

Chapitre 2

Discrétisation d'un barreau élastique

O. Thual, 2 octobre 2021

Sommaire

1	Discrétisation par une chaîne masses-ressorts . . .	2
2	Allongements et déplacements	2
3	Loi de Hooke	3
4	Tension de déplacement	3
5	Passage au continu	4
6	Principe fondamental	4
7	Exemple de solution propagative	5
8	Ondes progressives monochromatiques	6
9	Ondes stationnaires	6
10	Conclusion	7

Introduction

On discrétise un barreau élastique, dont les mouvements sont restreints le long d'un axe, à l'aide d'une chaîne de masses ponctuelles glissant sans frottement le long de cet axe et reliées entre elles par des ressorts de masse négligeable. La loi de Hooke, qui décrit le comportement rhéologique élastique du barreau en petites déformations, se traduit par une relation linéaire entre la tension d'un ressort et son allongement relatif. Dans la limite où la discrétisation comporte un nombre élevé de masses ponctuelles, qui se partagent la masse totale, les tensions et déplacements sont décrits par des fonctions continues. La loi de Hooke indique alors que la tension est proportionnelle à la dérivée du déplacement par rapport à la variable d'espace. L'application du principe fondamental pour chacune des masses devient, par passage au continu, une équation aux dérivées partielles en espace et en temps que l'on appelle "équation de D'Alembert" ou encore "équation des ondes 1D". Un premier exemple de solutions met en évidence la vitesse de propagation de signaux. D'autres exemples décrivent des familles de solutions stationnaires.

1 Discrétisation par une chaîne masses-ressorts

On considère un barreau élastique d'axe Ox et de longueur L . On le modélise par une chaîne de $N - 1$ masses ponctuelles de masses $\delta m = m/N$ avec deux masses ponctuelles de masses $\delta m/2$ situées aux deux extrémités (figure 2.1). La masse totale m du barreau est donc répartie entre les $N + 1$ masses ponctuelles.

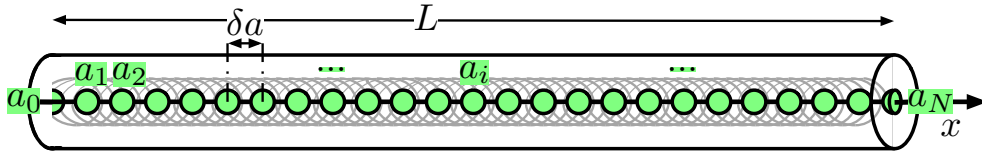
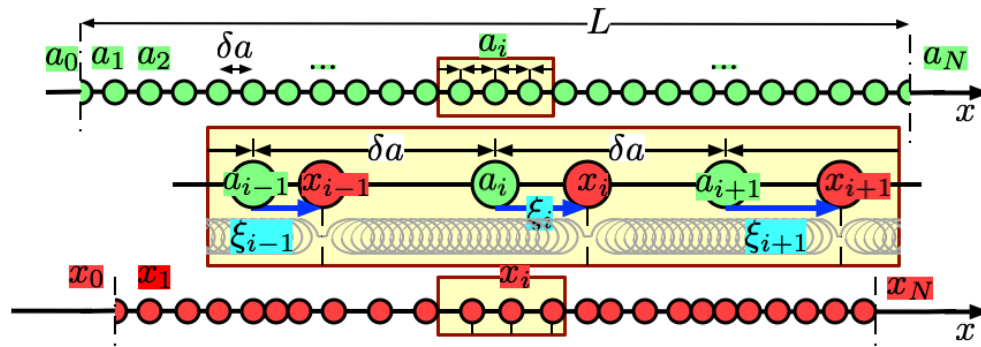


FIGURE 2.1 – Discrétisation d'un barreau élastique en $N + 1$ masses ponctuelles reliées par des ressorts et glissant sans frottement le long de l'axe Ox .

On modélise l'élasticité du barreau par des ressorts, de masse négligeable, qui relient les masses entre elles. En l'absence de contraintes, c'est-à-dire au repos, la longueur des ressorts est $\delta a = L/N$. Les abscisses des ressorts au repos sont notées a_i et vérifient $a_i = a_0 + i\delta a$ pour $i = 0, N$. Le passage au continu est attendu dans la limite où N devient grand.

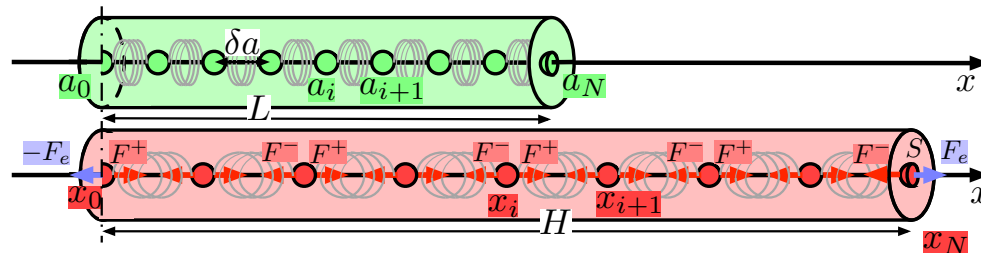
2 Allongements et déplacements

On suppose maintenant que le barreau élastique est déformé, ce que l'on modélise par les déplacements $\xi_i = x_i - a_i$ pour $i = 0, N$ des masses dont les abscisses passent de $x = a_i$ au repos vers $x = x_i$ lors de la déformation (figure ??). L'allongement du ressort compris entre x_i et x_{i+1} est égale à $(x_{i+1} - x_i) - (a_{i+1} - a_i) = (x_{i+1} - a_{i+1}) - (x_i - a_i) = \xi_{i+1} - \xi_i$. L'allongement d'un ressort est donc égal à la différence des déplacements de ses extrémités.

FIGURE 2.2 – Déplacements ξ_i des masses de a_i vers x_i .

3 Loi de Hooke

On suppose que le barreau élastique est soumis à la force extérieure $+F_e$ sur son extrémité droite et $-F_e$ sur son extrémité gauche. Le barreau se déforme alors jusqu'à un équilibre tel que $+F_e$ se retrouve appliquée en $x = x_N$ et $-F_e$ en $x = x_0$. La longueur $L = a_N - a_0$ du barreau au repos devient $H = x_N - x_0$ pour le nouvel équilibre (figure 2.3).

FIGURE 2.3 – Forces $F^+ = +F_e$ et $F^- = -F_e$ exercées à gauche et à droite .

La loi de Hooke décrit le comportement élastique d'un barreau élastique dans le cadre des petites déformations. On peut alors considérer que la section S du barreau varie **peu** lors de la déformation. Cette loi s'écrit alors

$$\frac{F_e}{S} = E \frac{H - L}{L} \iff F_e = \alpha \frac{H - L}{L} \quad \text{avec } \alpha = ES, \quad (2.1)$$

où E , exprimé en Pascals (N.m^{-2}), ne dépend que de la nature du matériau dont est constitué le barreau. Le paramètre $\alpha = ES$, appelé ici "raideur matériau" est exprimé en Newtons.

4 Tension de déplacement

On définit la tension T à l'intérieur du barreau élastique de la manière suivante :

- La force exercée sur la section S par le matériau situé dans la direction $u = +1$ est : $F^+ = T u = +T$.
- La force exercée sur la section S par le matériau situé dans la direction $u = -1$ est : $F^- = T u = -T$.

En modélisant le barreau élastique pour une chaîne de $N + 1$ masses ponctuelles, chaque masse est soumise à une force F^- par le ressort de gauche et une force F^+ par le ressort de droite. À l'équilibre, on a $F^- = -T$ et $F^+ = +T$ où la tension $T = F_e$ des ressorts est constante et égale à la force extérieure appliquée sur l'extrémité droite du barreau. Si $T_{i,i+1}$ est la tension du ressort compris entre les masses i et $i + 1$, la loi de Hooke entraîne donc

$$T_{i,i+1} = \alpha \frac{(x_{i+1} - x_i) - (a_{i+1} - a_i)}{\delta a} = \alpha \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\delta a}, \quad (2.2)$$

et on a $T_{i,i+1} = T$ pour tout $i = 0, N - 1$ à l'équilibre. On suppose que cette loi reste valide pour chaque ressort même lorsque les masses ponctuelles sont en mouvement, et donc que la tension est constante à l'intérieur d'un ressort.

5 Passage au continu

En l'absence d'équilibre global, on suppose que le ressort reliant les masses i et $i + 1$ peut être modélisé par une tension constante $T_{i,i+1}$, ce qui est d'autant plus exact que la longueur δa du ressort est petite. Lorsque le nombre $N + 1$ de masses est grand, avec donc $\delta a = L/N$ petit, on peut décrire les déplacements par une fonction continue $\xi(a)$ en interpolant les relations $\xi(a_i) = \xi_i$ pour $i = 0, N$. On peut aussi représenter les tensions $T_{i,i+1}$ des ressorts situés entre x_i et x_{i+1} (figure 2.4) par une fonction continue $T(a)$ en définissant les abscisses $a_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})$ pour $i = 0, N - 1$ des centres des ressorts lorsqu'ils sont au repos et par interpolation des relations $T(a_{i+\frac{1}{2}}) = T_{i,i+1}$.

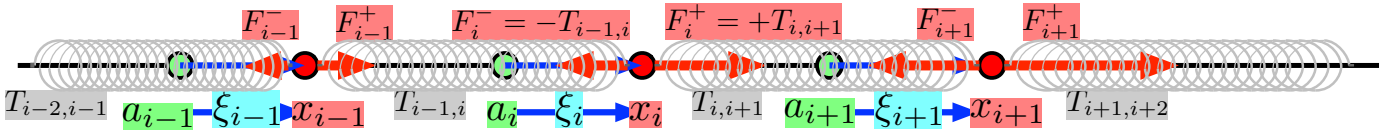


FIGURE 2.4 – Tensions $T_{i,i+1}$ des ressorts reliant les masses x_i et x_{i+1} .

Dans la limite où N devient infini, et donc δa tend vers zéro, on peut écrire $T(a_{i+\frac{1}{2}}) \xrightarrow{\delta a \rightarrow 0} T(a_i)$. On peut également écrire

$$T(a_{i+\frac{1}{2}}) = \alpha \frac{\xi(a_{i+1}) - \xi(a_i)}{\delta a} = \alpha \frac{\xi(a_i + \delta a) - \xi(a_i)}{\delta a} \xrightarrow{\delta a \rightarrow 0} \alpha \frac{\partial \xi}{\partial a}(a_i), \quad (2.3)$$

en utilisant la définition de la dérivée par passage à la limite. On utilise ici la notation de dérivée partielle dans la mesure où les champs continus $\xi(a, t)$ et $T(a, t)$ peuvent également dépendre du temps.

On peut donc écrire la loi de Hooke continue sous la forme :

$$T(a, t) = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial a}(a, t). \quad (2.4)$$

6 Principe fondamental

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, pour les masses $i = 1, N$:

$$\delta m \ddot{\xi}_i(t) = F_i^+(t) + F_i^-(t) = T_{i,i+1}(t) - T_{i-1,i}(t), \quad (2.5)$$

où $F_i^+(t) = +T_{i,i+1}(t)$ et $F_i^-(t) = -T_{i-1,i}(t)$ sont les forces exercées par les ressorts situés respectivement à droite et à gauche de la masse d'abscisse x_i (figure 2.5), de masse $\delta m = m/N$. Le principe fondamentale appliqué aux extrémités dépend de l'existence de forces extérieures. Deux cas particuliers peuvent être considérés :

- Absence de forces extérieures : $\frac{1}{2}\delta m \ddot{x}_0 = T_{0,1}$ ou $\frac{1}{2}\delta m \ddot{x}_N = -T_{N-1,N}$. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, on a $\delta m = m/N \rightarrow 0$ et donc $T_{0,1} = 0$ ou $T_{N-1,N} = 0$.
- Absence de déplacements : $\xi_0 = 0$ ou $\xi_N = 0$. Dans ce cas, les forces extérieures sont respectivement $-T_{0,1}$ en $x = a_0$ ou $T_{N-1,N}$ en $x = a_N$ pour que l'accélération soit nulle.

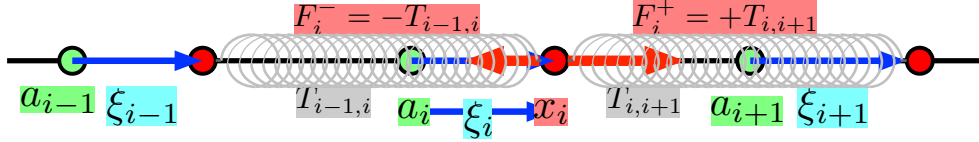


FIGURE 2.5 – Forces $F_i^+ = +T_{i,i+1}$ et $F_i^- = -T_{i-1,i}$ exercées sur la masse située en x_i .

On note $\xi(a, t)$ le champ de déplacement continu par interpolation de la relation $\xi(a_i, t) = \xi_i(t)$. En utilisant la définition $\mu = m/L$ de la masse linéique du barreau et les relations $\delta m = \mu \delta a$ et $\delta a = L/N$, on peut écrire

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a_i, t) = \frac{T(a_{i+\frac{1}{2}}, t) - T(a_{i-\frac{1}{2}}, t)}{\delta a} \xrightarrow{\delta a \rightarrow 0} \frac{\partial T}{\partial a}(a_i, t) \quad (2.6)$$

La version continue $T(a, t) = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial a}(a, t)$ de la loi de Hooke conduit alors à l'équation de D'Alembert, appelée également "équation des ondes 1D" :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a, t) = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t) \quad \text{avec } c = \sqrt{\alpha/\mu}. \quad (2.7)$$

Les conditions aux limites pour cette équation aux dérivées partielles s'écrivent :

- Absence de forces extérieures : $T(0, t) = 0$ ou $T(L, t) = 0$ pour tout temps t , ce qui entraîne $\frac{\partial \xi}{\partial a}(0, t) = 0$ ou $\frac{\partial \xi}{\partial a}(L, t) = 0$.
- Absence de déplacements : $\xi(0, t) = 0$ ou $\xi(L, t) = 0$ pour tout temps t .

7 Exemple de solution propagative

En écrivant l'équation de D'Alembert sous la forme

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial a} \right) \xi = 0, \quad (2.8)$$

on vérifie que tout champ de déplacement de la forme $\xi(a, t) = f(a - ct)$, où $f(X)$ est une fonction quelconque deux fois dérivable, est solution de l'équation de D'Alembert. On peut par exemple choisir $f(X)$ sous la forme d'un pulse localisé (figure 2.6). Le champ de déplacement est alors constitué d'un signal qui se propage à la vitesse c sans déformation. Le même raisonnement s'applique au cas d'un signal $\xi(x, t) = g(a + ct)$, où $g(X)$ est une fonction quelconque, avec une vitesse de propagation $-c$.

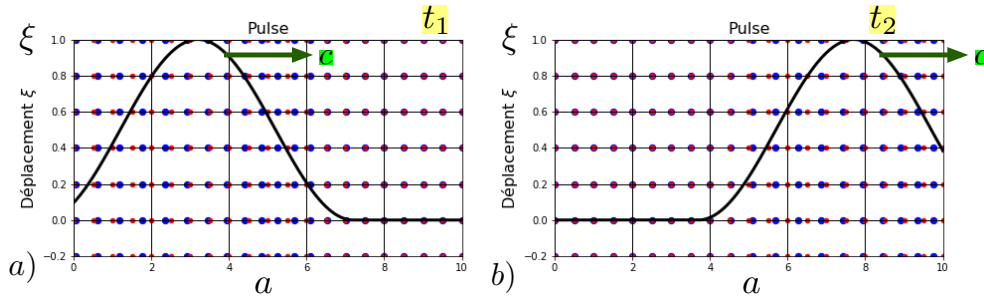


FIGURE 2.6 – Solution $\xi(a, t) = f(a - ct)$ en forme de pulse. a) et b) : déplacement pour deux temps successifs.

8 Ondes progressives monochromatiques

Les ondes progressives monochromatiques sont obtenues en choisissant $f(X) = A \cos(kX + \varphi)$ où A est une amplitudes arbitraire, k un nombre d'onde arbitraire et φ une phase arbitraire. Elle sont donc sous la forme $\xi(x, t) = A \cos[k(a - ct) + \varphi]$. Un exemple d'onde progressive monochromatique est représenté sur la figure 2.7.

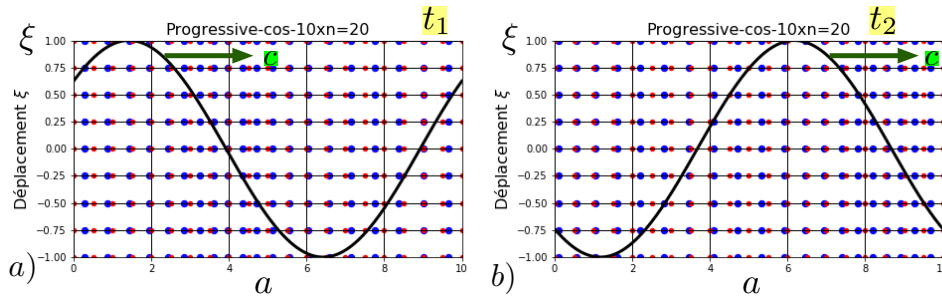


FIGURE 2.7 – Onde progressives monochromatique $\xi(a, t) = A \cos[k(a - ct)]$ avec $k = 2\pi/L$. a) et b) : déplacement pour deux temps successifs.

9 Ondes stationnaires

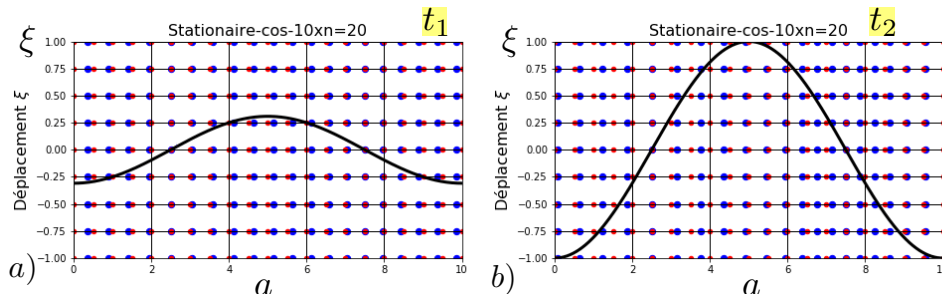


FIGURE 2.8 – Onde stationnaire $\xi(a, t) = A \cos(k_n a) \cos(\omega_n t)$ pour $n = 2$ avec $\omega_n = ck_n$. a) et b) : déplacement pour deux temps successifs.

En reportant dans l'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} = 0$, on vérifie que

les ondes stationnaires $\xi(a, t) = A \cos(k a) \cos(\omega t)$, avec A une amplitude arbitraire et k un nombre d'onde arbitraire, sont solutions lorsque la relation $\omega = k c$ est vérifiée. En effet $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi$ et $\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} = -k^2 \xi$, ce qui conduit à la relation $\omega^2 = k^2 c^2$. Le choix de $k = k_n = n \pi / L$ pour n entier ou demi-entier permet de considérer des solutions stationnaires telles que les extrémités du barreau sont exemptes de force extérieure ($\frac{\partial \xi}{\partial a}(0, t) = 0$ ou $\frac{\partial \xi}{\partial a}(L, t) = 0$) ou bien de déplacement ($\xi(0, t) = 0$ ou $\xi(L, t) = 0$). Par exemple, le cas $n = 2$ correspond au cas où les deux extrémités sont libres de contraintes (figure 2.8), tandis que l'exemple $n = 5/2$ correspond au cas où l'extrémité gauche en $x = x_0 = 0$ est libre de contraintes tandis que l'extrémité droite en $x = a_N = L$ est fixe (figure 2.9).

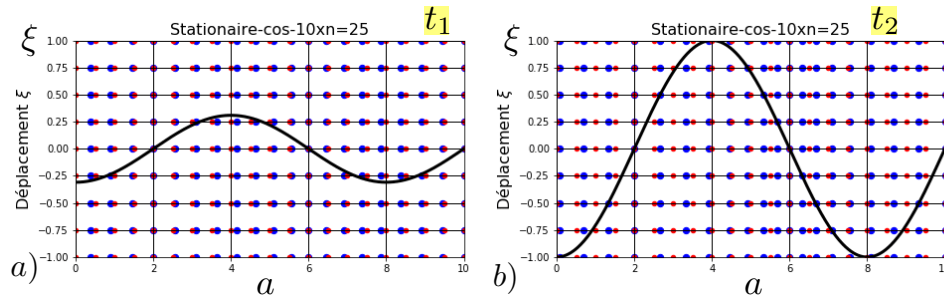


FIGURE 2.9 – Onde stationnaire $\xi(a, t) = A \cos(k_n a) \cos(\omega_n t)$ pour $n = 5/2$ avec $\omega_n = c k_n$. a) et b) : déplacement pour deux temps successifs.

10 Conclusion

La discrétisation d'un barreau en une chaîne de masses-ressort a permis d'exprimer la loi de Hooke, qui décrit le comportement rhéologique élastique d'un matériau, sous la forme d'une relation linéaire entre la tension et la dérivée du champ de déplacement par rapport à la variable d'espace. Le passage au continu du principe fondamental de la dynamique appliqué aux masses ponctuelles modélisant le barreau a permis d'établir l'équation de D'Alembert. Des exemples de solutions, progressives ou stationnaires, ont été présentés.

FORMULAIRE

Loi de Hooke 1D

Tension dans un ressort dont les extrémités subissent les déplacements ξ_i et ξ_{i+1} :

$$T_{i,i+1} = \alpha \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\delta a_N} . \quad (2.9)$$

Module de Young E (Pa). Section S (m²). Raideur matériau $\alpha = E S$ (N).

Formulation continue pour le champ de déplacement $\xi(a, t)$ et le champ de

tension $T(a, t)$:

$$T(a, t) = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial a}(a, t) . \quad (2.10)$$

Équation du mouvement

Les déplacements sont régis par l'équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a, t) = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t) \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}} . \quad (2.11)$$

Raideur matériau $\alpha = ES$ (N). Masse linéique $\mu = m/L$ (kg.m⁻¹).

Exemples de solutions

L'équation de D'Alembert admet des solutions progressives ou stationnaires :

$$\text{Progressive : } \xi(a, t) = f(x - ct) \quad (2.12)$$

$$\text{Monochromatique : } \xi(a, t) = A \cos[k(a - ct) + \varphi] \quad (2.13)$$

$$\text{Stationnaire : } \xi(a, t) = A \cos(ka) \cos(ckt) . \quad (2.14)$$

EXERCICES

EXERCICE 2.1 Du discret à l'équation de D'Alembert

On modélise un barreau élastique de longueur L et de masse m par une chaîne de $N + 1$ masses ponctuelles glissant sans frottement sur un axe horizontal et reliées par des ressorts de masse négligeable. Les masses ponctuelles situées en $a_i = i \delta a$ au repos avec $i = 1, N - 1$ et $\delta a = L/N$, sont de masses $\delta m = m/N$. Les masses situées en $a_0 = 0$ et $a_N = L$ ont une masse $\delta m/2$.

On suppose que la tension $T_{i,i+1}$ du ressort situé entre les masses d'abscisse $x_i = a_i + \xi_i$ et $x_{i+1} = a_{i+1} + \xi_{i+1}$ vérifie la loi de Hooke $T_{i,i+1} = \alpha (\xi_{i+1} - \xi_i) / \delta a$, avec $\alpha = ES$ où E est le module de Young et S la section du barreau.

- 1) Justifier l'expression de la loi de Hooke à partir de la définition macroscopique du module de Young.

Il suffit d'appliquer la loi $F_e/S = E(H - L)/L$, où H est la longueur du barreau après déformation au cas des petits ressorts de longueur $\delta = L/N$ au repos. On suppose que S varie peu lors des déformations et que la tension est uniforme dans chaque petit ressort.

- 2) Montrer que le principe fondamental de la dynamique appliqué à **une masse** de position $x_i(t)$ conduit à la relation $\ddot{\xi}_i = (c^2/\delta a^2)(\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1})$ avec $c = \sqrt{\alpha/\mu}$ et $\mu = m/L$.

Le principe fondamental s'écrit $\delta m \ddot{\xi}_i = T_{i,i+1} - T_{i-1,i} = (\alpha/\delta a) (\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1})$.
On remarque alors que $\delta m = m/N = \mu \delta a$ où $\mu = m/L$ est la masse linéique du barreau.

3) En déduire que l'on peut écrire $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a_i, t) = (c^2/\delta a^2) [\xi(a_i + \delta a) - 2\xi(a_i) + \xi(a_i - \delta a)]$ pour $i = 1, N - 1$.

Il suffit ici de noter $\xi(a_i, t) = \xi_i(t)$.

4) Écrire les développements limités :

$$\begin{aligned}\xi(a + \delta a, t) &= \xi(a, t) + \frac{\partial \xi}{\partial a}(a, t) \delta a + C_+ \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t) \delta a^2 + O(\delta a^3) \quad (2.15) \\ \xi(a - \delta a, t) &= \xi(a, t) - \frac{\partial \xi}{\partial a}(a, t) \delta a + C_- \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t) \delta a^2 + O(\delta a^3) \quad (2.16)\end{aligned}$$

où C_+ et C_- sont de constantes que l'on déterminera.

On a $C_+ = C_- = 1/2$.

5) En déduire l'équation de D'Alembert dans la limite $N \rightarrow \infty$.

Comme $\delta a \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ on a $[\xi(a_i + \delta a) - 2\xi(a_i) + \xi(a_i - \delta a)]/\delta a^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a_i, t)$. On a donc bien $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a, t) = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t)$.

6) Vérifier que les champs $\xi(a, t) = f(a - ct)$, où $f(X)$ est une fonction deux fois dérivable, sont solutions de l'équation de D'Alembert.

On a $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a, t) = c^2 f''(a - ct)$ et $\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t) = f''(a - ct)$. L'équation de D'Alembert est donc bien vérifiée.

7) Représenter schématiquement le profil de déplacement $\xi(a, t)$ pour des temps successifs à partir d'un tracé quelconque de $f(X)$.

Il suffit de propager la forme du signal $f(X)$ à la vitesse c dans la direction Ox .

8) Mêmes questions pour les champs $\xi(a, t) = g(a + ct)$, où $g(X)$ est une fonction deux fois dérivable.

On a $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a, t) = c^2 g''(a + ct)$ et $\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t) = g''(a + ct)$. L'équation de D'Alembert est donc bien vérifiée. Le signal se propage à la vitesse $-c$.

9) Vérifier la relation entre k et ω pour que le champ de déplacement $\xi(a, t) = A \cos(ka) \cos(\omega t)$, où A est une amplitude arbitraire, soit solution de l'équation de D'Alembert.

On a $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi$ et $\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} = -k^2 \xi$. L'équation de D'Alembert est donc vérifiée lorsque $\omega^2 = k^2 c^2$.