

# Chapitre 4

## Oscillations propres d'une corde tendue

*O. Thual, 2 octobre 2021*

### Sommaire

---

1	Discrétisation de la dynamique d'une corde tendue	2
2	Petites oscillations . . . . .	2
3	Passage au continu et équation de D'Alembert . . .	3
4	Solutions stationnaire de l'équation de D'Alembert	4
5	Modes propres pour des extrémités fixes . . . . .	4
6	Modes propres avec une extrémité libre . . . . .	5
7	Expérience de la corde de Melde . . . . .	6
8	Conclusion . . . . .	7

---

## Introduction

Les petites oscillations d'une corde tendue, comme les cordes de piano, de guitare ou de violon, peuvent être modélisées par des mouvements transversaux avec une tension de module constant. Seul le petit angle que fait cette tension avec l'axe de la corde varie. L'application du principe fondamental à des petits tronçons de corde fait intervenir la masse linéique de la corde. Dans la limite du continu, le quotient de la tension et de cette masse linéique est égale au carré de la vitesse de propagation des ondes, décrites par l'équation de D'Alembert. Lorsque les deux extrémités de la corde sont fixes, les ondes stationnaires forment une famille discrète que l'on appelle "modes propres d'oscillations". Lorsqu'une extrémité est libre de glisser sans frottement le long d'un axe transverse, les ondes stationnaires forment une autre famille de modes propres. L'expérience de la corde de Melde consiste à fixer une extrémité et à imposer un déplacement sinusoïdal à l'autre extrémité. L'amplitude de réponse des oscillations de la corde tend vers l'infini lorsque la pulsation du forçage s'approche des pulsations propres de la corde à deux extrémités fixes.

### 1 Discrétisation de la dynamique d'une corde tendue

On discrétise une corde d'axe  $Ox$ , de longueur  $L$  et de tension  $T$  en la découpant en  $N - 1$  tronçons de longueur  $\delta x = L/N$ , d'abscisses  $x_i$  pour  $i = 1, N - 1$  et de masse  $\delta m = m/N$  où  $m$  est la masse de la corde. Les tronçons d'abscisses  $x_0$  et  $x_N$ , situés aux extrémités, sont de longueur  $\delta x/2$  et de masse  $\delta m/2$  (figure 4.1).

On suppose que les oscillations sont petites de sorte que le module de la tension peut être considéré constant et que l'angle dont elle s'écarte de l'axe  $Ox$  est petit. On note  $\theta_{i+\frac{1}{2}}$  pour  $i = 0, N - 1$  cet angle aux points intermédiaires  $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ . En notant  $y_i$  le déplacement de la corde en  $x_i$ , l'hypothèse d'angles petits permet d'écrire :

$$\sin \theta_{i+\frac{1}{2}} \sim \theta_{i+\frac{1}{2}} \sim \tan \theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\delta x} . \quad (4.1)$$

### 2 Principe fondamental

On note  $\mu = m/L$  la masse linéique de la corde de sorte que  $\delta m = \mu \delta x$ . Le principe fondamental de la dynamique, appliqué aux tronçons  $i = 1, N - 1$  et projeté sur l'axe  $Oy$ , s'écrit

$$\delta m \ddot{y}_i = T \sin \theta_{i+\frac{1}{2}} - T \sin \theta_{i-\frac{1}{2}} . \quad (4.2)$$

La projection du principe fondamental sur l'axe  $Ox$  permet de vérifier que les abscisses  $x_i$  sont immobiles en approximant les cosinus des angles  $\theta_{i+\frac{1}{2}}$  par un, sous l'hypothèse des petites oscillations. Cette hypothèse permet également d'approximer les sinus de ces angles par leurs valeurs, ce qui conduit à :

$$\mu \ddot{y}_i = T \frac{\theta_{i+\frac{1}{2}} - \theta_{i-\frac{1}{2}}}{\delta x} . \quad (4.3)$$

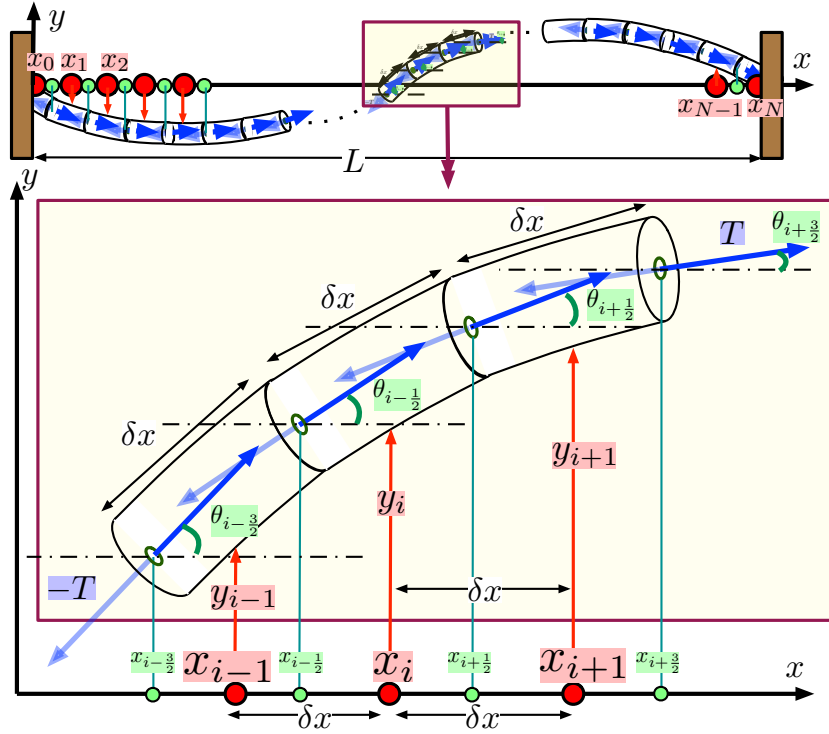


FIGURE 4.1 – Discretisation de la déformation d'une corde tendue.

Les approximations  $\theta_{i+\frac{1}{2}} \sim \tan \theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+1}-y_i}{\delta x}$  et  $\theta_{i-\frac{1}{2}} \sim \tan \theta_{i-\frac{1}{2}} = \frac{y_i-y_{i-1}}{\delta x}$  conduisent à l'équation :

$$\ddot{y}_i = c^2 \frac{y_{i+1} - 2y_i + 2y_{i-1}}{\delta x^2} \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{pour } i = 1, N-1. \quad (4.4)$$

### 3 Passage au continu et équation de D'Alembert

Dans la limite où  $\delta x \rightarrow 0$ , on considère le champ de déplacement continu  $y(x, t)$  par extrapolation des valeurs discrètes en posant  $y(x_i, t) = y_i(t)$ . On peut alors écrire les développements limités suivants :

$$\begin{cases} y_{i+1}(t) = y(x_i + \delta x, t) = y(x_i, t) + \frac{\partial y}{\partial x}(x_i, t) \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_i, t) \delta x^2 + O(\delta x^3) \\ y_{i-1}(t) = y(x_i - \delta x, t) = y(x_i, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x_i, t) \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_i, t) \delta x^2 + O(\delta x^3) . \end{cases} \quad (4.5)$$

En reportant dans l'équation du mouvement, on obtient

$$\ddot{y}_i(t) = c^2 \frac{y_{i+1}(t) - 2y_i(t) + y_{i-1}(t)}{\delta x^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_i, t) + O(\delta x). \quad (4.6)$$

Dans la limite  $\delta x \rightarrow 0$ , on obtient l'équation de D'Alembert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t). \quad (4.7)$$

On peut retrouver ce résultat par passage à la limite du continu des deux

équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{y}_i(t) = c^2 \frac{\theta_{i+\frac{1}{2}}(t) - \theta_{i-\frac{1}{2}}(t)}{\delta x} & \xrightarrow{\delta x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t), \\ \theta_{i+\frac{1}{2}}(t) = \frac{y_{i+1}(t) - y_i(t)}{\delta x} & \xrightarrow{\delta x \rightarrow 0} \theta(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \end{cases}, \quad (4.8)$$

et en remplaçant l'expression du champ continu  $\theta(x, t)$  dans la première équation aux dérivées partielles.

## 4 Solutions stationnaire de l'équation de D'Alembert

On cherche des solutions stationnaires de l'équation  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  sous la forme  $y(x, t) = F(x) G(t)$ . En reportant dans l'équation on obtient

$$F(x) G''(t) = c^2 F''(x) G(t) \implies \frac{G''}{G}(t) = c^2 \frac{F''}{F}(x) = \kappa, \quad (4.9)$$

où  $\kappa$  est une constante, seule façon d'obtenir l'égalité entre une fonction qui ne dépend que du temps  $t$  et d'une fonction qui ne dépend que de l'espace  $x$ .

Le cas  $\kappa = \sigma^2 > 0$  conduit aux fonctions  $F(x) = F_+ e^{\sigma x/c} + F_- e^{-\sigma x/c}$  et  $G(t) = G_+ e^{\sigma t} + G_- e^{-\sigma t}$ , ce qui n'a pas d'intérêt ici.

Le cas physique  $\kappa = -\omega^2 < 0$  conduit aux solutions :

$$F(x) = F_m \cos(kx + \varphi_F) \quad \text{et} \quad G(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi_G) \quad (4.10)$$

avec  $\omega = kc$ , où  $F_m$  et  $G_m$  sont des amplitudes arbitraires et  $\varphi_F$  et  $\varphi_G$  des phases arbitraires. Les solutions stationnaires de l'équation de D'Alembert sont donc de la forme

$$y(x, t) = A \cos(kx + \varphi_F) \cos(\omega t + \varphi_G) \quad \text{avec} \quad \omega = kc, \quad (4.11)$$

où  $A$  est une amplitude arbitraire et  $\varphi_F$  et  $\varphi_G$  des phases arbitraires.

## 5 Modes propres pour des extrémités fixes

On suppose ici que les extrémités de la corde, de longueur  $L$ , de tension  $T$  et de masse  $m$ , sont fixes. Les petites oscillations sont donc régies par l'équation de D'Alembert  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  avec  $c = \sqrt{T/\mu}$ , où  $\mu = m/L$  est la masse linéique, avec les conditions limites  $y(0, t) = y(L, t) = 0$  pour tout temps  $t$ . Les solutions stationnaires forment une famille dénombrable qui s'écrit :

$$y_n(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (4.12)$$

avec  $k_n = n \frac{\pi}{L}$  et  $\omega_n = ck_n$  pour  $n$  entier, où  $A$  est une amplitude arbitraire et  $\varphi_n$  une phase arbitraire. La figure 4.2 représente le tracé de  $y_n(x, t)$  pour différentes valeurs de  $n$  et de  $t$ . On montre que toute solution  $y(x, t)$  de l'équation de D'Alembert avec ces conditions aux limites se décompose de manière unique sur la base des modes propres sous la forme  $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x, t)$ .

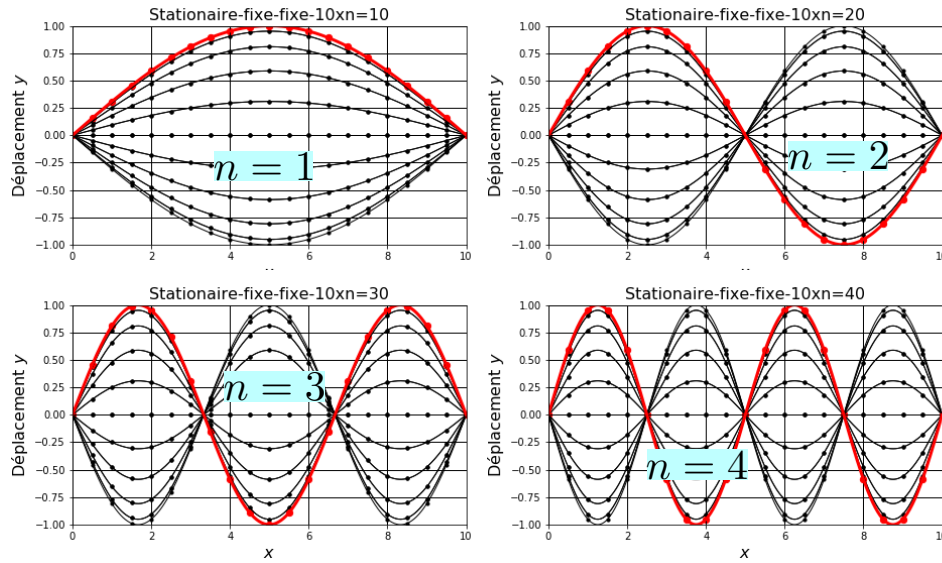


FIGURE 4.2 – Modes propres d’oscillations  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  dans le cas des extrémités fixes. En rouge :  $y_n(x, 3T_n/4)$  pour  $T_n = 2\pi/\omega_n$ .

## 6 Modes propres avec une extrémité libre

On suppose maintenant que l’extrémité située en  $x = L$  est libre de glisser sans frottement le long de l’axe  $Ly$  parallèle à l’axe  $Oy$  et passant par le point  $(x, y) = (L, 0)$ . La tension  $T$  est alors perpendiculaire à  $Ly$ , donc parallèle à l’axe  $Ox$ . On peut donc écrire  $\theta_{N-\frac{1}{2}} = \frac{y_N - y_{N-1}}{\delta x} = 0$ . Par passage à la limite  $\delta x \rightarrow 0$ , la conditions aux limites libre s’écrit  $\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$  pour tout temps  $t$ .

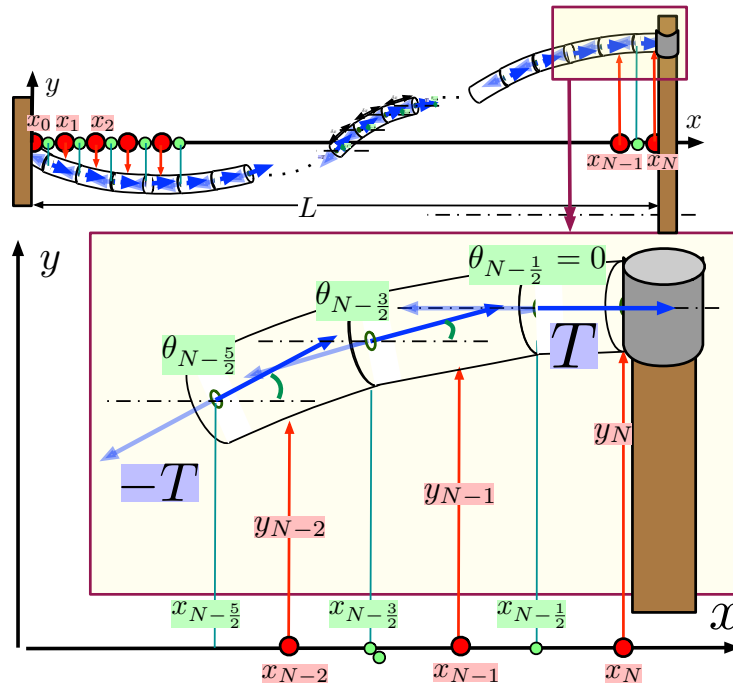


FIGURE 4.3 – La tension est perpendiculaire à l’axe  $Oy$ .

La résolution de l'équation de D'Alembert avec les conditions aux limites  $y(0, t) = 0$  et  $\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$  pour tout temps  $t$  conduit aux solutions

$$y_n(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (4.13)$$

avec  $k_n = n \frac{\pi}{L}$  et  $\omega_n = c k_n$  pour  $n$  **demi-entier**, où  $A$  est une amplitude arbitraire et  $\varphi_n$  une phase arbitraire. La figure 4.4 représente le tracé de  $y_n(x, t)$  pour différentes valeurs de  $n$  et de  $t$ . On montre que toute solution  $y(x, t)$  de l'équation de D'Alembert avec ces conditions aux limites se décompose de manière unique sur la base des modes propres :  $y(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{\frac{1}{2}+p} y_{\frac{1}{2}+p}(x, t)$ .

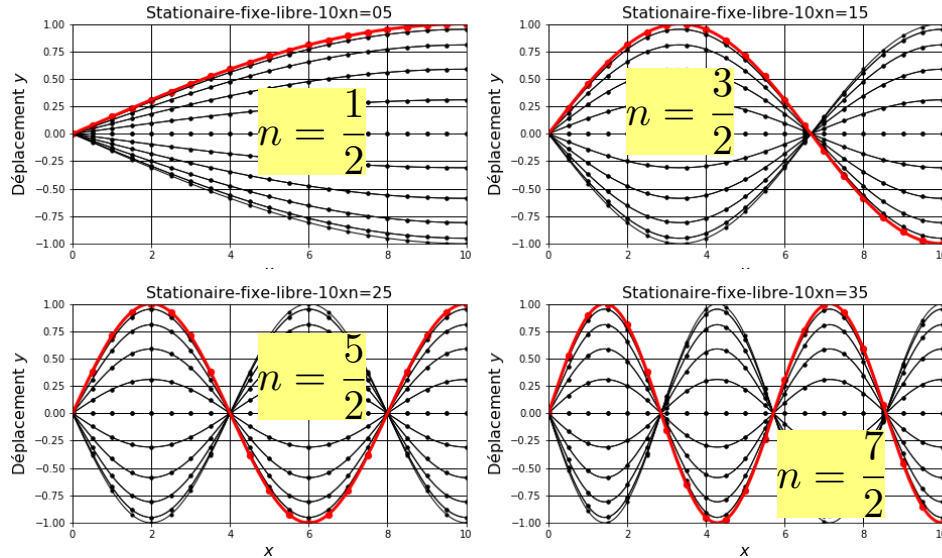


FIGURE 4.4 – Modes propres d'oscillations  $n \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\}$  dans le cas d'une extrémité libre. En rouge :  $y_n(x, 3T_n/4)$  pour  $T_n = 2\pi/\omega_n$ .

## 7 Expérience de la corde de Melde

On suppose ici que le déplacement d'une extrémité est contraint par un oscillateur d'amplitude  $A_e$  et de pulsation  $\omega_e$ . La réponse est donc solution de l'équation de D'Alembert  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  avec les conditions aux limites :

$$y(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad y(L, t) = A_e \cos(\omega_e t) \quad \text{pour tout temps } t. \quad (4.14)$$

Comme  $x = 0$  est un noeud, la solution s'écrit  $y(x, t) = A \sin(k_e x) \cos(\omega_e t)$  avec  $k_e = \omega_e/c$  pour satisfaire l'équation de D'Alembert et  $A \sin(k_e L) = A_e$  pour satisfaire la condition aux limites en  $x = L$ .

On note  $X = \omega/\omega_1$  où  $\omega_1 = \pi c/L$  est la pulsation du mode propre  $n = 1$  des oscillations de la corde dans le cas où les deux extrémités sont fixes. En notant  $Y = A/A_e$  le rapport de l'amplitude de l'onde stationnaire sur l'amplitude de forçage, la courbe de réponse de l'expérience de la corde Melde est donnée par  $Y = 1/\sin(\pi X)$  (figure 4.5). La corde entre en résonance pour  $\omega_e = n\omega_1 = \omega_n$  avec  $n$  entier. Ces valeurs de résonance  $X = n$  sont les pulsations des modes propres d'oscillation de la corde avec extrémités fixées. La figure 4.6 représente les solutions stationnaires obtenues dans le voisinage de la résonance  $X = 2$ .

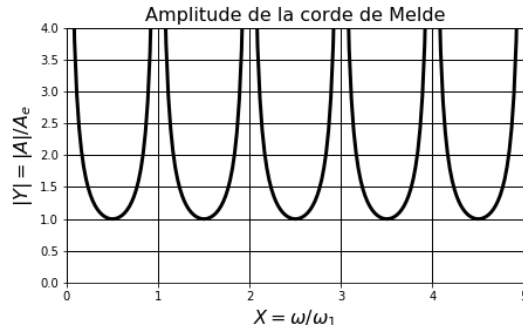


FIGURE 4.5 – Fonction de réponse  $Y = 1/\sin(\pi X)$ .

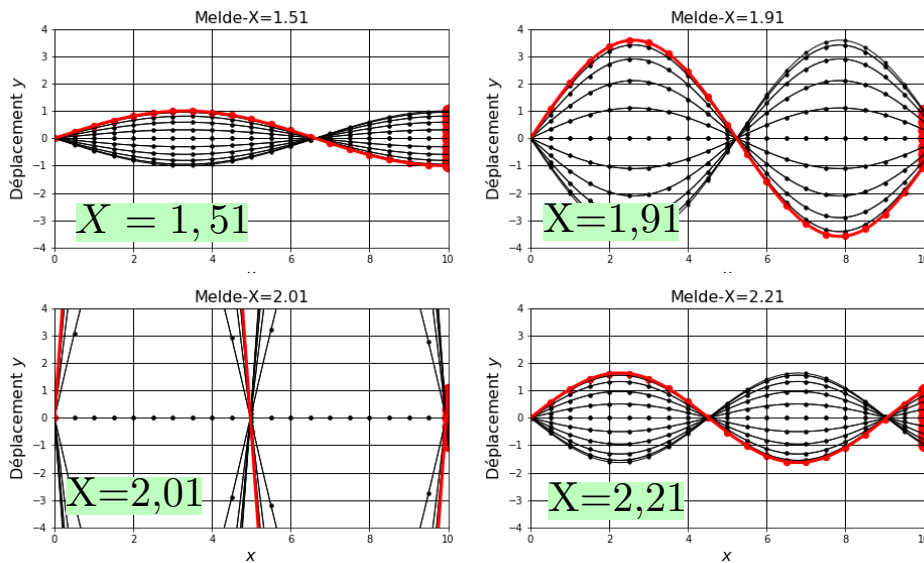


FIGURE 4.6 – Solutions stationnaires pour  $A_e = 1$  et différentes valeurs de  $X$ .

## 8 Conclusion

En discrétisant une corde tendue en petits tronçons soumis à une tension de module constant et d'angles petits par rapport à l'axe, on a modélisé ses petites oscillations par l'équation de D'Alembert, par passage au continu. Dans le cas où les extrémités sont fixes, les solutions stationnaires forment une famille discrète dont les pulsations sont des multiples de la pulsation du mode fondamental, qui comprend un ventre au milieu de la corde. Cette famille, aux amplitudes arbitraires, forme une base des solutions de l'équation de D'Alembert avec extrémités fixes. Il en va de même pour le cas où une des extrémités est fixe et l'autre libre, les pulsations propres étant des multiples demi-entier de cette pulsation de base. L'expérience de la corde de Melde, qui consiste à imposer un oscillation harmonique pour le déplacement d'une extrémité en maintenant l'autre extrémité fixe, montre que la corde entre en résonance lorsque la pulsation de forçage est une pulsation propre des oscillations avec extrémités fixes.

## FORMULAIRE

### Petites oscillations du modèle discret

Le mouvement des petits tronçons de corde tendue est régi par le système :

$$\ddot{y}_i = c^2 \frac{y_{i+1} - 2y_i + 2y_{i-1}}{\delta x^2} \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{pour } i = 1, N-1. \quad (4.15)$$

### Solutions stationnaires de l'équation de D'Alembert

Équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (4.16)$$

Conditions aux limites rigides :  $y(0, t) = y(L, t) = 0$  :

$$y_n(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad \text{pour } n \text{ entier} \quad (4.17)$$

avec  $k_n = n \frac{\pi}{L}$  et  $\omega_n = c k_n = n \frac{\pi c}{L}$ . Toute solution se décompose en :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x, t). \quad (4.18)$$

Conditions aux limites mixtes :  $y(0, t) = 0$  et  $\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$  :

$$y_n(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad \text{pour } n \text{ demi-entier} \quad (4.19)$$

avec  $k_n = n \frac{\pi}{L}$  et  $\omega_n = c k_n = n \frac{\pi c}{L}$ . Toute solution se décompose en :

$$y(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{\frac{1}{2}+p} y_{\frac{1}{2}+p}(x, t). \quad (4.20)$$

### Expérience de la corde de Melde

Conditions aux limites mixtes :  $y(0, t) = 0$  et  $y(L, t) = A_e \cos(\omega_e t)$  :

$$y(x, t) = A \sin(k_e x) \cos(\omega_e t) \quad \text{avec } Y = \frac{A}{A_e} = \frac{1}{\sin(\pi X)} \quad (4.21)$$

et  $X = \frac{\omega_e}{\omega_1}$  où  $\omega_1 = \frac{\pi L}{c}$  et  $k_e = \frac{\omega_e}{c}$ . Résonance pour  $X = n$  avec  $n$  entier.



## EXERCICES

## EXERCICE 4.1 Deux extrémités libres

On considère une corde tendue de longueur  $L$ , de tension  $T$  et de masse  $L$ . On suppose que ses deux extrémités, en  $x = 0$  et  $x = L$ , glissent sans frottement le long d'un axe parallèle à  $Oy$ . Les oscillations de la corde sont régies par l'équation de D'Alembert  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ .

- 1) Exprimer la vitesse  $c$  en fonction des paramètres et écrire les conditions aux limites.

On a  $c = \sqrt{T/\mu}$  où  $\mu = m/L$  est la masse linéique de la corde. Les conditions aux limites sont  $\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$  pour tout temps  $t$ .

- 2) Montrer que les solutions stationnaires sont de la forme  $y_n(x, t) = A \cos(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$  où  $A$  est une amplitude arbitraire,  $\varphi_n$  une phase arbitraire,  $n$  un entier positif et  $k_n$  et  $\omega_n$  des grandeurs que l'on exprimera. Comment nomme-t-on cette famille de solutions ?

Comme  $\frac{\partial y_n}{\partial x}(x, t) = -A k_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ , ces champs de déplacement vérifient les conditions aux limites  $\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$  pour  $k_n = n\pi/L$  avec  $n$  entier. Pour satisfaire l'équation de D'Alembert, il faut imposer  $\omega_n = k_n c = n\pi c/L$ . Ces solutions sont les modes propres d'oscillation de la corde avec conditions aux limites libres.

- 3) Dessiner les profils  $y_1(x, t)$  pour différents temps  $t$ . Combien de noeuds et de ventres comporte cette solution stationnaire ?

Il y a deux ventres, situés aux extrémités et un noeud au milieu de la corde.

- 4) Même question pour  $y_2(x, t)$ ,  $y_3(x, t)$  et  $y_4(x, t)$ . Calculer le nombre de noeuds et de ventres pour  $n$  quelconque. Indiquer leur position.

La solution stationnaire  $y_n(x, t)$  comporte  $n + 1$  ventres, situés en  $x = mL/n$  pour  $m = 0, n$  et  $n$  noeuds, situés en  $x = L/(2n) + mL/n$  pour  $m = 0, n - 1$ .

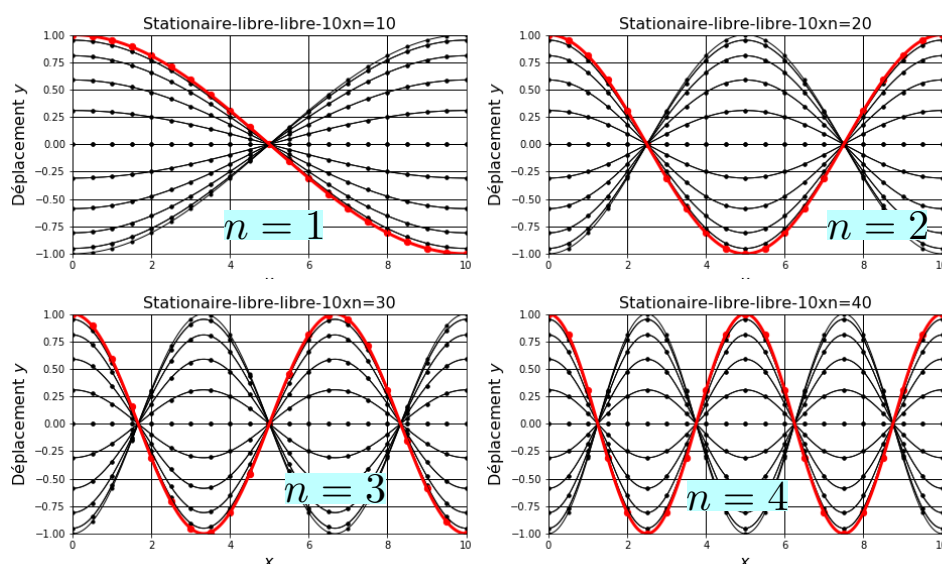


FIGURE 4.7 – Modes propres d'oscillations  $n \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\}$  dans le cas de deux extrémité libre. En rouge :  $y_n(x, 3T_n/4)$  pour  $T_n = 2\pi/\omega_n$ .

- 5) On considère la solution  $y(x, t)$  telle que  $y(x, 0) = y_0(x)$  et  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$  avec  $y_0(x) = 2 A_0 \cos(2 k_1 x) \cos(k_1 x)$  et  $k_1 = \pi/L$ . Déterminer l'expression de cette solution.

On peut écrire  $y_0(x) = A_0 \cos(3 k_1 x) + A_0 \cos(k_1 x)$  à l'aide de la formule trigonométrique  $\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a + b) + \frac{1}{2} \cos(a - b)$ . On en déduit  $y(x, t) = A_0 \cos(k_3 x) \cos(\omega_3 t) + A_0 \cos(k_1 x) \cos(\omega_1 t)$  avec  $k_3 = 3 k_1$ ,  $\omega_1 = k_1 c$  et  $\omega_3 = k_3 c$ .