

Chapitre 7

Dispersion des ondes

O. Thual, 2 octobre 2021

Sommaire

1	Chaine discrète de pendules	2
2	Petites oscillations couplées	3
3	Passage au continu	3
4	Relation de dispersion	4
5	Paquet à deux ondes	4
6	Paquet à N ondes	6
7	Conclusion	7

Introduction

L'exemple d'une chaîne de pendules couplés par des ressorts permet d'illustrer le cas des ondes dispersives, c'est-à-dire tel que la vitesse de phase dépend du nombre d'onde. Le principe fondamental de la dynamique, formulé avec le moment cinétique, fait intervenir les couples de torsion des ressorts en plus du moment de la force de gravité. On se place dans le cadre des petites oscillations et de l'élasticité linéaire pour le comportement des ressorts. Dans la limite où l'angle entre les pendules et la verticale varie sur des échelles spatiales grandes devant l'espacement des points d'attache, on peut le décrire par un champ continu qui obéit à l'équation de Klein-Gordon. Les ondes progressives monochromatiques solutions de cette équation aux dérivées partielles ont une pulsation reliée au nombre d'onde par une relation de dispersion. Leurs vitesses de phase, que l'on peut voir comme la vitesse de propagation des crêtes, dépend également du nombre d'onde. Un paquet d'onde est constitué d'ondes de nombres d'ondes voisins. On montre que leur enveloppe, qui est maximale lorsque toutes les ondes sont en phase, se propage à la vitesse de groupe, obtenue en dérivant la relation de dispersion. Pour l'exemple de la chaîne de pendules, la vitesse de groupe est plus petite que la vitesse de phase.

1 Chaîne discrète de pendules

On considère une chaîne de pendules dont les abscisses des points d'attaches sont notées x_i . On note $\theta_i(t)$ les angles que font, avec la verticale, les bras des pendules de longueur l et de masse négligeable. Les masses des pendules sont $\delta m = \mu dx$ où μ est une masse linéique et $\delta x = x_{i+1} - x_i$ l'espacement constant entre les attaches.

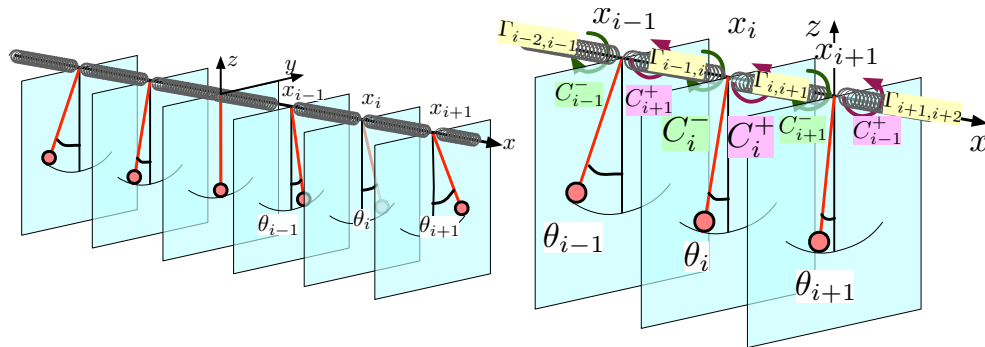


FIGURE 7.1 – Chaîne de pendules couplés par des ressorts exerçant des couples de rappels.

Les pendules sont couplés par des ressorts qui exercent des couples de torsion autour de l'axe Ox . On note $\Gamma_{i,i+1}$ la contrainte de torsion du ressort compris entre les pendules i et $i+1$, de sorte que :

- le couple exercées sur le pendule i par le ressort situé sur sa droite (du côté des x croissants) et $C_i^+ = +\Gamma_{i,i+1}$.
- le couple exercées sur le pendule i par le ressort situé sur sa gauche (du côté des x décroissants) et $C_i^- = -\Gamma_{i-1,i}$.

On suppose que l'écart entre les angles de deux pendules voisins est petits, si bien que l'on peut se placer dans le cadre d'un comportement rhéologique élastique des ressorts en torsion. On peut alors écrire la loi de Hooke suivante :

$$\Gamma_{i,i+1} = \frac{\beta}{\delta x} (\theta_{i+1} - \theta_i), \quad (7.1)$$

où β est une constante de dimension N.m^2 .

2 Petites oscillations couplées

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au ressort i est ici écrit à l'aide du moment cinétique $l^2 \delta m \dot{\theta}_i(t)$ par rapport à l'axe Ox , l'accélération tangentielle étant $l \ddot{\theta}_i(t)$. On obtient alors

$$l^2 \delta m \ddot{\theta}_i = M + C_i^+ + C_i^- = -l \delta m g \sin \theta_i + \beta \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\delta x} - \beta \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\delta x}, \quad (7.2)$$

où g est la gravité et $M = -l \delta m g \sin \theta_i$ le moment du poids de la masse par rapport à l'axe Ox .

En supposant que les oscillations sont petites, on peut effectuer l'approximation $\sin \theta_i \sim \theta_i$, ce qui conduit, en utilisant $\delta m = \mu \delta x$, au système couplé :

$$\ddot{\theta}_i = -\frac{g}{l} \theta_i + \frac{\beta}{l^2 \mu} \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\delta x^2} = -\omega_*^2 \theta_i + c^2 \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\delta x^2}, \quad (7.3)$$

où $\omega_* = \sqrt{g/l}$ a la dimension d'une pulsation (rad.s^{-1}) et $c = \sqrt{\beta/(l^2 \mu)}$ a la dimension d'une vitesse (m.s^{-1}).

3 Passage au continu

On s'intéresse à des mouvements dont l'échelle de variation spatiale est grande devant δx . On peut ainsi prendre la limite $\delta x \rightarrow 0$ avec une masse linéique $\mu = \delta m/\delta x$ constante. On peut alors considérer le champ continu $\theta(x, t)$ par interpolation des valeurs discrètes $\theta(x_i, t) = \theta_i(t)$. On écrit alors les développements limités suivantes :

$$\theta_{i+1}(t) = \theta(x_i + \delta x, t) + \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_i, t) \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x_i, t) \delta x^2 + O(\delta x^3), \quad (7.4)$$

$$\theta_{i-1}(t) = \theta(x_i - \delta x, t) - \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_i, t) \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x_i, t) \delta x^2 + O(\delta x^3). \quad (7.5)$$

En en déduit la limite continue de l'équation $\ddot{\theta}_i = -\omega_*^2 \theta_i + c^2 \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\delta x^2}$:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\omega_*^2 \theta + c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (7.6)$$

Cette équation aux dérivées partielles est appelée "équation de Klein-Gordon", ou encore équation des ondes 1D avec dispersion.

4 Relation de dispersion

On cherche des solutions complexes de l'équation de Klein-Gordon sous la forme :

$$\theta(x, t) = A e^{i\omega t - i k x - i\varphi}, \quad (7.7)$$

où A est une amplitude réelle, φ une phase, ω une pulsation et k un nombre d'onde. La solution réelle associée est une onde progressive monochromatique (OPM) qui s'écrit : $\theta(x, t) = \Re(\theta) = A \cos(kx - \omega t + \varphi)$. En reportant l'expression dans l'équation aux dérivées partielles et en remarquant que $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\omega^2 \theta$ et $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -k^2 \theta$, la pulsation ω et le nombre d'onde k doivent être liés par la relation $-\omega^2 = -\omega_*^2 - c^2 k^2$. On en déduit la relation de dispersion $\omega = \pm\Omega(k)$ avec

$$\Omega(k) = \sqrt{\omega_*^2 + c^2 k^2}. \quad (7.8)$$

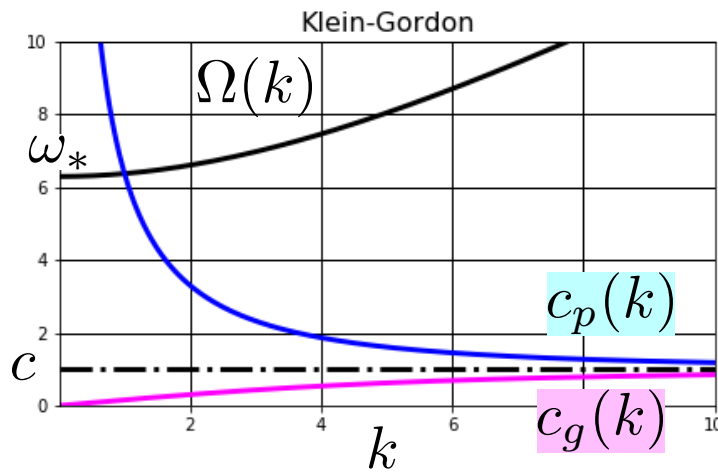


FIGURE 7.2 – Relation de dispersion $\Omega(k)$ et vitesse de phase $c_p(k)$ et de groupe $c_g(k)$ associées pour l'équation de Klein-Gordon.

La vitesse de phase $c_p(k) = \Omega(k)/k$ est la vitesse de propagation des crêtes, des creux ou d'une phase particulière de l'onde, dans la mesure où la solution peut s'écrire sous la forme $\theta(x, t) = A \cos\{k[x - c_p(k)t]\}$.

La vitesse de groupe est définie par la relation $c_g(k) = \Omega'(k)$ et vaut ici

$$c_g(k) = \frac{c^2 k}{\sqrt{\omega_*^2 + c^2 k^2}} = \frac{c^2}{c_p(k)}. \quad (7.9)$$

Pour cet exemple, on remarque que $c_p(k) c_g(k) = c^2$.

5 Paquet à deux ondes

On considère la superposition de deux ondes progressives monochromatiques (OPM) de même amplitude et de nombres d'onde voisins $k_1 = k_0 + \delta k$ et $k_2 = k_0 - \delta k$, avec δk petit :

$$\theta(x, t) = A \cos[k_1 x - \Omega(k_1) t] + A \cos[k_2 x - \Omega(k_2) t]. \quad (7.10)$$

En appliquant la formule trigonométrique $\cos p + \cos q = \cos \frac{p+q}{2} + \cos \frac{p-q}{2}$, on peut écrire

$$\theta(x, t) = 2 A \cos(k_0 x - \bar{\omega} t) \cos(\delta k x - \delta \omega t), \quad (7.11)$$

$$\text{avec } \bar{\omega} = \frac{\Omega(k_0 + \delta k) + \Omega(k_0 - \delta k)}{2} = \Omega(k_0) + O(\delta k) \quad (7.12)$$

$$\text{et } \delta \omega = \frac{\Omega(k_0 + \delta k) - \Omega(k_0 - \delta k)}{2} = \Omega'(k_0) \delta k + O(\delta k^2). \quad (7.13)$$

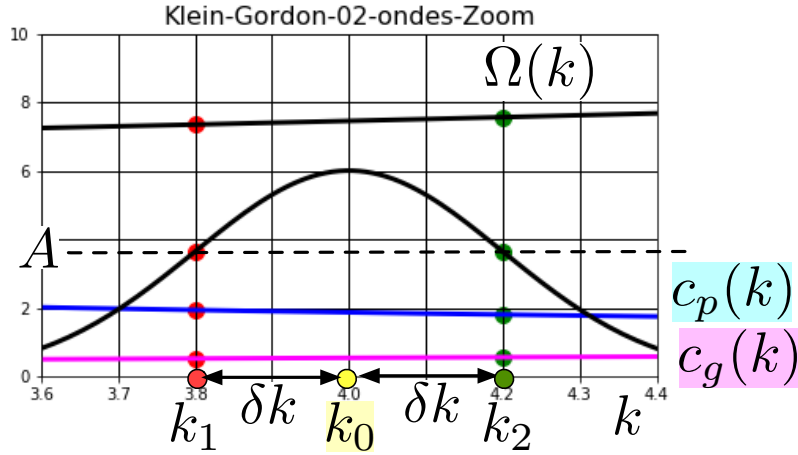


FIGURE 7.3 – Vitesses de phase c_p et de groupe c_g de deux ondes de nombres d'onde k_1 et k_2 voisin, avec δk petit.

À l'ordre dominant en δk , le paquet à deux ondes s'écrit donc :

$$\theta(x, t) \sim 2 A \cos[k_0 (x - c_{p0} t)] \cos[\delta k (x - c_{g0} t)], \quad (7.14)$$

où $c_{p0} = \Omega(k_0)/k_0$ et $c_{g0} = \Omega'(k_0)$. C'est le produit d'une onde progressive monochromatique de nombre d'onde k_0 et de vitesse de phase c_{p0} par une enveloppe qui se propage à la vitesse de groupe c_{g0} . La période spatiale $2\pi/\delta k$ de l'enveloppe est grande devant la période $2\pi/k_0$ de l'onde porteuse.

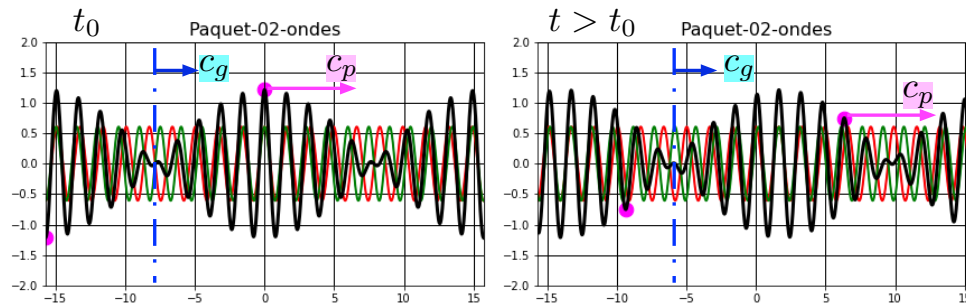


FIGURE 7.4 – Superposition des ondes k_1 (rouge) et k_2 (vert) pour deux instants successifs. L'enveloppe se propage à la vitesse de groupe c_g qui est plus petite que la vitesse de phase c_p .

6 Paquet à N ondes

On considère la superposition de N ondes progressives monochromatiques (OPM) de nombres d'onde $k_n = k_0 + \delta k_n$, pour $n = 1, N$, et d'amplitude modulées par une fonction gaussienne sous la forme

$$\theta(x, t) = A \sum_{n=1}^N G(k_n) \cos[k_n x - \Omega(k_n) t], \quad (7.15)$$

où A est une amplitude et $G(k) = \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{2\delta k^2}\right]$, avec δk_n et δk petits. La solution complexe $\underline{\theta}$ associée, telle que $\theta = \Re(\underline{\theta})$, s'écrit

$$\underline{\theta}(x, t) = A \sum_{n=1}^N e^{i\Omega(k_n)t - i k_n x - \frac{\delta k_n^2}{2\delta k^2}} = A \sum_{n=1}^N e^{i\Omega(k_0 + \delta k_n)t - i k_n x - \frac{\delta k_n^2}{2\delta k^2}}. \quad (7.16)$$

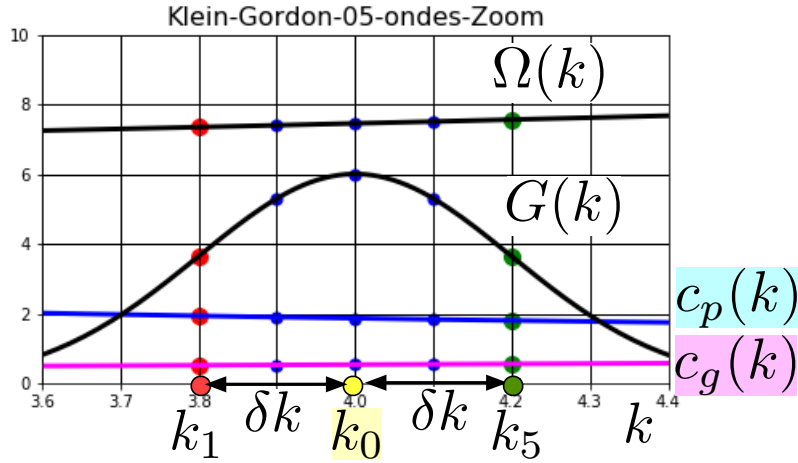


FIGURE 7.5 – Vitesses de phase c_p et de groupe c_g de cinq ondes de nombres d'onde k_1, k_2, \dots, k_5 voisins, avec δk petit, dont les amplitudes $G(k)$ décroissent lorsque k_n s'écarte de k_0 .

En utilisant l'approximation $\Omega(k_0 + \delta k_n) = \omega + c_{g0} \delta k_n$ avec $\omega = \Omega(k_0)$ et $c_{g0} = \Omega'(k_0)$, on peut écrire

$$\underline{\theta}(x, t) = A e^{i\omega_0 t - i k_0 x} F(x - c_{g0} t) \quad \text{avec} \quad F(X) = \sum_{n=1}^N e^{-i \delta k_n X - \frac{\delta k_n^2}{2\delta k^2}}. \quad (7.17)$$

On suppose que les δk_n sont répartis de manière symétrique autour de 0 de sorte que $\delta k_n + \delta k_{N+1-n} = 0$ pour tout n . Il en résulte que l'enveloppe $F(X)$ est réelle. On montre que cette enveloppe tend vers une gaussienne lorsque N tend vers l'infini avec une répartition dense des δk_n .

On a donc montré que le paquet d'onde s'écrit sous la forme

$$\theta(x, t) = A \cos[k_0 (x - c_{p0} t)] F(x - c_{g0} t), \quad (7.18)$$

que l'on peut interpréter comme une onde progressive monochromatique de nombre d'onde k_0 et de vitesse de phase $c_{p0} = c_p(k_0)$, modulée par une enveloppe F qui se propage à la vitesse de groupe $c_{g0} = c_g(k_0)$. La figure 7.6

représente le cas $N = 5$ avec une enveloppe donc l'intervalle de localisation est petit devant sa période mais grand devant la longueur d'onde de la porteuse. Le maximum d'amplitude est obtenu lorsque les ondes monochromatiques de longueurs d'ondes k_n sont en phase.

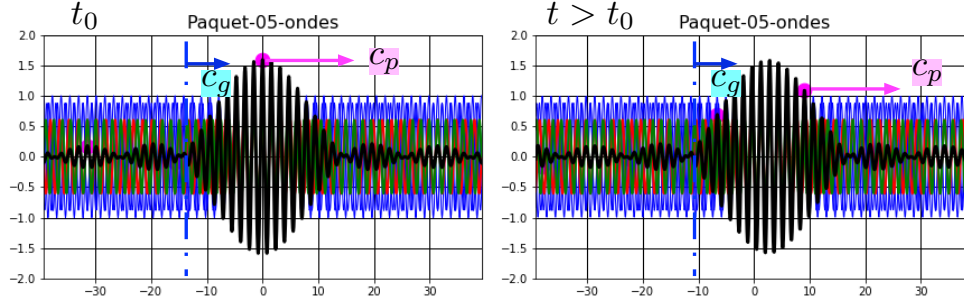


FIGURE 7.6 – Superposition des ondes k_1 (rouge) et k_2 (vert) pour deux instants successifs. L'enveloppe se propage à la vitesse de groupe c_g qui est plus petite que la vitesse de phase c_p .

7 Conclusion

L'exemple d'une chaîne de pendules couplés par des ressorts a permis de donner un sens physique à l'équation de Klein-Gordon, qui constitue un exemple simple d'ondes dispersives. Les ondes progressive monochromatiques solutions de cette équation aux dérivée partielles ont une vitesse de phase, que l'on peut illustrer par la vitesse des maxima, qui dépend du nombre d'onde. La relation de dispersion permet d'exprimer la pulsation d'une telle onde en fonction de son nombre d'onde. La vitesse de groupe, définie par la dérivée de la relation de dispersion, est la vitesse de l'enveloppe d'un paquet d'onde des nombres d'ondes voisins.

FORMULAIRE

Petites oscillations couplées

Couples de rappels C_i^+ et C_i^- exercés par les ressorts sur le pendule i :

$$C_i^+ = +\Gamma_{i,i+1} \quad \text{et} \quad C_i^- = -\Gamma_{i-1,i} \quad \text{avec} \quad \Gamma_{i,i+1} = \frac{\beta}{\delta x} (\theta_{i+1} - \theta_i). \quad (7.19)$$

Équation du mouvement pour les petites oscillations :

$$l^2 \delta m \ddot{\theta}_i = l \delta m g \sin \theta_i + \beta \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\delta x} - \beta \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\delta x}, \quad (7.20)$$

Équation de Klein-Gordon

En notant $\mu = \delta m / \delta x$ la masse linéique de la chaîne, la limite continue $\delta x \rightarrow 0$ avec μ constant conduit à l'équation de Klein-Gordon :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\omega_*^2 \theta + c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad \omega_* = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{\frac{\beta}{l^2 \mu}}. \quad (7.21)$$

Relation de dispersion, vitesse de phase et vitesse de groupe :

$$\Omega(k) = \sqrt{\omega_*^2 + c^2 k^2}, \quad c_p(k) = \frac{\Omega(k)}{k}, \quad c_g(k) = \Omega'(k) = \frac{c^2 k}{\sqrt{\omega_*^2 + c^2 k^2}}. \quad (7.22)$$

Paquet d'ondes

Superposition d'ondes progressives monochromatiques de nombres d'ondes voisins :

$$\theta(x, t) = A \cos[k_0 (x - c_{p0} t)] F(x - c_{g0} t), \quad (7.23)$$

où $F(X)$ est une enveloppe modulant l'onde progressive monochromatique.

$$\text{Cas } N = 2 : \quad F(X) = 2 \cos(\delta k X). \quad (7.24)$$

EXERCICES

EXERCICE 7.1 Paquet d'ondes dispersives

On considère l'équation de Klein-Gordon $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \omega_*^2 \theta = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$.

- 1) Quelle relation doivent vérifier k , σ et ω pour que la notation complexe $\underline{\theta} = A \exp(\sigma t + i \omega t - i k x)$ soit solution ? On suppose A , σ , ω et k réels.

On doit vérifier $\sigma = 0$ ainsi que la relation de dispersion $\omega = \pm \Omega(k)$ avec $\Omega(k) = \sqrt{\omega_*^2 + c^2 k^2}$.

- 2) Quelle relation doivent vérifier k , σ et ω pour que la notation complexe $\underline{\theta} = A \exp(\sigma t + i \omega t - i k x)$ soit solution de l'équation des ondes amorties $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial \theta}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ avec $\mu > 0$? On suppose A , σ , ω et k réels. Comparer les solutions de cette équation avec celle de l'équation de Klein-Gordon dans le cas μ petit.

On doit vérifier $s^2 + 2\mu s + c^2 k^2 = 0$ avec $s = \sigma + i\omega$. Dans le cas $\mu \rightarrow 0$, on a $\sigma \sim -\mu$ et $\omega \sim kc$. Ces ondes sont non dispersives et amorties, tandis que les ondes de l'équation de Klein-Gordon sont dispersives et non amorties.

- 3) On considère la superposition des ondes $\theta_1(x, t) = A \sin(k_1 x - \omega_1 t)$ et $\theta_2(x, t) = A \sin(k_2 x - \omega_2 t)$ avec $k_1 = k_0 - \delta k$, $k_2 = k_0 + \delta k$, $\omega_1 = \Omega(k_1)$ et $\omega_2 = \Omega(k_2)$ où $\Omega(k)$ est la relation de dispersion de l'équation de Klein-Gordon. Montrer que $\theta(x, t) = 2A \cos[k_0 (x - \tilde{c}_p t)] F(x - \tilde{c}_g t)$ où \tilde{c}_p ,

\tilde{c}_g et $F(X)$ sont des grandeurs que l'on précisera.

En appliquant la formule trigonométrique $\sin p + \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ on a $\tilde{c}_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2k_0}$ et $\tilde{c}_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\delta k}$.

- 4) On considère la superposition d'onde progressive monochromatique solution suivante :

$$\theta(x, t) = \frac{A}{N} \sum_{m=-M}^M \cos(k_m x - \omega_m t), \quad (7.25)$$

avec $N = 2M + 1$, $k_m = k_0 + \delta k_m$, $\delta k_m = m \kappa$, $\kappa = 2\delta k/N$ et $\omega_m = \Omega(k_m)$, où $\Omega(k)$ est la relation de dispersion de l'équation de Klein-Gordon. En supposant que δk est petit et en utilisant l'approximation $\Omega(k_m) \sim \Omega(k_0) + c_{g0} \delta k_m$ avec $c_{g0} = \Omega'(k_0)$, montrer que $\theta(x, t) \sim A \cos[k_0(x - c_{p0}t)] F(x - c_{g0}t)$ où $c_{p0} = \Omega(k_0)/k_0$ et $F(X)$ une fonction réelle que l'on déterminera. On pourra admettre ou montrer, au préalable, la relation suivante :

$$\sum_{m=-M}^M u^m = \frac{u^{-(M+\frac{1}{2})} - u^{(M+\frac{1}{2})}}{u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}}. \quad (7.26)$$

En notation complexe, on peut écrire

$$\underline{\theta} = \frac{A}{N} \sum_{m=-M}^M e^{i\Omega(k_0 + \delta k_m)t - i(k_0 + \delta k_m)x} \sim \frac{A}{N} e^{i\Omega(k_0)t - i k_0 x} \sum_{m=-M}^M e^{i\delta k_m(c_{g0}t - x)}, \quad (7.27)$$

On calcule l'expression de l'enveloppe $F(X)$ qui est :

$$F(X) = \frac{1}{N} \sum_{m=-M}^M e^{-i\delta k_m X} = \frac{1}{M} \sum_{m=-M}^M e^{-i m \kappa X} = \frac{1}{M} \sum_{m=-M}^M u^m = \frac{u^{-(M+\frac{1}{2})} - u^{(M+\frac{1}{2})}}{u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}}, \quad (7.28)$$

avec $u = \exp(-i\kappa X)$. On en déduit :

$$F(X) = \frac{1}{N} \frac{\sin[(M + \frac{1}{2})\kappa X]}{\sin(\frac{\kappa}{2} X)} = \frac{\sin(\delta k X)}{N \sin[\frac{\delta k}{N} X]}. \quad (7.29)$$

- 5) La figure 7.7 représente la fonction $G_N(Y) = \frac{\sin Y}{N \sin(Y/N)}$ pour N croissant. Décrire l'enveloppe $F(X)$ pour N grand. Dessiner schématique le paquet d'onde dans le cas $N = 20$ en supposant $\delta k = k_0/100$.

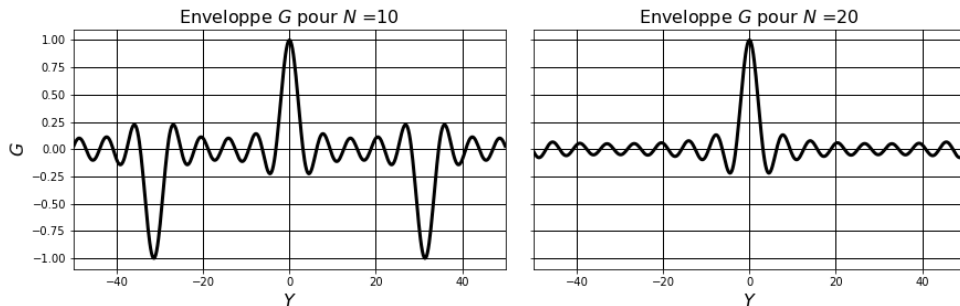


FIGURE 7.7 – Fonction $G_N(Y) = \frac{\sin Y}{N \sin(Y/N)}$ pour $N = 10$ et $N = 20$.

La période de G_N , donc de $F(X) = G_N(\delta k X)$, est de plus en plus grande lorsque N devient grand. La fonction $G_N(Y)$ converge simplement vers la fonction $G(Y) = \sin(Y)/Y$. L'enveloppe, dont l'extension est en $1/\delta k$, se propage à la vitesse de groupes, modulant l'onde porteuse de longueur d'onde $2\pi/k_0$.