Chapitre 1

Tension et forces dans un ressort

O. Thual, 2 octobre 2021

Sommaire

Introduction

L'élasticité linéaire s'intéresse aux petites déformations dans un solide. La loi de Hooke relie linéairement les déformations et les contraintes : c'est une loi de comportement rhéologique.

On se restreint ici à des déformations le long d'un seul axe Ox, en prenant l'exemple d'un barreau solide ou d'un ressort. Dans ce cas, la tension, qui est un réel positif (élongation) ou négatif (compression), représente l'état de contrainte dans le solide élastique. La force exercée par une portion du solide sur une de ses sections est le produit de la tension par la normale sortante, dirigée vers la portion exerçant la force. Cette normale vaut $(+1)$ ou (-1) dans ce cas unidimensionnel (1D).

Pour ce cas 1D, la loi de comportement élastique indique que la tension est proportionnelle à l'allongement (positif ou négatif) relatif (par unité de longueur), avec une "raideur de matériau" qui ne dépend pas de la longueur du barreau ou du ressort. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à des masses ponctuelles reliées par des ressort permet de mettre en évidence des oscillations dont on peut calculer la pulsation.

1 Définition de la tension d'un barreau élastique

On considère un barreau élastique d'axe Ox, de section S constante et de longueur l en l'absence de contraintes (Figure 1.1). En présence de contraintes, on suppose que sa longueur devient h, plus grande ($h > l$) en cas d'extension ou plus petite ($h < l$) en cas de compression.

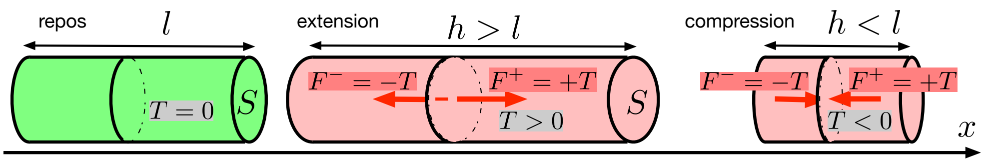

FIGURE 1.1 – *Forces à l'intérieur d'un barreau élastique et tension T.*

La tension T (en Newtons) dans le barreau est alors définie de manière à exprimer les forces exercées sur une section quelconque du barreau :

— La force (en Newtons) exercée sur la section S par la portion du barreau située à sa droite (dans le sens des $x > 0$) est : $F^+ = +T$.

— La force (en Newtons) exercée sur la section S par la portion du barreau située à sa gauche (dans le sens des $x < 0$) est : $F^- = -T$.

La normale sortante, dans le sens de la portion qui exerce une force, est $(+1)$ dans le sens des x positifs et (-1) dans le sens des x négatifs. La force est donc le produit de la tension par la normale sortante, c'est-à-dire dans la direction du milieu qui agit sur la section.

Il y a donc extension si $T > 0$: l'extérieur tire sur la section. Il y a compression si $T < 0$: l'extérieur pousse sur la section.

2 Module de Young

On suppose que la section S varie peu lors d'une élongation ou d'une compression que l'on suppose "petites". La loi de comportement rhéologique pour les déformations unidimensionnelles (1D) des solides élastiques s'écrit

$$\frac{T}{S} = E\,\frac{h-l}{l} \qquad \Longleftrightarrow \qquad T = \alpha\,\frac{h-l}{l}\ , \tag{1.1}$$

où E est le module de Young et $\alpha = E\,S$, que l'on nomme ici la "raideur de matériau", est le produit du module de Young par la section. Ce coefficient ne dépend que de la nature du matériau et de la section du barreau, tandis que le "coefficient de raideur" $k = \alpha/l$ du barreau dépend en plus de sa longueur l.

Les unités sont les suivantes : Newton (N) pour T, Pascal (Pa=N.m^{-2}) pour E, Newton (N) pour α et (N.m^{-1}) pour k. Cette loi de comportement est un cas simplifiée de la loi de Hooke, restreinte au cas 1D.

3 Forces aux extrémités d'un ressort

On s'interésse ici aux forces exercées par le barreau sur ses extrémités (Figure 1.2). La force exercée par le barreau sur son extrémité gauche est $F^+ = +T$. La force exercée par le barreau sur son extrémité droite est $F^- = -T$.

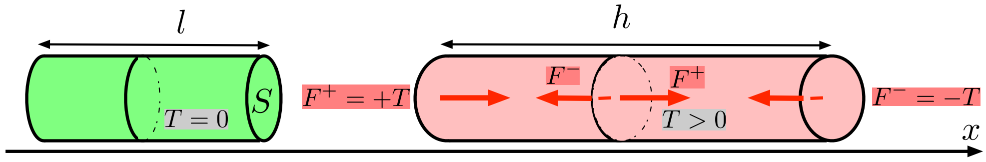

FIGURE 1.2 – *Forces exercées par un barreau élastique sur ses extrémités.*

Il en va de même pour les ressorts (Figure 1.3), la tension étant exprimée en fonction de l'allongement relatif par la relation $T = \alpha\,(h-l)/l$ où la "raideur de matériau" α ne dépend que du matériau et de l'enroulement du ressort.

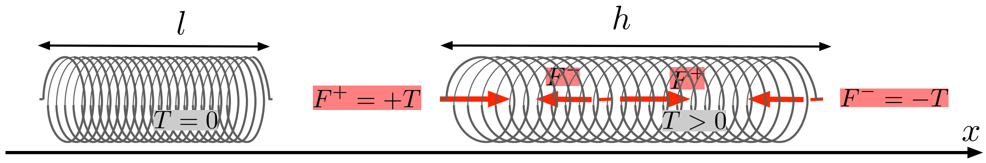

FIGURE 1.3 – *Forces exercées par un ressort sur ses extrémités.*

4 Déplacement et allongements

On s'intéresse ici à un ressort dont les extrémités au repos sont en $x = a_1$ et $x = a_2$ (figure 1.4). On suppose qu'en présence de contraintes, ces extrémités sont en $x = x_1$ et $x = x_2$. On note alors $\xi_1 = x_1 - a_1$ et $\xi_2 = x_2 - a_2$ les déplacements respectifs de ces extrémités. Si $l_{1,2} = a_2 - a_1$ est la longueur au repos, la longueur sous contrainte est $h_{1,2} = x_2 - x_1$. L'allongement s'écrit alors $h_{1,2} - l_{1,2} = (x_2 - x_1) - (a_2 - a_1) = (x_2 - a_2) - (x_1 - a_1) = \xi_2 - \xi_1$.

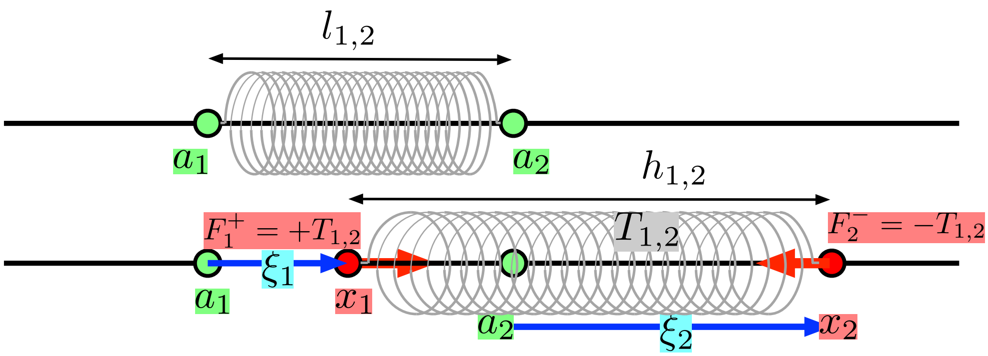

FIGURE 1.4 – *Déplacements ξ_1 et ξ_2 des extrémités d'un ressort pour la détermination de son allongement.*

En notant $T_{1,2}$ la tension du ressort, la loi de comportement s'écrit alors :

$$T_{1,2} = \alpha \, \frac{h_{1,2} - l_{1,2}}{l_{1,2}} = \alpha \, \frac{(x_2 - x_1) - (a_2 - a_1)}{l_{1,2}} = \alpha \, \frac{\xi_2 - \xi_1}{l_{1,2}} \, , \tag{1.2}$$

où α est la "raideur matériau" du ressort.

5 Oscillations masse-ressort

On considère une masse ponctuelle de position $x_1(t)$ et de masse m, glissant sans frottement sur un axe horizontal Ox (figure 1.5).

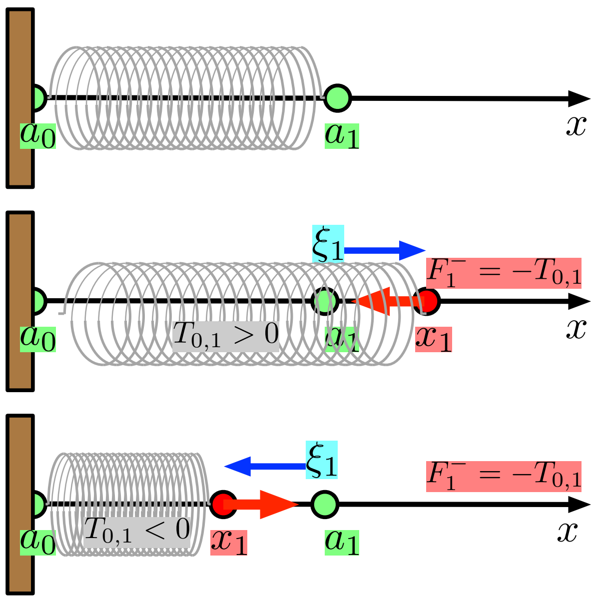

FIGURE 1.5 – *Oscillation d'une masse fixée à un ressort sur un axe horizontal.*

On suppose qu'elle est fixée à ressort, de masse négligeable, dont l'autre extrémité est immobile, en $x = a_0$. Au repos, la masse est en $x = a_1$ et la longueur du ressort est $l = a_1 - a_0$. On note $\alpha = E\,S$ la "raideur matériau" du ressort.

La force exercée par le ressort sur la masse m est $F_1^- = -T_{0,1} = -\alpha\,(\xi_1 - \xi_0)/l = -\alpha\,\xi_1/l$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors

$$m\,\ddot{x}_1 = m\,\ddot{\xi}_1 = F_1^- = -T_{0,1} = -\alpha\frac{\xi_1 - \xi_0}{l} = -\alpha\frac{\xi_1}{l} = -k\,\xi_1\ , \qquad (1.3)$$

où $k = \alpha/l$ est le "coefficient de raideur" du ressort.

On en déduit $\ddot{\xi}_1 = -\omega^2\,\xi_1$ où $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\alpha/(l\,m)}$ est la pulsation (rad.s^{-1}). La solution générale de cette équation différentielle ordinaire du deuxième ordre est alors :

$$\xi_1(t) = A\ \cos(\omega\,t + \varphi)\ , \qquad (1.4)$$

où A est l'amplitude de l'oscillation et φ une phase. Ces deux grandeurs sont obtenues à l'aide des conditions initiales $\xi_1(0)$ et $\dot{\xi}_1(0)$ lorsqu'elles sont connues. Par exemple si $\xi_1(0) = A$ et $\dot{\xi}_1(0) = 0$, la solution est $\xi_1 = A\cos(\omega t)$ avec $\dot{\xi}_1(t) = -A\sin(\omega\,t)$ (figure 1.6).

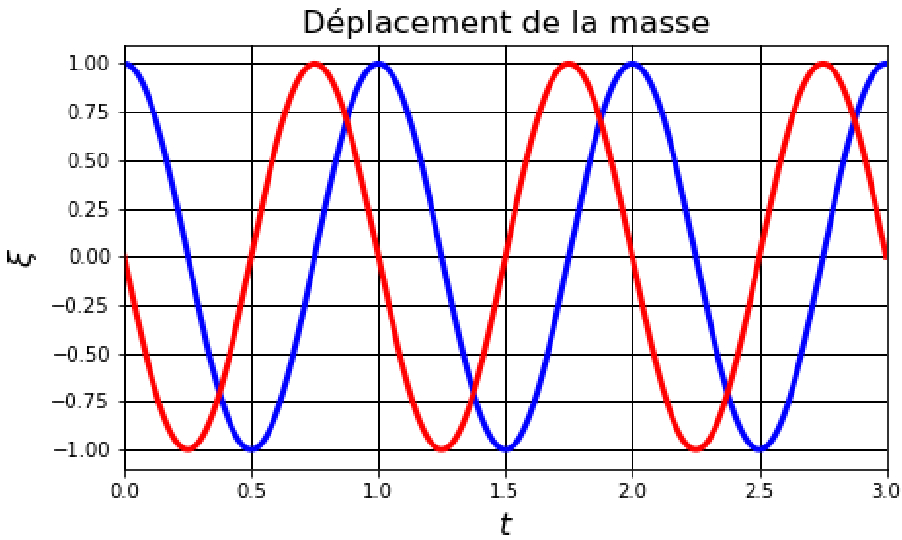

FIGURE 1.6 – *Oscillation avec $\xi_1(t) = A\ \cos(\omega t)$ en bleu et $\dot{\xi}_1(t) = -A\sin(\omega\,t)$ en rouge.*

6 Conclusion

L'utilisation du concept de tension T dans un ressort est très utile pour déterminer le signe des forces, à l'aide de la notion de normale extérieure $(+1)$ ou (-1). La loi de comportement rhéologique des déformations 1D considérées fait intervenir des différences de déplacement ainsi qu'un coefficient α, appelé ici la "raideur matériau", qui ne dépendent pas de la longueur de la portion de barreau ou de ressort considérée.

FORMULAIRE

Loi de Hooke 1D

Forces à l'intérieur d'un barreau élastique ou d'un ressort, d'axe Ox :

$$\text{Force exercée par le matériau à droite (vers } x>0) \text{ sur } S : F^+ = +T\ ,$$
$$\text{Force exercée par le matériau à gauche (vers } x<0) \text{ sur } S : F^- = -T\ ,$$
$$T = \alpha\,\frac{h-l}{l} \qquad \text{avec } \alpha = E\,S\ . \tag{1.5}$$

Section : S (m^2). Tension : T (N). Module de Young : E (Pa).

Tension et déplacement

En notant ξ_1 et ξ_2 les déplacements des extrémités d'un ressort et $l_{1,2}$ sa longueur au repos, sa tension $T_{1,2}$ est :

$$T_{1,2} = \alpha\,\frac{\xi_2 - \xi_1}{l_{1,2}}\ . \tag{1.6}$$

Raideur matériau : $\alpha = E\,S$ (N).

Oscillation d'un système masse - ressort

En notant $\xi_1(t)$ le déplacement d'une masse m reliée à un ressort de longueur au repos l :

$$m\,\ddot{\xi}_1 = -k\,\xi_1 \qquad \text{avec } k = \alpha/l\ . \tag{1.7}$$
$$\xi_1(t) = A\,\cos(\omega\,t+\varphi) \qquad \text{avec } \omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\alpha/(l\,m)}\ . \tag{1.8}$$

EXERCICES

EXERCICE 1.1 Une masse et deux ressorts

On considère une masse ponctuelle de position $x_1(t)$ et de masse m, fixée à deux ressorts de masses négligeables et d'extrémités fixes en $x = a_0$ et $x = a_2$ (Figure 1.7). Au repos, la masse est en $x = a_1$ et les ressorts, identiques, sont de longueurs égales $l = l_{0,1} = l_{1,2}$. La loi de comportement rhéologique des ressorts est donnée par le coefficient $\alpha = E\,S$, où E est le module de Young et S la section équivalente.

1) Exprimer les déplacements ξ_0, ξ_1 et ξ_2 en fonction de a_1 et $x_1(t)$.

$\xi_0 = 0$, $\xi_1(t) = x_1(t) - a_1$ et $\xi_2 = 0$.

2) Exprimer l'allongement des ressorts en fonction de ces déplacements.

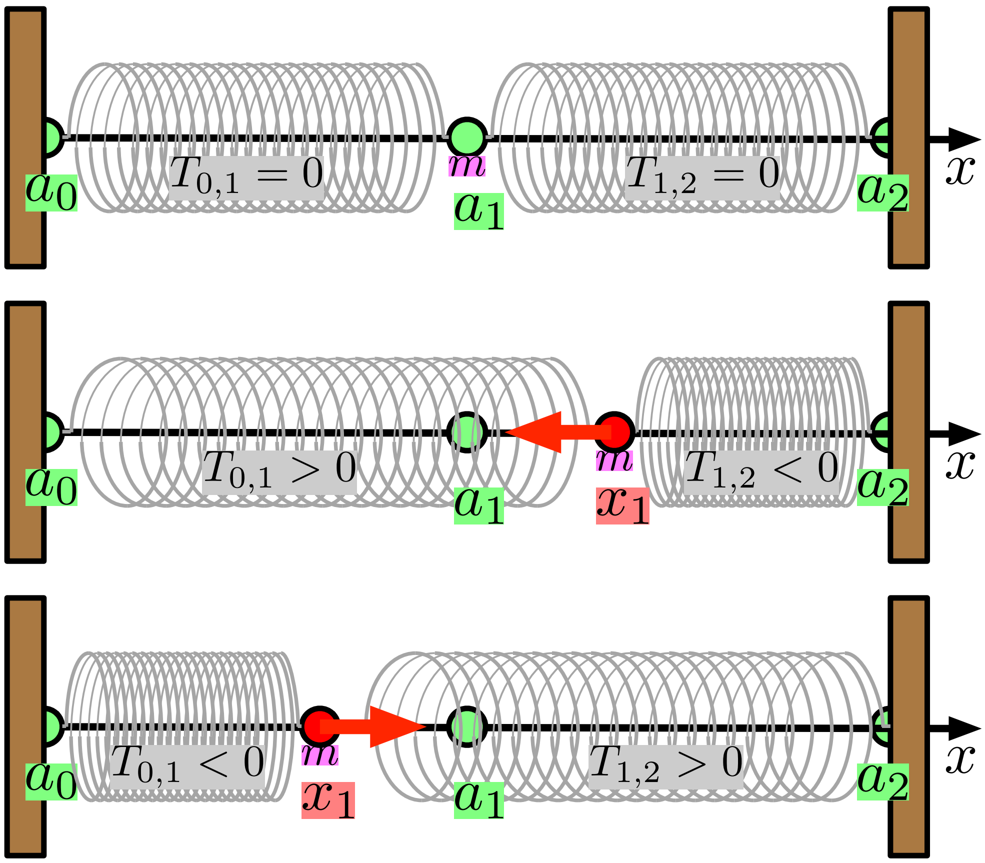

FIGURE 1.7 – Masse ponctuelle entre deux ressorts d'extrémités fixes.

L'allongement du ressort de gauche est $\xi_1 - \xi_0 = x_1(t) - a_0$. L'allongement du ressort de droite est $\xi_2 - \xi_1 = a_1 - x_1(t)$.

3) Exprimer la force F_1^- exercée sur la masse par le ressort gauche en fonction des déplacements.

$F_1^- = -T_{0,1} = -\alpha\,(\xi_1 - \xi_0)/l = -\alpha\,\xi_1/l$.

4) Exprimer la force F_1^+ exercée sur la masse par le ressort droit en fonction des déplacements.

$F_1^+ = T_{1,2} = +\alpha\,(\xi_2 - \xi_1)/l = -\alpha\,\xi_1/l$.

5) Écrire le principe fondamentale de la dynamique appliqué à la masse m.

$m\,\ddot{\xi}_1 = F_1^- + F_1^+ = -\alpha(\xi_1 - \xi_0)/l + \alpha\,(\xi_2 - \xi_1)/l = -(2\,\alpha/l)\,\xi_1$.

6) En déduire la pulsation ω de l'oscillation.

On a $\omega = \sqrt{2\,\alpha/(l\,m)}$.

7) Donner les dimensions des grandeur α, l, m est vérifier que ω est bien une pulsation.

La constante α est en Newton (N), la longueur l est en mètre (m) et la masse en kilogramme (kg). Donc ω^2 est en N.m^{-1}.kg^{-1} donc en s^{-2} et ω est bien en rad.s^{-1}.

8) On suppose que $\xi_1(0) = u$ et $\dot{\xi}_i(0) = 0$. En déduire l'expression de $\xi_1(t)$ pour tout temps t.

La solution générale est de la forme $\xi_1(t) = A\,\cos(\omega\,t + \varphi)$ pour tout t. En posant $\xi_1(0) = A\,\cos(\varphi)$ et $\dot{\xi}_1(0) = -A\,\omega\,\sin(\varphi)$, on trouve $(A, \varphi) = (u, 0)$ ou $(A, \varphi) = (-u, \pi)$, ce qui conduit à l'unique solution $\xi_1(t) = u\,\cos(\omega\,t)$.