Chapitre 3

Solutions de l'équation de D'Alembert

O. Thual, 2 octobre 2021

Sommaire

Introduction

L'équation de D'Alembert, également appelée "équation des ondes 1D" décrit les ondes unidimensionnelles (1D) de nombreux système physiques : vibrations longitudinales d'un barreau élastique ou d'un ressort, vibrations transversales d'une corde tendue, ondes sonores dans un tube, etc. On s'intéresse ici aux solutions générales de cette équation aux dérivées partielles en espace et en temps, qui fait intervenir une vitesse c. On vérifie que la superposition d'un signal quelconque se propageant vers la droite, à la vitesse c, et d'un autre signal quelconque se propageant vers la gauche, à la vitesse $-c$, est une solution de cette équation linéaire. On admet que toutes les solutions sont de cette forme. En milieu infini, les conditions initiales sur la valeur du champ spatio--temporel et de sa dérivée par rapport à l'espace suffisent à déterminer une solution unique que l'on peut exprimer à l'aide des profils initiaux. Une onde progressive monochromatique (OPM) est solution de l'équation de D'Alembert si sa pulsation est le produit de son nombre d'onde et de la vitesse c. La superposition de deux OPM de même amplitude et de même nombre d'onde est une solution stationnaire avec des noeuds et de ventres dont on peut déterminer les positions. En présence de conditions aux limites sur un intervalle fini, de types Dirichlet ou Neumann, les solutions appartiennent à une famille de d'onde sationnaires dénombrables que l'on peut expliciter.

1 Équation de D'Alembert

L'équation de D'Alembert, également appelée "équation des ondes 1D", s'applique à un champ unidimensionnel (1D) $\psi(x,t)$ où x est l'espace et t le temps (champ spatio-temporel). Elle s'écrit

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \, , \tag{3.1}$$

où $c > 0$ a la dimension d'une vitesse.

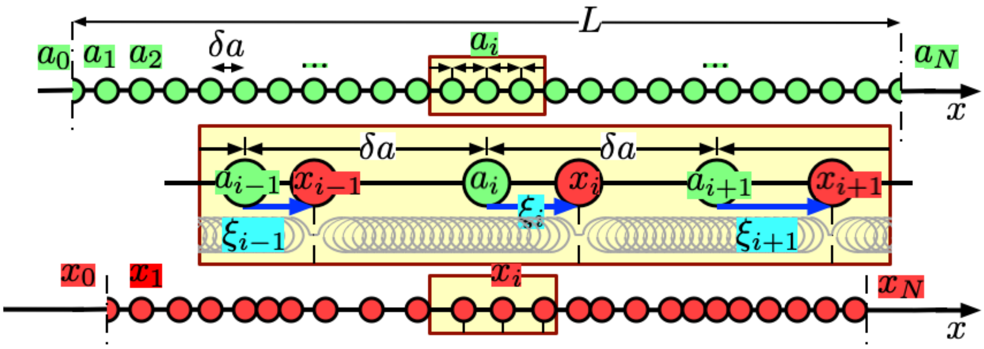

FIGURE 3.1 – *Le passage au continu d'un chaine masses-ressorts conduit à l'équation de D'Alembert pour le déplacement $\xi(a,t)$ des masses.*

Cette équation peut s'obtenir par passage au continu pour la modélisation de nombreux systèmes physiques :

— Les vibrations longitudinales d'un barreau élastique ou d'un ressort d'axe Ox : dans ce cas, $\psi(x,t)$ est le champ de déplacement $\xi(x,t)$.

— Les vibrations transversales d'une corde tendue d'axe Ox : dans ce cas, $\psi(x,t)$ est le champ de déplacement $y(x,t)$ dans une direction orthogonale à l'axe.
— Les vibrations longitudinales d'un gaz compressible dans un tube : dans ce cas, $\psi(x,t)$ est le champ de pression $p(x,t)$
— Les oscillations électriques d'un coaxial : dans ce cas, $\psi(x,t)$ est le courant $I(x,t)$ dans l'âme.

2 Solutions générales en milieu infini

L'équation de D'Alembert peut se mettre sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = 0\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

On vérifie que $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = 0$ si $\psi(x,t) = f(x - c\,t)$ où $f(X)$ est une fonction deux fois dérivable quelconque.

De même $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = 0$ si $\psi(x,t) = g(x + c\,t)$ où $g(X)$ est une fonction deux fois dérivable quelconque.

En reportant dans l'équation (3.2), ces deux expressions sont solutions de l'équation de D'Alembert. Il en va de même de leur superposition, l'équation étant linéaire. On admet ici que la forme générale des solutions de l'équation de D'Alembert s'écrit

$$\psi(x,t) = f(x - c\,t) + g(x + c\,t)\,, \tag{3.3}$$

où $f(X)$ et $g(X)$ sont deux fonctions dérivables quelconques. La démonstration peut s'effectuer en prouvant la forme générale des solutions des équations aux dérivées partielles $\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm c\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = 0$.

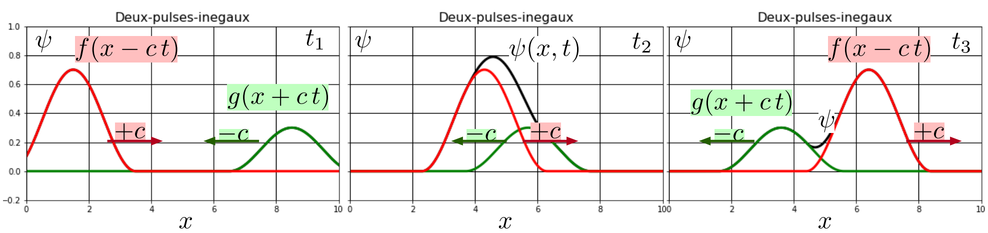

FIGURE 3.2 – *Superposition $\psi(x,t) = f(x - c\,t) + g(x + c\,t)$ de deux pulses se propageant en sens contraires, pour plusieurs instants t_1, t_2 et t_3.*

La figure 3.2 représente la superposition de deux pulses se propageant en sens opposés avec les vitesses respectives $\pm c$.

3 Conditions initiales

On suppose connues les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ qui décrivent les conditions initiales à $t = 0$ de l'équation de D'Alembert :

$$\psi(x,0) = u(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = v(x)\ . \tag{3.4}$$

L'unique solution issue de ces conditions initiales s'écrit

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}\left[u(x-c\,t) + u(x+c\,t)\right] + \frac{1}{2\,c}\int_{x-c\,t}^{x+c\,t} v(s)\,ds\ . \tag{3.5}$$

On peut tout d'abord vérifier que ce champ est bien solution de l'équation de D'Alembert et qu'il vérifie les conditions aux limites. Comme l'équation est linéaire, c'est l'unique solution.

Une autre démonstration consiste à chercher des solutions de la forme $\psi(x,t) = f(x-c\,t) + g(x+c\,t)$. Les conditions initiales conduisent à $f(x) + g(x) = u(x)$ et $-c\,f'(x) + c\,g'(x) = v(x)$ d'où $-c\,f(x) + c\,g(x) = \int_0^x v(s)\,ds + C$ où C est une constante. On en déduit $f(X) = \frac{1}{2}\,u(X) - \frac{1}{2\,c}\int_0^X v(s)\,ds - C$ et $g(X) = \frac{1}{2}\,u(X) + \frac{1}{2\,c}\int_0^X v(s)\,ds + C$. La constante d'intégration C disparait dans l'expression $\psi(x,t) = f(x-c\,t)+g(x+c\,t)$ et on retrouve bien l'expression de l'équation (3.5).

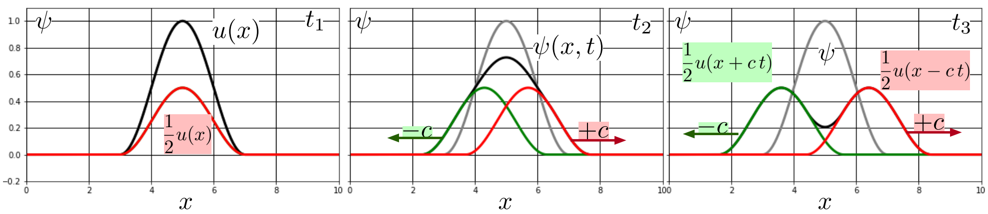

FIGURE 3.3 – *Solution $\psi(x,t) = \frac{1}{2}\,u(x-c\,t) + \frac{1}{2}\,u(x+c\,t)$ dans le cas $v(x) = 0$, pour plusieurs instants t_1, t_2 et t_3.*

Dans le cas particulier où $v(x) = 0$, la solution est $\psi(x,t) = \frac{1}{2}\,u(x-c\,t) + \frac{1}{2}\,u(x+c\,t)$, comme représenté sur la figure 3.3.

4 Ondes progressives monochromatiques

Une onde progressive monochromatique (OPM) est définie par l'expression

$$\psi(x,t) = A\,\cos(k\,x - \omega\,t + \varphi)\ , \tag{3.6}$$

où A est l'amplitude, k le nombre d'onde, ω la pulsation et φ une phase. La période temporelle de cette OPM est $T = 2\,\pi/\omega$ et la longueur d'onde (période spatiale) est $\lambda = 2\,\pi/k$. On note $f = 1/T$ la fréquence.

On vérifie que cet OPM est solution de l'équation de D'Alembert pour A non nul, si et seulement si $\omega = \pm k\,c$. Si $\omega = k\,c$, on peut exprimer cette solution sous la forme générale avec $f(X) = A\,\cos(k\,X + \varphi)$ et $g(X) = 0$:

$$\psi(x,t) = f(x-c\,t) = A\,\cos[k\,(x-c\,t) + \varphi]\ . \tag{3.7}$$

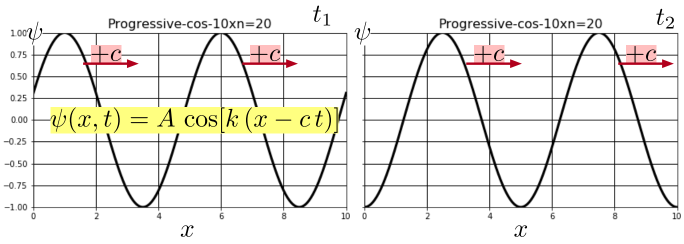

FIGURE 3.4 – *Onde progressive monochromatique (OPM) pour deux instants successifs t_1 et t_2.*

On définit la notation complexe d'une OPM par

$$\underline{\psi} = A\,e^{i\,\omega\,t - i\,k\,x - i\,\varphi} = A\,[\cos(\omega\,t - k\,x - \varphi) + i\,\sin(\omega\,t - k\,x - \varphi)]\;, \qquad (3.8)$$

de sorte que $\psi = \Re(\underline{\psi}) = A\,\cos(\omega\,t - k\,x - \varphi) = A\,\cos(k\,x - \omega\,t + \varphi)$.

5 Ondes stationnaires

La superposition de deux ondes progressives monochromatiques (OPM) de même amplitude A et de même nombre d'onde k, se propageant aux vitesses respectives $+c$ et $-c$, est une onde stationnaire de la forme

$$\psi(x,t) = A\,\cos(k\,x - \omega\,t) + A\,\cos(k\,x + \omega\,t) = 2\,A\,\cos(k\,x)\,\cos(\omega\,t)\;, \qquad (3.9)$$

avec $\omega = k\,c$. On a utilisé la formule trigonométrique $\cos p + \cos q = 2\,\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\,\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$. Dans le cas général, les éventuelles phases des deux OPM peuvent être ramenées à zéro par changement des origines du temps et de l'espace.

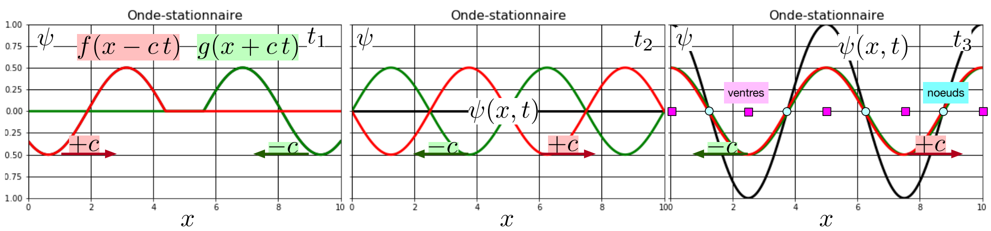

FIGURE 3.5 – *Illustration de la décomposition d'une onde stationnaire comme résultant de la superposition deux signaux amenant des ondes progressives monochromatiques. Temps t_1 avant la rencontre des signaux. Temps t_2 avec interférences destructives : $\psi = 0$. Temps t_3 avec interférences constructives : noeuds et ventres visibles.*

Cette expression permet de déterminer la position des noeuds et des ventres :

— Ventres en $x_m = m\,\pi/k$ avec m entier, tels que $\psi(x_m, t) = 2\,A\,\cos(\omega\,t)$ pour tout temps t.

— Noeuds en $x_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\,\pi/k$ avec m entier, tels que $\psi\,(x_m, t) = 0$ pour tout temps t.

La superposition $\psi(x,t) = A\,\cos(k\,x - \omega\,t + \varphi_-) + A\,\cos(k\,x + \omega\,t + \varphi_+)$ peut se calculer en notation complexe :

$$\begin{aligned}\underline{\psi}(x,t) &= A\,e^{i\,\omega\,t - i\,k\,x - i\,\varphi_-} + A\,e^{i\,\omega\,t + i\,k\,x + i\,\varphi_+} \\ &= A\,\left(e^{-i\,k\,x - i\,\frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}} + e^{i\,k\,x + i\,\frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}}\right)\,e^{i\,\omega\,t + i\,\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}}\ ,\end{aligned} \quad (3.10)$$

ce qui conduit à $\psi(x,t) = 2\,A\,\cos\left(k\,x + \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right)\,\cos\left(\omega\,t + \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}\right)$. On peut retrouver cette expression en utilisant la formule trigonométrique $\cos p + \cos q = 2\,\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\,\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

6 Conditions aux limites et ondes stationnaires

L'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ sur un intervalle fini $[0, L]$ est souvent résolue avec les deux types de conditions aux limites homogènes suivantes :

— Conditions de Dirichlet : $\psi(0,t) = 0$ ou $\psi(L,t) = 0$ pour tout temps.

— Conditions de Neumann : $\frac{\partial\psi}{\partial x}(0,t) = 0$ ou $\frac{\partial\psi}{\partial x}(L,t) = 0$ pour tout temps.

On montre que les solutions de l'équation de D'Alembert avec ces types de conditions aux limites appartiennent aux familles d'ondes stationnaires suivantes :

— ondes en cosinus (figure 3.6) : $\psi(x,t) = A\,\cos(k_n\,x)\,\cos(\omega_n\,t)$,

— ondes en sinus (figure 3.7) : $\psi(x,t) = A\,\sin(k_n\,x)\,\cos(\omega_n\,t)$,

avec $k_n = n\,\pi/L$ et $\omega_n = k_n\,c$ pour n entier ou demi-entier : $n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$.

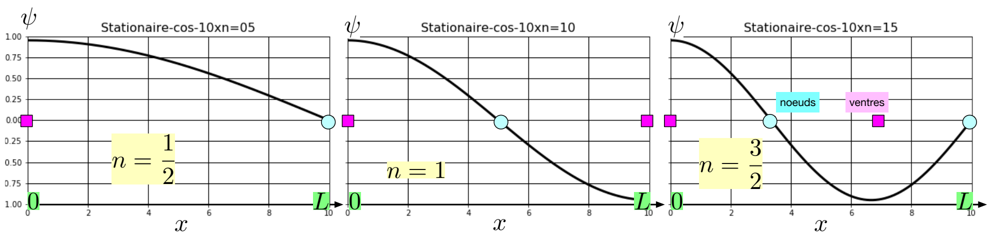

FIGURE 3.6 – *Ondes stationnaires en cosinus $\psi(x,t) = A\,\cos(k_n\,x)\,\cos(\omega_n\,t)$ pour $n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$. L'extrémité $x = 0$ est toujours un ventre. L'extrémité $x = L$ est un noeud pour n demi-entier et un ventre pour n entier.*

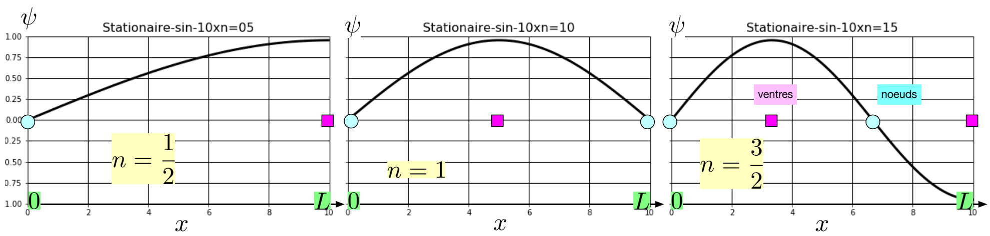

FIGURE 3.7 – *Ondes stationnaires en sinus $\psi(x,t) = A\,\sin(k_n\,x)\,\cos(\omega_n\,t)$ pour $n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$. L'extrémité $x = 0$ est toujours un noeud. L'extrémité $x = L$ est un ventre pour n demi-entier et un noeud pour n entier.*

La superposition d'ondes stationnaires d'amplitudes quelconques satisfaisant un jeu de conditions aux limites donné, est une solution de l'équation de D'Alembert.

7 Conclusion

L'équation de D'Alembert décrit la superposition de signaux de formes quelconques se propageant vers la droite ou vers la gauche avec une vitesse égale à c en valeur absolue. La forme de ces signaux est déterminée par les conditions initiales sur le champ et sa dérivée par rapport au temps. Le cas particulier des ondes progressives monochromatiques (OPM) fait intervenir la notation complexe avec des exponentielles complexes. Les ondes stationnaires sont la superposition d'ondes progressives monochromatiques d'égale amplitude et d'égal nombre d'onde, se propageant dans des sens contraires aux vitesse $\pm c$. Les noeuds et les ventres de ces ondes sont répartis de manière périodique le long de l'axe Ox. L'imposition de conditions aux limites aux bornes d'un intervalle de longueur finie restreint les solutions à une famille dénombrable d'ondes stationnaires.

FORMULAIRE

Solutions générales de l'équation de D'Alembert

$$\text{Équation de D'Alembert : } \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\ ,$$
$$\text{Solution générale : } \psi(x,t) = f(x - c\,t) + g(x + c\,t)$$
$$\text{où } f(X) \text{ et } g(X) \text{ sont des fonction quelconques deux fois dérivables.} \tag{3.11}$$

Problème aux conditions initiales

$$\psi(x,0) = u(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = v(x) \tag{3.12}$$
$$\Longrightarrow \quad \psi(x,t) = \frac{1}{2}\left[u(x - c\,t) + u(x + c\,t)\right] + \frac{1}{2\,c}\int_{x-c\,t}^{x+c\,t} v(s)\,ds\ . \tag{3.13}$$

Ondes progressives monochromatiques

$$\psi(x,t) = A\,\cos(k\,x - \omega\,t + \varphi)\ . \tag{3.14}$$

Amplitude : A. Nombre d'onde : k. Pulsation : ω. Phase : φ.

Période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Fréquence $f = \frac{1}{T}$.

Solution de l'équation de l'équation de D'Alembert ssi $\omega = \pm k\,c$.

Notation complexe avec $\psi = \Re(\underline{\psi})$:

$$\underline{\psi} = A\, e^{i\,\omega\, t - i\, k\, x - i\,\varphi} = A\left[\cos(\omega\, t - k\, x - \varphi) + i\, \sin(\omega\, t - k\, x - \varphi)\right] \ , \qquad (3.15)$$

Ondes stationnaires

Superposition de deux OPM :

$$\psi(x,t) = A\, \cos(k\, x - \omega\, t) + A\, \cos(k\, x + \omega\, t) = 2\, A\, \cos(k\, x)\, \cos(\omega\, t) \ , \qquad (3.16)$$

Solutions de l'équation de D'Alembert ssi $\omega = \pm k\, c$.

Famille dénombrable d'ondes stationnaires avec $k_n = n\,\pi/L$ et $\omega_n = k_n\, c$ pour n entier ou demi-entier : $n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$:

$$\begin{array}{rl} \text{Ondes en cosinus :} & \psi(x,t) = A\, \cos(k_n\, x)\, \cos(\omega_n\, t) \\ \text{Ondes en sinus :} & \psi(x,t) = A\, \sin(k_n\, x)\, \cos(\omega_n\, t) \end{array} \qquad (3.17)$$

EXERCICES

EXERCICE 3.1 Solutions de l'équation de D'Alembert

On s'intéresse ici à des solutions de l'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\, \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$.

1) Quelle est la dimension de la constante $c > 0$? Que représente-t-elle ?

> La constante est la valeur absolue de la vitesse des signaux décrit par l'équation de D'Alembert. C'est la vitesse de propagation des ondes.

2) Montrer que $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\, \frac{\partial}{\partial x}\right)\, \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\, \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Même question pour $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\, \frac{\partial}{\partial x}\right)\, \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

> Il suffit de développer en remarquant que les opérateurs de dérivation commutent.

3) On suppose que $\psi(x,t)$ vérifie $\frac{\partial\psi}{\partial t} + c\, \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$. On considère la trajectoire $x(t) = a + c\, t$ où a est un abscisse quelconque. On fabrique alors la fonction $h(t) = \psi[x(t), t]$. Montrer que $h(t)$ est une fonction constante. En déduire que $\psi(x,t) = f(x - c\, t)$ et exprimer la fonction $f(X)$ en supposant que $\psi(x,0) = u(x)$.

> On calcule $h'(t) = \frac{\partial\psi}{\partial t}[x(t), t] + x'(t)\, \frac{\partial\psi}{\partial x}[x(t), t] = \frac{\partial\psi}{\partial t}[x(t), t] + c\, \frac{\partial\psi}{\partial x}[x(t), t] = 0$. On en déduit que $h(t)$ est une constante, qui vaut $h = \psi(a, 0) = u(a)$. Comme $\psi(a + c\, t, t) = u(a)$, pour tout a et tout t, on en déduit $\psi(x,t) = u(x - c\, t)$ par changement de variable. On a donc $f(X) = u(X)$.

4) On suppose que $\psi(x,t) = f(x - c\, t)$ avec $f(X) = A\, \exp\left(-\frac{X^2}{2\,\sigma^2}\right)$. Dessiner le profil spatial de $\psi(x,t)$ pour plusieurs temps successifs et indiquer le

sens de propagation.

> Le signal est une gaussienne d'écart type σ (en forme de cloche) qui se propage vers la droite à la vitesse c.

5) On considère les conditions initiales $\psi(x,0) = u(x)$ et $\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = v(x)$ avec $u(X) = A\,\exp\left(-\frac{X^2}{2\,\sigma^2}\right)$ et $v(X) = 0$. Calculer la solution de l'équation de D'Alembert issue de ces conditions initiales. Tracer le solutions pour plusieurs temps successifs et indiquer le sens de propagation des signaux.

> On a $\psi(x,t) = \frac{1}{2}\,u(x - c\,t) + \frac{1}{2}\,u(x + c\,t)$. C'est la superposition de deux gaussiennes se propageant en sens contraires.

6) Déterminer la notation complexe de l'onde progressive monochromatique $\psi(x,t) = A\,\sin(k\,x - \omega\,t)$.

> On a $\underline{\psi}(x,t) = A\,i\,e^{i\,\omega\,t - i\,k\,x} = A\,i\,[\cos(\omega\,t - k\,x) + i\,\sin(\omega\,t - k\,x)]$.

7) Déterminer la position des noeuds de l'onde stationnaire $\psi(x,t) = A\,\sin(k\,x - \omega\,t) + A\,\sin(k\,x + \omega\,t)$.

> En utilisant la formule trigonométrique $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\,\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, on a $\psi(x,t) = -2\,A\sin(k\,x)\cos(\omega\,t)$. Les noeuds sont situés aux points $x_m = m\,\pi/k$ pour m entier. Une autre démonstration consiste à écrire $\underline{\psi} = A\,i\,e^{i\,\omega\,t - i\,k\,x} - A\,i\,e^{i\,\omega\,t + i\,k\,x} = A\,i\,e^{i\,\omega\,t}[-2\,i\,\sin(k\,x)] = 2\,A\,e^{i\,\omega\,t}\,\sin(k\,x)$ et poser $\psi = \Re(\underline{\psi})$.

8) On cherche les solutions de l'équation de D'Alembert sur l'intervalle $[0, L]$ avec les conditions aux limites $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$. Décrire l'ensemble des solutions.

> En se référant à la famille des ondes stationnaires du cours, les solutions sont de la forme $\psi(x,t) = A\,\sin(k_n\,x)\,\cos(\omega_n\,t + \varphi)$ où A est une amplitude arbitraire, φ une phase arbitraire, $k_n = n\,\pi/L$ avec n entier et $\omega_n = k_n\,c$. Toute solution se décompose sur la base des solutions stationnaires.

9) Même question avec les conditions aux limites $\frac{\partial\psi}{\partial x}(0,t) = 0$ et $\psi(L,t) = 0$.

> En se référant à la famille des ondes stationnaires du cours, les solutions sont de la forme $\psi(x,t) = A\,\cos(k_n\,x)\,\cos(\omega_n\,t + \varphi)$ où A est une amplitude arbitraire, φ une phase arbitraire, $k_n = n\,\pi/L$ avec n demi-entier et $\omega_n = k_n\,c$.