} + \sqrt{2}\,\vec{\jmath} + \vec{k})$ vecteur directeur de $E_{\sqrt{2}}(A)$, $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{k})$ vecteur directeur de $E_0(A)$ et enfin $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ vecteur directeur de $E_{-\sqrt{2}}(A)$.
Alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormale directe constituée de vecteurs propres de A.

2. a) La formule de changement de base pour une forme quadratique est plutôt $A' = {}^tPAP$ mais, comme $P \in SO_3(\mathbb{R})$, on a ${}^tP = P^{-1}$,
d'où $A' = \mathrm{Diag}\left(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\right) = P^{-1}AP$.

b) Dans cette nouvelle base orthonormale (S) admet donc pour équation $\sqrt{2}(x'^2 - z'^2) = 1$, il s'agit d'un cylindre hyperbolique d'axe $\mathbb{R}\vec{v}$.

Exercice 56

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les trois normes usuelles p_0, p_1 et p_2 définies ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$p_0(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ p_1(x,y) = |x| + |y|,\ p_2(x,y) = \max\left(|x|, |y|\right).$$

1. Démontrez que ces trois normes sont équivalentes, sans utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie.

2. On note, pour $i \in \{0, 1, 2\}$, $B_i\big((0,0), 1\big)$, la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour la norme p_i. $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ désigne un repère orthonormal du plan.
Pour chaque $i \in \{0, 1, 2\}$, déterminez l'ensemble E_i des points M du plan dont les coordonnées (x, y) dans le repère $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont telles que $(x, y) \in B_i\big((0,0), 1\big)$.

---

1. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a immédiatement $p_2(x,y) \leqslant p_1(x,y)$ qui est le produit scalaire des vecteurs $\big(|x|, |y|\big)$ et $(1, 1)$ donc inférieur ou égal à $\sqrt{2}p_0(x,y)$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
De même $p_0^2(x,y) = x^2 + y^2 \leqslant 2p_2^2(x,y)$ d'où, en définitive :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ p_2(x,y) \leqslant p_1(x,y) \leqslant \sqrt{2}p_0(x,y) \leqslant 2p_2(x,y)$$

ce qui prouve que les trois normes sont deux à deux équivalentes.

2. Pour alléger on note B_i la boule $B_i\big((0,0,1)\big)$, si $0 \leqslant i \leqslant 2$.
p_0 étant la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$, la boule B_0 est le disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
Les boules sont invariantes par symétrie par rapport à chacun des deux axes de coordonnées. On peut donc se limiter, pour définir géométriquement les boules, au quart d'espace $\mathcal{Q}$ défini par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.
Alors $(x,y) \in B_1 \cap \mathcal{Q} \iff \big(0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y \text{ et } x+y \leqslant 1\big)$.
Par suite B_1 est le carré de sommets $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ et $(0,-1)$ (bords et intérieurs compris).
De même $(x,y) \in B_2 \cap \mathcal{Q} \iff \big(0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 1\big)$ donc B_2 est le carré de sommets $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$, toujours bords et intérieurs compris.
Ainsi $B_1 \subset B_0 \subset B_2$.

Exercice 57

On considère la similitude directe s d'écriture complexe, dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$: $z' = (i-1)z + 2 - i$.

1. Déterminez le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

2. On considère dans le plan complexe les points A d'affixe i, B d'affixe -1 et C d'affixe $-i$.

a) Déterminez les points A', B' et C', images respectives de A, B et C par la similitude s.

b) Quel est la valeur de l'angle $\widehat{A'B'C'}$? de la longueur $A'C'$? de l'aire du triangle $A'B'C'$?

---

1. Le centre est le point Ω d'affixe ω vérifiant $\omega' = \omega$ *i.e.* $\omega = 1$.
Le rapport complexe est $i-1$, de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\dfrac{3\pi}{4}$ modulo 2π.

2. a) $s(i) = (i-1)i + 2 - i = 1 - 2i$, $s(-1) = (1-i) + 2 - i = 3 - 2i$ et $s(-i) = (1-i)i + 2 - i = 3$.

b) Comme s est une similitude directe on a $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$ de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
De même $\|\overrightarrow{A'C'}\| = \sqrt{2}\|\overrightarrow{AC}\| = 2\sqrt{2}$ et l'aire du triangle de sommets A', B', C' est deux fois celle du triangle de sommets A, B, C, soit 2.

Exercice 58

1. On considère le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = -1 \\ x - 2y + z = m \end{cases}$ où m désigne un réel.
Démontrez qu'il existe une unique valeur m_0 de m pour laquelle ce système admet une solution unique et donnez cette solution.

2. Dans l'espace rapporté à un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -1 \end{cases}$ et la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = u \\ y = 2 + u \\ z = -1 + u \end{cases}$

a) Démontrez que d et d' sont concourantes.

b) Démontrez que d peut être définie comme intersection des deux plans d'équations $x+y+z = 1$ et $x+y+2z = 0$ et que d' peut être définie comme intersection des deux plans d'équations $2x - y - z = -1$ et $x - 2y + z = -5$.
Déduisez-en le résultat de la question **1.**

---

1. La matrice des trois premières lignes du système est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et admet 3 pour déterminant et le triplet $(0,2,-1)$ vérifie les trois premières lignes. Pour que le système admette une solution unique il faut et il suffit que celle-ci soit $(0,2,-1)$ *i.e.* que $m = -5$ d'après la dernière ligne.

1. a) À l'intersection de d et de d' on a $x = u = t$ et aussi $y = 2+u = 2-t$ d'où $u = t = -t$, ainsi $u = t = 0$. Alors $x = 0$, $y = 2$ et $z = -1$. Réciproquement $M_0 = (0,2,-1) \in d \cap d'$. Les deux droites concourrent donc en M_0.

b) On considère l'intersection des plans d'équations $x+y+z = 1$, $x+y+2z = 0$ et on choisit le paramètre $t = x$.
On obtient alors $y + z = 1 - t$ et $y + 2z = -t$ d'où, par différence $z = -1$ puis $y = 2 - t$. Cette intersection est donc d.
De même si l'on considère l'intersection des deux autres plns et si l'on pose $u = x$, alors $y + z = 2u + 1$ et $2y - z = u + 5$ d'où, en sommant, $y = 2 + u$ et $z = -1 + u$, cette intersection est donc d'.
On en déduit que, pour $m = 5$, l'intersection des quatre plans, qui est aussi celle de d et de d', est réduite au point $(0,2,-1)$. En revanche pour montrer que l'intersection est vide lorsque $m \neq -5$ il faut reprendre le raisonnement relatif au rang constitué par le système des trois premières équations.

Exercice 59

On considère dans le plan une droite d et un point F non situé sur d. On suppose que la distance du point F à d est égale à 1.
Déterminez, en utilisant un repère orthonormé judicieusement choisi, que l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{1}{2}$ est une conique, H désignant le projeté orthogonal de M sur d.
Déterminez la nature et une équation réduite de cette conique et donnez l'allure de cette courbe.

Soient H_0 le projeté orthogonal de F sur d et O le milieu du segment $[H_0, F]$.
On pose $\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{H_0F}$ et on se place dans $(O\,; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Alors $F = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $x = -\frac{1}{2}$ est une équation de d.
Si $M = (x, y)$ alors $H = \left(-\frac{1}{2}, y\right)$ et $2MF = MH \iff 4MF^2 = MH^2$ ce qui équivaut à $4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4y^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \iff 3x^2 + 4y^2 - 5x + \frac{3}{4} = 0$.
Il s'agit effectivement de l'équation d'une conique.
On peut aussi écrire $3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + 4y^2 = \frac{4}{3}$ cette équation. Il s'agit bien sûr d'une ellipse de centre $\left(\frac{5}{6}, 0\right) = (x_0, y_0)$ avec les paramètres $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ si l'équation réduite est $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

Exercice 60

Soit dans l'espace une sphère de centre O et de rayon R, et un point A non situé sur la sphère. On note d la distance OA. Une droite Δ passant par A coupe la sphère en P et Q.
Exprimez le produit $AP \times AQ$ en fonction de d et de R, en utilisant, dans un repère orthonormé judicieusement choisi, une équation de la sphère et une représentation paramétrique de Δ.

Dans un repère orthonormé $(O\,; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ où Δ est parallèle à $\overrightarrow{k}$ une quation de la sphère est $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
Si l'on pose $A = (a, b, c)$ alors $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ et, en posant $P = A + t\,\overrightarrow{k}$ et $Q = A + s\,\overrightarrow{k}$, on a $AP \times AQ = |st|$. De plus s et t sont les racines de l'équation $a^2 + b^2 + (c + x)^2 = R^2$ car P et Q sont sur la sphère.
Cette équation s'écrit aussi $x^2 + 2cx + (d^2 - R^2) = 0$ car $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Il s'agit d'un trinôme et le produit de ses racines est $d^2 - R^2$ qui est strictement négatif. Par suite $AP \times AQ = R^2 - d^2$.
