

Chapitre 6

Ondes électriques amorties dans un coaxial

O. Thual, 2 octobre 2021

Sommaire

1	Description d'un cable coaxial	2
2	Discrétisation d'un coaxial	3
3	Passage au continu	3
4	Amortissement temporel	3
5	Amortissement spatial	4
6	Conclusion	5

Introduction

La discrétisation d'un câble coaxial permet de modéliser ce système de transmission de signaux électriques comme une suite de petits circuits RLC . L'application des lois de Kirchoff et le passage au continu établit que le champ de courant dans l'âme du coaxial est solution de "l'équation des ondes 1D amorties". On étudie alors la décroissance temporelle de l'amplitude d'une onde progressive monochromatique à l'aide de la notation complexe. Cette approche est pertinente pour aborder l'amortissement des oscillations d'un barreau élastique ou d'une corde tendue de tailles finies, modélisées par cette même équation. On utilise également la notation complexe pour étudier la décroissance spatiale d'une onde progressive monochromatique, cette situation étant pertinente dans le cas de la transmission d'un signal le long d'un axe avec un faible amortissement.

1 Description d'un câble coaxial

Un câble coaxial comporte un fil conducteur d'électricité, appelé "âme", entouré d'un diélectrique (isolant), lui-même entouré d'une tresse ou d'un tube conducteur, le tout étant protégé par une gaine de protection en plastique (figure 6.1). Les deux conducteurs partagent le même axe Ox , d'où le nom de ce câble. Ce système est utilisé pour la transmission de signaux numériques ou analogiques à haute ou basse fréquence.

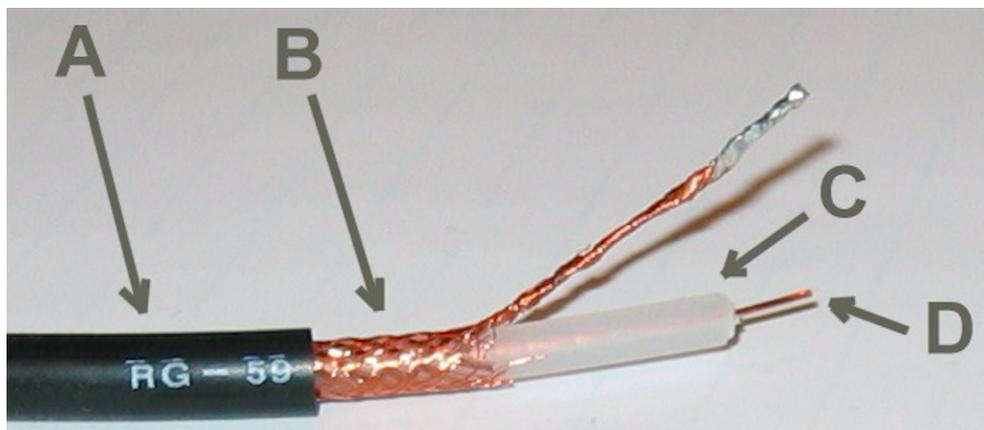


FIGURE 6.1 – Structure d'un coaxial. A) Gaine extérieure de protection. B) Blindage en cuivre. C) Diélectrique isolant. D) Conducteur central (âme) (Wikipedia).

Sa forme permet de protéger les signaux des perturbations électromagnétiques extérieures. Le blindage extérieur, relié à la masse, joue le rôle de cage de Faraday et empêche ainsi que les perturbations vers le milieu extérieur.

2 Discrétisation d'un coaxial

On modélise le câble coaxial en le découpant en petits tronçons de longueur δx . L'âme du tronçon de centre x_i est parcouru par un courant $I_i(t)$ et se comporte comme une bobine d'inductance $\Lambda \delta x$, résultant de son interaction avec le blindage. L'âme oppose aussi une résistance $\rho \delta x$, souvent faible. On modélise la polarisation du diélectrique par des petits condensateurs de capacité $\Gamma \delta x$ situés aux extrémités $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ des tronçons. On note $U_{i+\frac{1}{2}}(t)$ la tension en ces points.

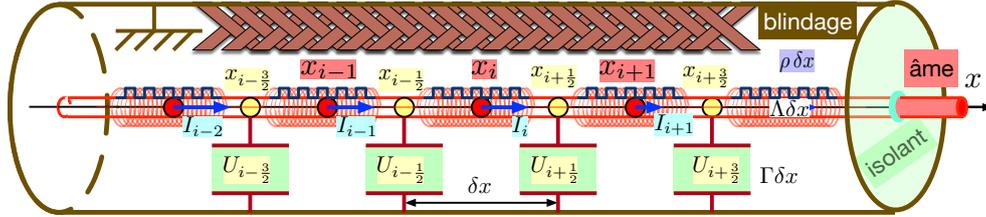


FIGURE 6.2 – Discrétisation d'un coaxial en petits tronçons.

L'application des lois de Kirchoff comporte la loi des mailles et la loi des noeuds suivants :

$$\begin{aligned} U_{i-\frac{1}{2}}(t) - U_{i+\frac{1}{2}}(t) &= \Lambda \delta x \dot{I}_i(t) + \rho \delta x I_i(t) , \\ I_i(t) - I_{i+1}(t) &= \Gamma \delta x \dot{U}_{i+\frac{1}{2}}(t) . \end{aligned} \quad (6.1)$$

3 Passage au continu

Dans la limite $\delta x \rightarrow 0$, on décrit le courant et la tension par des champs continus $I(x, t)$ et $U(x, t)$ par extrapolation des valeurs discrètes $I_i(t) = I(x_i, t)$ et $U_{i+\frac{1}{2}}(t) = U(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$. En appliquant la définition $f'(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$ de la dérivée d'une fonction, les lois de Kirchoff deviennent

$$-\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = \Lambda \frac{\partial I}{\partial t}(x, t) + \rho I(x, t) \quad \text{et} \quad -\frac{\partial I}{\partial x}(x, t) = \Gamma \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) . \quad (6.2)$$

En éliminant le champ $U(x, t)$, on obtient l'équation des ondes 1D amorties suivante :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}(x, t) + 2\mu \frac{\partial I}{\partial t}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\rho}{2\Lambda} . \quad (6.3)$$

4 Amortissement temporel

On cherche des solutions complexes de l'équation $\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial I}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$ sous la forme

$$\underline{I}(x, t) = A e^{\sigma t} e^{i\omega t - ikx - i\varphi} , \quad (6.4)$$

où A (amplitude), ω (pulsation), k (nombre d'onde) et φ (phase) sont des constantes réelles. Comme l'équation est linéaire à coefficients réels, le complexe conjugué d'une solution $\underline{I}(x, t)$ est aussi solution, et donc sa partie réelle $I(x, t) = \Re(\underline{I}) = A e^{\sigma t} \cos(kx - \omega t + \varphi)$ est une solution réelle.

En notant $s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ et en remarquant que $\frac{\partial \underline{I}}{\partial t} = s \underline{I}$ et $\frac{\partial \underline{I}}{\partial x} = -ik \underline{I}$ pour l'expression de $\underline{I}(x, t)$ proposée, on obtient, en reportant dans l'équation :

$$(s^2 + 2\mu s + c^2 k^2) A e^{\sigma t} e^{i\omega t - ikx - i\varphi} = 0. \quad (6.5)$$

On suppose ici que $\mu^2 < k^2 c^2$, si bien que les racines de l'équation du second degré $s^2 + 2\mu s + c^2 k^2$ en s sont $s_{\pm} = -\mu \pm i\omega_*$ avec $\omega_* = \sqrt{k^2 c^2 - \mu^2}$. On a donc obtenu des solutions de la forme (??) avec $\sigma = -\mu < 0$ et $\omega = \pm\omega_*$. Ce sont des ondes d'amplitude décroissante qui s'écrivent et se propagent :

$$\begin{aligned} \text{vers la droite} & : I_-(x, t) = A_- e^{-\mu t} \cos(kx - \omega_* t + \varphi_-), \\ \text{vers la gauche} & : I_+(x, t) = A_+ e^{-\mu t} \cos(kx + \omega_* t + \varphi_+), \end{aligned} \quad (6.6)$$

avec $\omega_* = \sqrt{k^2 c^2 - \mu^2}$.

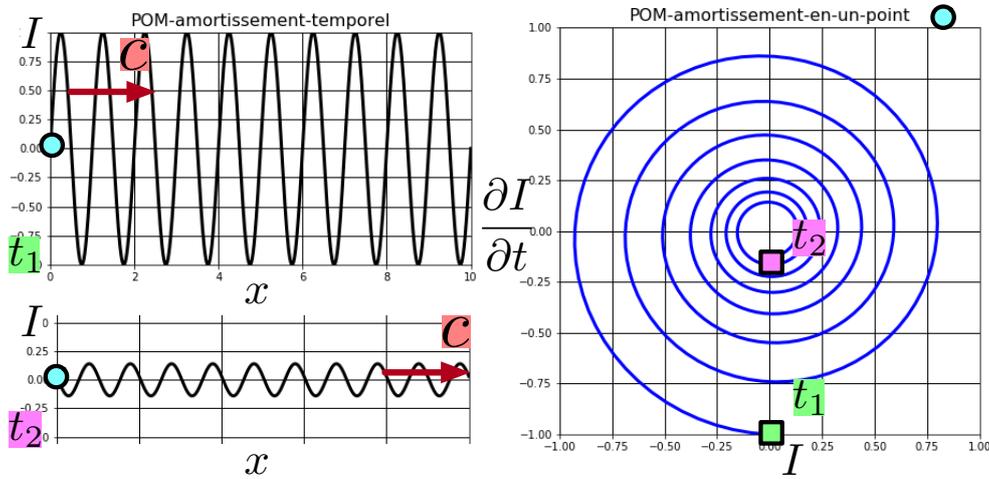


FIGURE 6.3 – Onde progressive monochromatique amortie au cours du temps. Profils $I(x, t_1)$ et $I(x, t_2)$ et spirale $[I(0, t); \frac{\partial I}{\partial t}(0, t)]$ pour $t \in [t_1, t_2]$.

5 Amortissement spatial

On cherche maintenant des solutions complexes de l'équation $\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial I}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$ sous la forme

$$\underline{I}(x, t) = A e^{\gamma x} e^{i\omega t - ikx - i\varphi}, \quad (6.7)$$

où A (amplitude), γ , k (nombre d'onde) et φ (phase) sont des constantes réelles. La partie réelle $I(x, t) = \Re(\underline{I}) = A e^{\gamma x} \cos(kx - \omega t + \varphi)$ est une solution réelle si \underline{I} est une solution complexe.

En notant $\kappa = \gamma - ik \in \mathbb{C}$ et en remarquant que $\frac{\partial \underline{I}}{\partial t} = i\omega \underline{I}$ et $\frac{\partial \underline{I}}{\partial x} = \kappa \underline{I}$ pour l'expression de $\underline{I}(x, t)$ proposée, on obtient, en reportant dans l'équation :

$$(-\omega^2 + 2i\mu\omega - \kappa^2 c^2) A e^{\gamma x} e^{i\omega t - ikx - i\varphi} = 0. \quad (6.8)$$

Le carré du nombre complexe κ est donc donné par $\kappa^2 c^2 = -\omega^2 + 2i\mu\omega$. En notant $Z = \kappa c/\omega$, cette équation s'écrit $Z^2 = -(1 - 2i\epsilon)$ avec $\epsilon = \mu/\omega$. On suppose ici dans le cas d'une faible résistance telle que $\epsilon \ll 1$. On peut alors faire

le développement limité $(\gamma - ik)c/\omega = Z = \pm i(1 - 2i\epsilon)^{1/2} = \pm[i + \epsilon + O(\epsilon^2)]$. On en déduit $-k = \pm\omega/c + O(\epsilon)$ et $\gamma = \pm\mu/c + O(\epsilon^2)$. À l'ordre dominant en ϵ , les champs complexes $\underline{I}(x, t)$ sont donc solutions pour les choix suivants :

$$\gamma - ik = \pm \left(\frac{\mu}{c} + i \frac{\omega}{c} \right). \quad (6.9)$$

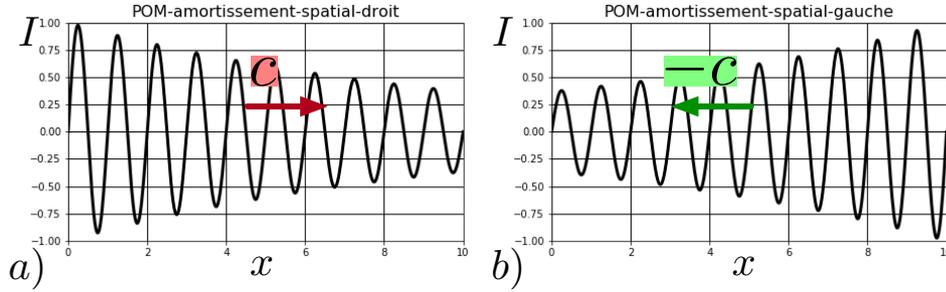


FIGURE 6.4 – Onde progressive monochromatique amortie le long de l'axe. a) Onde $I_-(x, t)$ se propageant vers la droite. b) Onde $I_+(x, t)$ se propageant vers la gauche.

Les solutions générales sont donc des ondes progressives spatialement amorties qui se propagent :

$$\begin{aligned} \text{vers la droite} & : I_-(x, t) = A_- e^{-(\mu/c)x} \cos(k_* x - \omega t + \varphi_-), \\ \text{vers la gauche} & : I_+(x, t) = A_+ e^{(\mu/c)x} \cos(k_* x + \omega t + \varphi_+), \end{aligned} \quad (6.10)$$

avec $k_* = \omega/c$ (figure 6.4). On remarque que le taux d'amortissement μ/c ne dépend pas de la pulsation ω ou du nombre d'onde k_* .

6 Conclusion

La propagation des signaux électriques dans un câble coaxial est décrite par l'équation des ondes 1D amorties, comme l'a montré l'application de la loi des mailles et des noeuds à la discrétisation du câble en une série de circuits RLC. Une condition initiale sous la forme d'une onde monochromatique se propage vers la droite ou vers la gauche avec une amplitude qui s'amortit avec le temps. Sous un autre point de vue, une condition aux limites harmonique génère une onde monochromatique qui se propage vers la droite ou vers la gauche avec une amplitude qui décroît exponentiellement avec l'espace dans le sens de la propagation. L'amortissement temporel se rencontre plus facilement pour le cas des ondes élastiques longitudinales dans un barreau élastique ou des ondes transversales d'une corde tendues, tandis que l'amortissement spatial est plus approprié à la description des ondes électriques dans un câble coaxial.

FORMULAIRE

Lois de Kirchoff

$$\begin{aligned} U_{i-\frac{1}{2}}(t) - U_{i+\frac{1}{2}}(t) &= \Lambda \delta x \dot{I}_i(t) + \rho \delta x I_i(t), \\ I_i(t) - I_{i+1}(t) &= \Gamma \delta x \dot{U}_{i+\frac{1}{2}}(t). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Équations des ondes amorties

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial I}{\partial t} + \rho I \quad \text{et} \quad -\frac{\partial I}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial I}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\rho}{2\Lambda}. \quad (6.13)$$

Amortissement temporel

En supposant $\mu^2 < k^2 c^2$:

$$\begin{aligned} \text{Vers la droite} &: I_-(x, t) = A_- e^{-\mu t} \cos(kx - \omega_* t + \varphi_-), \\ \text{Vers la gauche} &: I_+(x, t) = A_+ e^{-\mu t} \cos(kx + \omega_* t + \varphi_+). \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\text{avec } \omega_* = \sqrt{k^2 c^2 - \mu^2}.$$

Amortissement spatial

En supposant $\epsilon = \mu/\omega \ll 1$:

$$\begin{aligned} \text{vers la droite} &: I_-(x, t) = A_- e^{-(\mu/c)x} \cos(k_* x - \omega t + \varphi_-), \\ \text{vers la gauche} &: I_+(x, t) = A_+ e^{(\mu/c)x} \cos(k_* x + \omega t + \varphi_+), \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\text{avec } k_* = \omega/c.$$

EXERCICES

EXERCICE 6.1 Équation des télégraphistes

On considère un câble coaxial dont l'inductance linéique est $\Lambda = 0,16 \mu\text{H.m}^{-1}$, la capacité linéique est $\Gamma = 100 \text{ pF.m}^{-1}$ et la résistance linéique est $\rho = 2 \cdot 10^{-8} \Omega.\text{m}^{-1}$ et donc une conductance linéique $G_a = 1/\rho = 5 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1} = 5 \cdot 10^7 \Omega^{-1}.\text{m}$. On suppose qu'un courant de fuite très faible peut passer entre

l'âme et la tresse avec une conductance linéique $g \delta x$ avec $g = 10^{-11} \text{ S.m}^{-1}$ (figure 6.5).

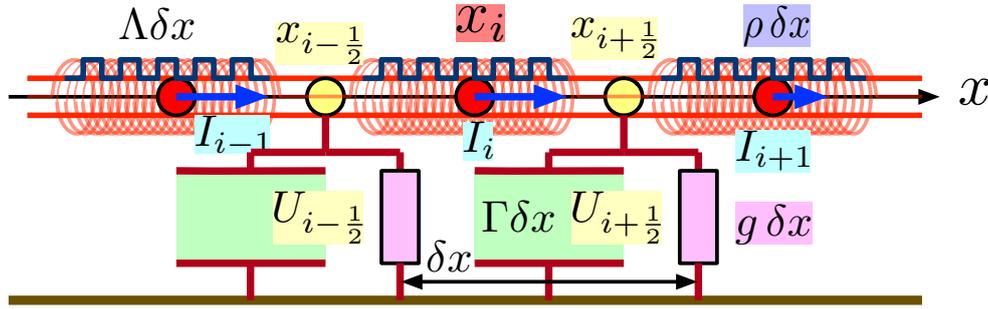


FIGURE 6.5 – Discrétisation d'un câble coaxial avec conductance.

1) Justifier la loi des noeuds $I_i(t) - I_{i+1}(t) = \Gamma \delta x \dot{U}_{i+\frac{1}{2}}(t) + g \delta x U_{i+\frac{1}{2}}(t)$.

La conductance $g \delta x$ est l'inverse de la résistance du courant de fuite vers la masse.

2) Écrire la loi des mailles pour chaque tronçon.

La loi des mailles $U_{i-\frac{1}{2}}(t) - U_{i+\frac{1}{2}}(t) = \Lambda \delta x \dot{I}_i(t) + \rho \delta x I_i(t)$ ne fait pas intervenir la conductance de fuite.

3) Montrer, dans la limite continue $\delta x \rightarrow 0$, que le système est régi par l'équation des télégraphiste suivante :

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial I}{\partial t} + \rho I \quad \text{et} \quad -\frac{\partial I}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial U}{\partial t} + g U. \quad (6.16)$$

Il suffit d'utiliser la définition de la dérivée d'une fonction en x après interpolation des grandeurs discrètes en champs continus.

4) En déduire que $I(x, t)$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + 2(\mu + \nu) \frac{\partial I}{\partial t} + 4\mu\nu I = c^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}, \quad (6.17)$$

où c , μ et ν sont des constantes que l'on exprimera en fonction de ρ , g , Λ et Γ . Donner leurs valeurs numériques en précisant les unités.

Il suffit d'éliminer $U(x, t)$ pour obtenir l'équation avec $c = 1/\sqrt{\Lambda\Gamma} = 2.5 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$, $\mu = \rho/(2\Lambda) = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ et $\nu = g/(2\Gamma) = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$.

5) On cherche des solutions complexes de la forme $\underline{I} = A e^{\sigma t} e^{i\omega t - ikx - i\varphi}$, où A , ω , k et φ sont des constantes réelles. En supposant que $(\mu - \nu)^2 < c^2 k^2$, calculer σ et ω pour un k donné, afin que \underline{I} soit solution. En déduire l'expression des solutions réelles.

En posant $s = \sigma + i\omega$ et en reportant dans l'équation, on doit résoudre l'équation du second degré $s^2 + 2(\mu + \nu)s + 4\mu\nu + c^2 k^2 = 0$. Comme le discriminant est négatif, les solutions sont $s_{\pm} = -(\mu + \nu) \pm i\omega_*$ avec $\omega_* = \sqrt{k^2 c^2 - (\mu - \nu)^2}$. Les solutions réelles sont de la forme :

$$\begin{aligned} \text{vers la droite} & : I_-(x, t) = A_- e^{-(\mu+\nu)t} \cos(kx - \omega_* t + \varphi_-), \\ \text{vers la gauche} & : I_+(x, t) = A_+ e^{-(\mu+\nu)t} \cos(kx + \omega_* t + \varphi_+). \end{aligned} \quad (6.18)$$

6) On cherche des solutions complexes de la forme $\underline{I}(x, t) = A e^{\gamma x} e^{i\omega t - ikx - i\varphi}$, où A , ω , k et φ sont des constantes réelles. En supposant que μ/ω et ν/ω

sont d'ordre ϵ avec $\epsilon \ll 1$, $(\mu - \nu)^2 < c^2 k^2$, calculer γ et k pour un ω donné, afin que \underline{I} soit solution. En déduire l'expression des solutions réelles.

En posant $\kappa = \gamma - i k$ et en reportant dans l'équation, on doit résoudre l'équation du second degré $-\omega^2 + 2i(\mu + \nu)\omega + 4\mu\nu = \kappa^2 c^2$. On en déduit $\kappa^2 c^2 = (-i k + \gamma)^2 c^2 = -k^2 c^2 - 2i k \gamma c^2 + O(\epsilon^2) = -\omega^2 + 2i(\mu + \nu)\omega + 4\mu\nu$. Comme $\mu\nu = O(\epsilon^2)$, on peut négliger ce dernier terme. On en déduit que $k = \mp k_*$ avec $k_* = \omega/c$ et $\gamma = -(\mu + \nu)\omega/(k c^2)$. Les solutions réelles sont de la forme :

$$\begin{aligned} \text{vers la droite} & : I_-(x, t) = A_- e^{-[(\mu + \nu)/c]x} \cos(k_* x - \omega t + \varphi_-), \\ \text{vers la gauche} & : I_+(x, t) = A_+ e^{[(\mu + \nu)/c]x} \cos(k_* x + \omega t + \varphi_+). \end{aligned} \quad (6.19)$$