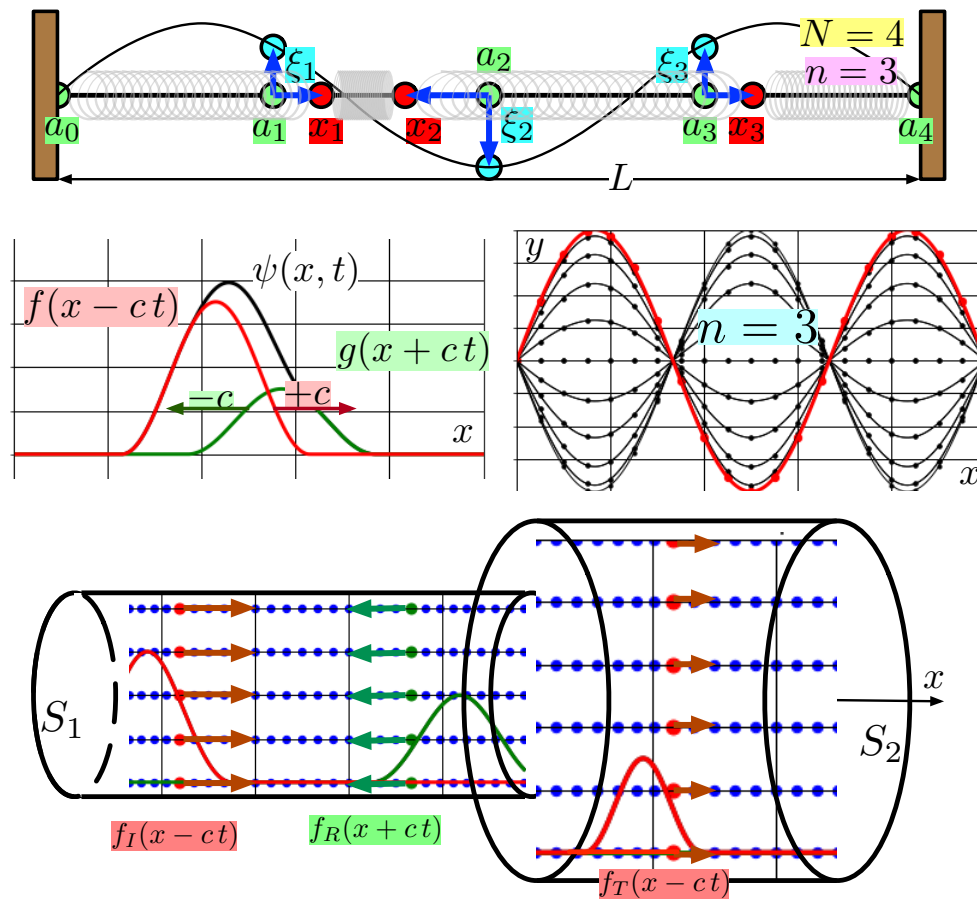


Propagation des ondes mécaniques



Toulouse INP - ENSEEIHT

La Prépa des INP Toulouse

Année 2021-2022, version du 2 octobre 2021

Avant-propos

À l'issue de ce cours sur la mécanique des ondes, les étudiants seront capables d'identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux élastiques, acoustiques et électriques. Ils sauront caractériser la nature longitudinale ou transversale des déplacements lorsque les ondes induisent un mouvement. Ils seront capables de dériver l'équation des ondes par passage à la limite continue d'un système composé d'un grand nombre de petits éléments. Réciproquement, ils sauront décomposer un problème continu en petits éléments infinitésimaux pour leur appliquer des lois physiques.

Ils sauront écrire l'expression générale des solutions de l'équation des ondes unidimensionnelle et prévoir l'évolution temporelle de leur forme dans le cas d'une onde progressive. Ils sauront énoncer la définition d'onde progressive ou d'onde stationnaire et les reconnaître en présence d'un exemple. Ils seront capables de manipuler l'expression analytique d'ondes monochromatiques progressives lorsque leur superposition conduit à une solution stationnaire. Dans le cas des domaines bornés, ils sauront formuler les conditions aux limites usuelles et calculer les modes propres solutions de l'équation des ondes.

Enfin, les étudiants sauront donner quelques exemples d'ondes amorties ou dispersives pour bien situer le cadre non dispersif, non amorti et unidimensionnel, qui fait l'objet principal de ce cours.

Table des matières

Introduction	7
1 Tension et forces dans un ressort	9
1 Définition de la tension d'un barreau élastique	10
2 Module de Young	11
3 Forces aux extrémités d'un ressort	11
4 Déplacement et allongements	11
5 Oscillations masse-ressort	12
6 Conclusion	13
2 Discrétisation d'un barreau élastique	17
1 Discrétisation par une chaîne masses-ressorts	18
2 Allongements et déplacements	18
3 Loi de Hooke	19
4 Tension de déplacement	19
5 Passage au continu	20
6 Principe fondamental	20
7 Exemple de solution propagative	21
8 Ondes progressives monochromatiques	22
9 Ondes stationnaires	22
10 Conclusion	23
3 Solutions de l'équation de D'Alembert	27
1 Équation de D'Alembert	28
2 Solutions générales en milieu infini	29
3 Conditions initiales	30
4 Ondes progressives monochromatiques	30

5	Ondes stationnaires	31
6	Conditions aux limites et ondes stationnaires	32
7	Conclusion	33
4	Oscillations propres d'une corde tendue	37
1	Discrétisation de la dynamique d'une corde tendue	38
2	Principe fondamental	38
3	Passage au continu et équation de D'Alembert	39
4	Solutions stationnaire de l'équation de D'Alembert	40
5	Modes propres pour des extrémités fixes	40
6	Modes propres avec une extrémité libre	41
7	Expérience de la corde de Melde	42
8	Conclusion	43
5	Réflexion et transmission des ondes sonores	47
1	Discrétisation du mouvement dans un tube	48
2	Équations du mouvement discrètes	49
3	Passage au continu	49
4	Équation de D'Alembert pour les ondes sonores	50
5	Vitesse du son	50
6	Débit associé à une onde sonore	51
7	Réflexion et transmission d'une onde sonore	52
8	Cas limites de réflexion et de transmission	53
9	Conclusion	53
6	Ondes électriques amorties dans un coaxial	57
1	Description d'un câble coaxial	58
2	Discrétisation d'un coaxial	59
3	Passage au continu	59
4	Amortissement temporel	59
5	Amortissement spatial	60
6	Conclusion	61
7	Dispersion des ondes	65
1	Chaîne discrète de pendules	66

2	Petites oscillations couplées	67
3	Passage au continu	67
4	Relation de dispersion	68
5	Paquet à deux ondes	68
6	Paquet à N ondes	70
7	Conclusion	71
8	Modes propres d'oscillations des systèmes discrets	75
1	Géométrie d'une chaîne masses-ressorts	76
2	Tensions des ressorts et forces sur les masses	76
3	Principe fondamental de la dynamique	77
4	Chaîne avec $N = 2$	78
5	Chaîne avec $N = 3$	78
6	Chaîne avec N quelconque	79
7	Conclusion	80
	Bibliographie	85

Introduction

Les ondes mécaniques interviennent dans notre environnement de tous les jours : vibration des cordes, ondes sonores, ondes de surface... Elles partagent de nombreux points communs avec les ondes électromagnétiques ou les ondes électriques. Dans ce cours, nous ne dépasserons pas le cadre des ondes linéaires qui sont des petites vibrations autour d'une position d'équilibre.

On se limite au cas des ondes monodimensionnelles (1D) et on s'intéresse principalement aux ondes mécaniques dont les ondes progressives monochromatiques ont toutes la même vitesse des phase. Les ondes de ces systèmes sont qualifiées de "non dispersives" et leur superposition forme des signaux qui se propagent sans déformation. C'est le cas des ondes élastiques longitudinales ou transversales dans des solides comme les ressorts, les barreaux élastiques ou les cordes tendues, des ondes sonores dans les fluides compressibles ou encore des ondes électriques dans les coaxiaux. Toutes ces ondes sont modélisées par l'équation de D'Alembert, également appelée "équation des ondes". Des exemples de systèmes avec des ondes amorties ou dispersives permettent de mettre en évidence, par opposition, la notion d'ondes non dispersives et non amorties.

Chapitre 1

Tension et forces dans un ressort

Sommaire

1	Définition de la tension d'un barreau élastique . . .	10
2	Module de Young	11
3	Forces aux extrémités d'un ressort	11
4	Déplacement et allongements	11
5	Oscillations masse-ressort	12
6	Conclusion	13

Introduction

L'élasticité linéaire s'intéresse aux petites déformations dans un solide. La loi de Hooke relie linéairement les déformations et les contraintes : c'est une loi de comportement rhéologique.

On se restreint ici à des déformations le long d'un seul axe Ox , en prenant l'exemple d'un barreau solide ou d'un ressort. Dans ce cas, la tension, qui est un réel positif (élongation) ou négatif (compression), représente l'état de contrainte dans le solide élastique. La force exercée par une portion du solide sur une de ses sections est le produit de la tension par la normale sortante, dirigée vers la portion exerçant la force. Cette normale vaut $(+1)$ ou (-1) dans ce cas unidimensionnel (1D).

Pour ce cas 1D, la loi de comportement élastique indique que la tension est proportionnelle à l'allongement (positif ou négatif) relatif (par unité de longueur), avec une "raideur de matériau" qui ne dépend pas de la longueur du barreau ou du ressort. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à des masses ponctuelles reliées par des ressort permet de mettre en évidence des oscillations dont on peut calculer la pulsation.

1 Définition de la tension d'un barreau élastique

On considère un barreau élastique d'axe Ox , de section S constante et de longueur l en l'absence de contraintes (Figure 1.1). En présence de contraintes, on suppose que sa longueur devient h , plus grande ($h > l$) en cas d'extension ou plus petite ($h < l$) en cas de compression.

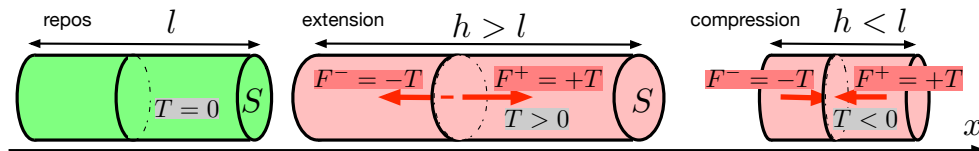


FIGURE 1.1 – Forces à l'intérieur d'un barreau élastique et tension T .

La tension T (en Newtons) dans le barreau est alors définie de manière à exprimer les forces exercées sur une section quelconque du barreau :

- La force (en Newtons) exercée sur la section S par la portion du barreau située à sa droite (dans le sens des $x > 0$) est : $F^+ = +T$.
- La force (en Newtons) exercée sur la section S par la portion du barreau située à sa gauche (dans le sens des $x < 0$) est : $F^- = -T$.

La normale sortante, dans le sens de la portion qui exerce une force, est $(+1)$ dans le sens des x positifs et (-1) dans le sens des x négatifs. La force est donc le produit de la tension par la normale sortante, c'est-à-dire dans la direction du milieu qui agit sur la section.

Il y a donc extension si $T > 0$: l'extérieur tire sur la section. Il y a compression si $T < 0$: l'extérieur pousse sur la section.

2 Module de Young

On suppose que la section S varie peu lors d'une élongation ou d'une compression que l'on suppose "petites". La loi de comportement rhéologique pour les déformations unidimensionnelles (1D) des solides élastiques s'écrit

$$\frac{T}{S} = E \frac{h-l}{l} \quad \Leftrightarrow \quad T = \alpha \frac{h-l}{l}, \quad (1.1)$$

où E est le module de Young et $\alpha = ES$, que l'on nomme ici la "raideur de matériau", est le produit du module de Young par la section. Ce coefficient ne dépend que de la nature du matériau et de la section du barreau, tandis que le "coefficient de raideur" $k = \alpha/l$ du barreau dépend en plus de sa longueur l .

Les unités sont les suivantes : Newton (N) pour T , Pascal (Pa=N.m⁻²) pour E , Newton (N) pour α et (N.m⁻¹) pour k . Cette loi de comportement est un cas simplifiée de la loi de Hooke, restreinte au cas 1D.

3 Forces aux extrémités d'un ressort

On s'intéresse ici aux forces exercées par le barreau sur ses extrémités (Figure 1.2). La force exercée par le barreau sur son extrémité gauche est $F^+ = +T$. La force exercée par le barreau sur son extrémité droite est $F^- = -T$.

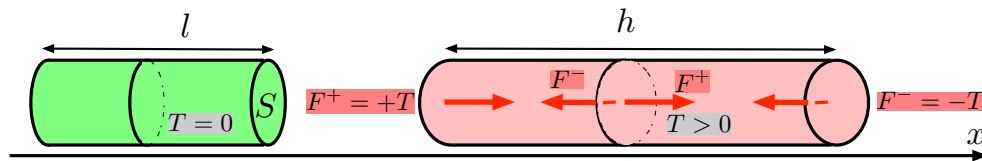


FIGURE 1.2 – Forces exercées par un barreau élastique sur ses extrémités.

Il en va de même pour les ressorts (Figure 1.3), la tension étant exprimée en fonction de l'allongement relatif par la relation $T = \alpha (h - l)/l$ où la "raideur de matériau" α ne dépend que du matériau et de l'enroulement du ressort.

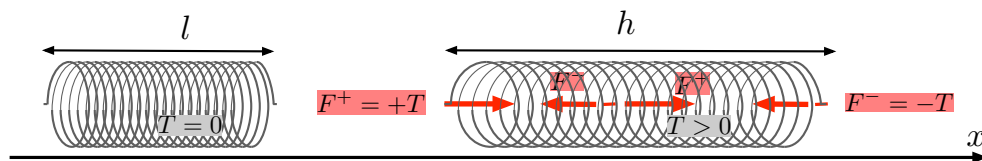


FIGURE 1.3 – Forces exercées par un ressort sur ses extrémités.

4 Déplacement et allongements

On s'intéresse ici à un ressort dont les extrémités au repos sont en $x = a_1$ et $x = a_2$ (figure 1.4). On suppose qu'en présence de contraintes, ces extrémités sont en $x = x_1$ et $x = x_2$. On note alors $\xi_1 = x_1 - a_1$ et $\xi_2 = x_2 - a_2$ les

déplacements respectifs de ces extrémités. Si $l_{1,2} = a_2 - a_1$ est la longueur au repos, la longueur sous contrainte est $h_{1,2} = x_2 - x_1$. L'allongement s'écrit alors $h_{1,2} - l_{1,2} = (x_2 - x_1) - (a_2 - a_1) = (x_2 - a_2) - (x_1 - a_1) = \xi_2 - \xi_1$.

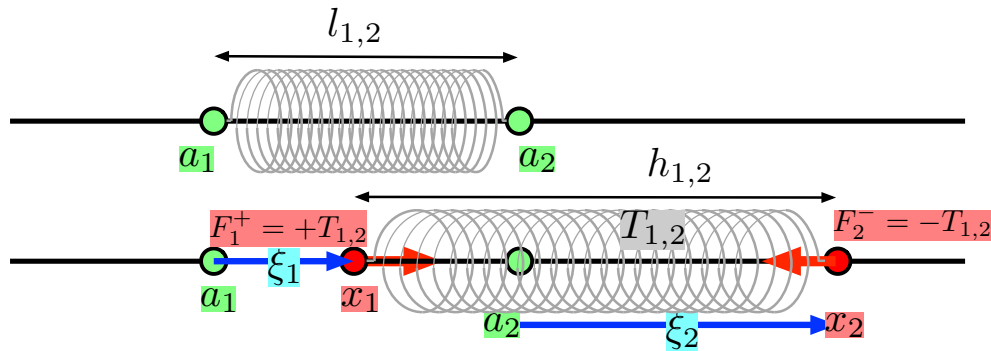


FIGURE 1.4 – Déplacements ξ_1 et ξ_2 des extrémités d'un ressort pour la détermination de son allongement.

En notant $T_{1,2}$ la tension du ressort, la loi de comportement s'écrit alors :

$$T_{1,2} = \alpha \frac{h_{1,2} - l_{1,2}}{l_{1,2}} = \alpha \frac{(x_2 - x_1) - (a_2 - a_1)}{l_{1,2}} = \alpha \frac{\xi_2 - \xi_1}{l_{1,2}}, \quad (1.2)$$

où α est la "raideur matériau" du ressort.

5 Oscillations masse-ressort

On considère une masse ponctuelle de position $x_1(t)$ et de masse m , glissant sans frottement sur un axe horizontal Ox (figure 1.5).

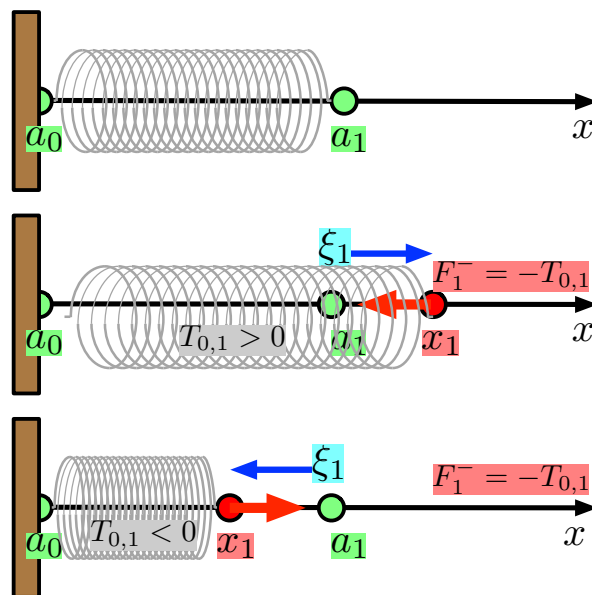


FIGURE 1.5 – Oscillation d'une masse fixée à un ressort sur un axe horizontal.

On suppose qu'elle est fixée à ressort, de masse négligeable, dont l'autre extrémité est immobile, en $x = a_0$. Au repos, la masse est en $x = a_1$ et la longueur du ressort est $l = a_1 - a_0$. On note $\alpha = ES$ la "raideur matériau" du ressort.

La force exercée par le ressort sur la masse m est $F_1^- = -T_{0,1} = -\alpha(\xi_1 - \xi_0)/l = -\alpha\xi_1/l$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors

$$m\ddot{x}_1 = m\ddot{\xi}_1 = F_1^- = -T_{0,1} = -\alpha\frac{\xi_1 - \xi_0}{l} = -\alpha\frac{\xi_1}{l} = -k\xi_1, \quad (1.3)$$

où $k = \alpha/l$ est le "coefficient de raideur" du ressort.

On en déduit $\ddot{\xi}_1 = -\omega^2\xi_1$ où $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\alpha/(lm)}$ est la pulsation (rad.s^{-1}). La solution générale de cette équation différentielle ordinaire du deuxième ordre est alors :

$$\xi_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.4)$$

où A est l'amplitude de l'oscillation et φ une phase. Ces deux grandeurs sont obtenues à l'aide des conditions initiales $\xi_1(0)$ et $\dot{\xi}_1(0)$ lorsqu'elles sont connues. Par exemple si $\xi_1(0) = A$ et $\dot{\xi}_1(0) = 0$, la solution est $\xi_1 = A \cos(\omega t)$ avec $\dot{\xi}_1(t) = -A \sin(\omega t)$ (figure 1.6).

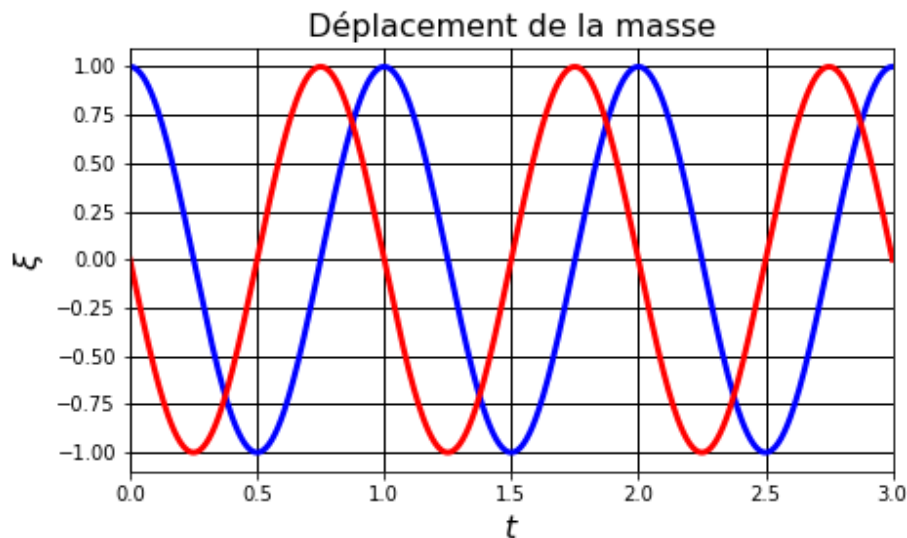


FIGURE 1.6 – Oscillation avec $\xi_1(t) = A \cos(\omega t)$ en bleu et $\dot{\xi}_1(t) = -A \sin(\omega t)$ en rouge.

6 Conclusion

L'utilisation du concept de tension T dans un ressort est très utile pour déterminer le signe des forces, à l'aide de la notion de normale extérieure (+1) ou (-1). La loi de comportement rhéologique des déformations 1D considérées fait intervenir des différences de déplacement ainsi qu'un coefficient α , appelé ici la "raideur matériau", qui ne dépendent pas de la longueur de la portion de barreau ou de ressort considérée.

FORMULAIRE

Loi de Hooke 1D

Forces à l'intérieur d'un barreau élastique ou d'un ressort, d'axe Ox :

$$\begin{aligned} &\text{Force exercée par le matériau à droite (vers } x > 0) \text{ sur } S : F^+ = +T, \\ &\text{Force exercée par le matériau à gauche (vers } x < 0) \text{ sur } S : F^- = -T, \\ &T = \alpha \frac{h-l}{l} \quad \text{avec } \alpha = ES. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Section : S (m^2). Tension : T (N). Module de Young : E (Pa).

Tension et déplacement

En notant ξ_1 et ξ_2 les déplacements des extrémités d'un ressort et $l_{1,2}$ sa longueur au repos, sa tension $T_{1,2}$ est :

$$T_{1,2} = \alpha \frac{\xi_2 - \xi_1}{l_{1,2}}. \quad (1.6)$$

Raideur matériau : $\alpha = ES$ (N).

Oscillation d'un système masse - ressort

En notant $\xi_1(t)$ le déplacement d'une masse m reliée à un ressort de longueur au repos l :

$$m \ddot{\xi}_1 = -k \xi_1 \quad \text{avec } k = \alpha/l. \quad (1.7)$$

$$\xi_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec } \omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\alpha/(lm)}. \quad (1.8)$$

EXERCICES

EXERCICE 1.1 Une masse et deux ressorts

On considère une masse ponctuelle de position $x_1(t)$ et de masse m , fixée à deux ressorts de masses négligeables et d'extrémités fixes en $x = a_0$ et $x = a_2$ (Figure 1.7). Au repos, la masse est en $x = a_1$ et les ressorts, identiques, sont de longueurs égales $l = l_{0,1} = l_{1,2}$. La loi de comportement rhéologique des ressorts est donnée par le coefficient $\alpha = ES$, où E est le module de Young et S la section équivalente.

- 1) Exprimer les déplacements ξ_0 , ξ_1 et ξ_2 en fonction de a_1 et $x_1(t)$.
| $\xi_0 = 0$, $\xi_1(t) = x_1(t) - a_1$ et $\xi_2 = 0$.
- 2) Exprimer l'allongement des ressorts en fonction de ces déplacements.

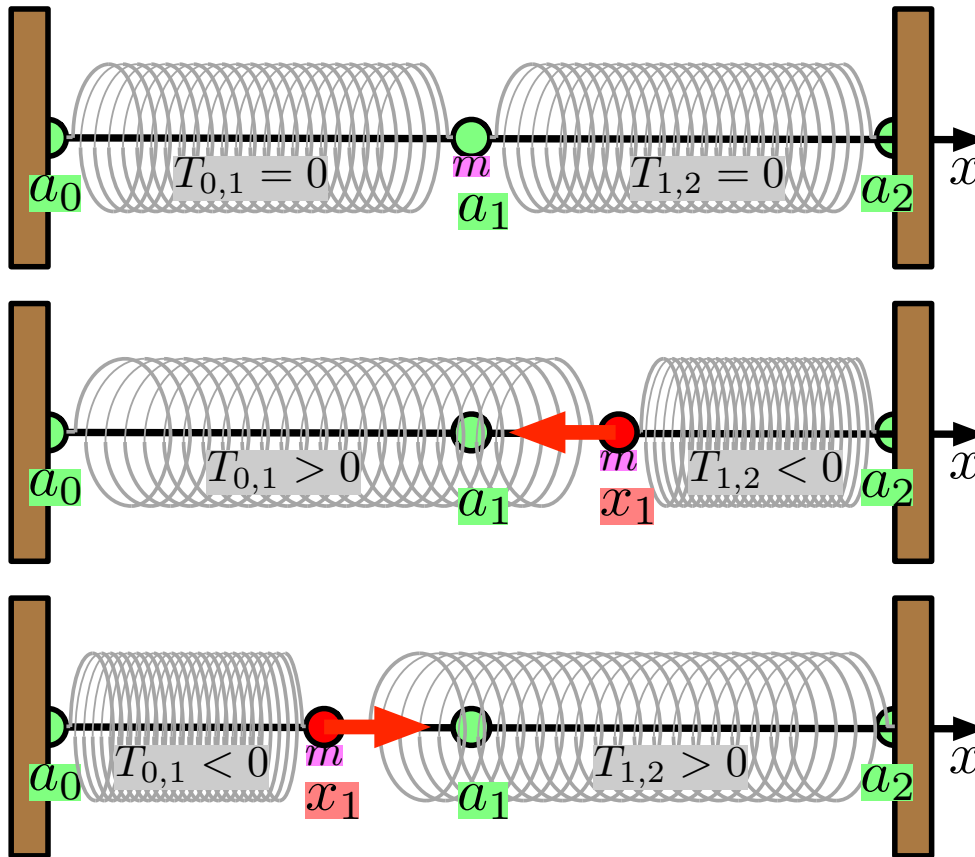


FIGURE 1.7 – Masse ponctuelle entre deux ressorts d'extrémités fixes.

L'allongement du ressort de gauche est $\xi_1 - \xi_0 = x_1(t) - a_0$. L'allongement du ressort de droite est $\xi_2 - \xi_1 = a_1 - x_1(t)$.

3) Exprimer la force F_1^- exercée sur la masse par le ressort gauche en fonction des déplacements.

$$F_1^- = -T_{0,1} = -\alpha (\xi_1 - \xi_0)/l = -\alpha \xi_1/l.$$

4) Exprimer la force F_1^+ exercée sur la masse par le ressort droit en fonction des déplacements.

$$F_1^+ = T_{1,2} = +\alpha (\xi_2 - \xi_1)/l = -\alpha \xi_1/l.$$

5) Écrire le principe fondamentale de la dynamique appliqué à la masse m .

$$m \ddot{\xi}_1 = F_1^- + F_1^+ = -\alpha (\xi_1 - \xi_0)/l + \alpha (\xi_2 - \xi_1)/l = -(2\alpha/l) \xi_1.$$

6) En déduire la pulsation ω de l'oscillation.

$$\text{On a } \omega = \sqrt{2\alpha/(lm)}.$$

7) Donner les dimensions des grandeur α , l , m est vérifier que ω est bien une pulsation.

La constante α est en Newton (N), la longueur l est en mètre (m) et la masse en kilogramme (kg). Donc ω^2 est en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ donc en s^{-2} et ω est bien en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

8) On suppose que $\xi_1(0) = u$ et $\dot{\xi}_1(0) = 0$. En déduire l'expression de $\xi_1(t)$ pour tout temps t .

La solution générale est de la forme $\xi_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ pour tout t . En posant $\xi_1(0) = A \cos(\varphi)$ et $\dot{\xi}_1(0) = -A\omega \sin(\varphi)$, on trouve $(A, \varphi) = (u, 0)$ ou $(A, \varphi) = (-u, \pi)$, ce qui conduit à l'unique solution $\xi_1(t) = u \cos(\omega t)$.

Chapitre 2

Discrétisation d'un barreau élastique

Sommaire

1	Discrétisation par une chaîne masses-ressorts . . .	18
2	Allongements et déplacements	18
3	Loi de Hooke	19
4	Tension de déplacement	19
5	Passage au continu	20
6	Principe fondamental	20
7	Exemple de solution propagative	21
8	Ondes progressives monochromatiques	22
9	Ondes stationnaires	22
10	Conclusion	23

Introduction

On discrétise un barreau élastique, dont les mouvements sont restreints le long d'un axe, à l'aide d'une chaîne de masses ponctuelles glissant sans frottement le long de cet axe et reliées entre elles par des ressorts de masse négligeable. La loi de Hooke, qui décrit le comportement rhéologique élastique du barreau en petites déformations, se traduit par une relation linéaire entre la tension d'un ressort et son allongement relatif. Dans la limite où la discrétisation comporte un nombre élevé de masses ponctuelles, qui se partagent la masse totale, les tensions et déplacements sont décrits par des fonctions continues. La loi de Hooke indique alors que la tension est proportionnelle à la dérivée du déplacement par rapport à la variable d'espace. L'application du principe fondamental pour chacune des masses devient, par passage au continu, une équation aux dérivées partielles en espace et en temps que l'on appelle "équation de D'Alembert" ou encore "équation des ondes 1D". Un premier exemple de solutions met en évidence la vitesse de propagation de signaux. D'autres exemples décrivent des familles de solutions stationnaires.

1 Discrétisation par une chaîne masses-ressorts

On considère un barreau élastique d'axe Ox et de longueur L . On le modélise par une chaîne de $N - 1$ masses ponctuelles de masses $\delta m = m/N$ avec deux masses ponctuelles de masses $\delta m/2$ situées aux deux extrémités (figure 2.1). La masse totale m du barreau est donc répartie entre les $N + 1$ masses ponctuelles.

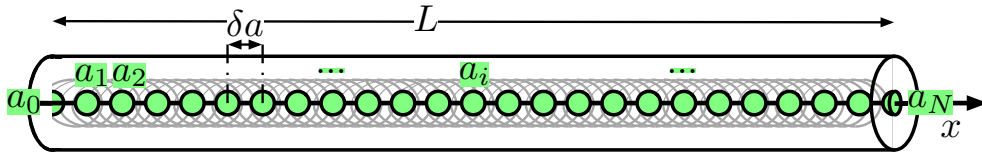
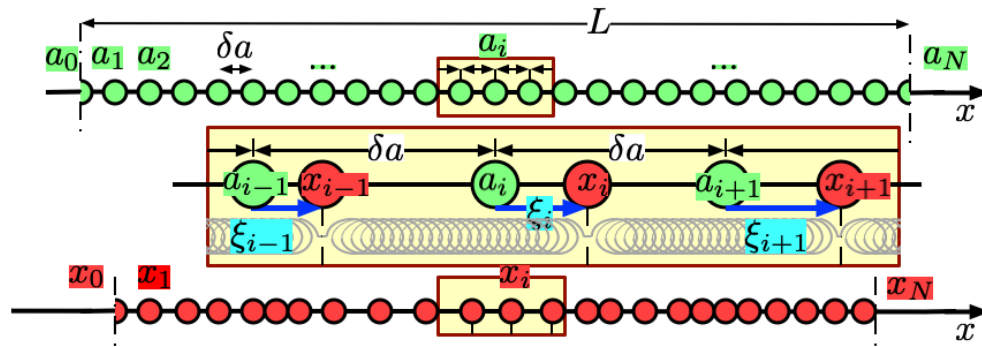


FIGURE 2.1 – Discrétisation d'un barreau élastique en $N + 1$ masses ponctuelles reliées par des ressorts et glissant sans frottement le long de l'axe Ox .

On modélise l'élasticité du barreau par des ressorts, de masse négligeable, qui relient les masses entre elles. En l'absence de contraintes, c'est-à-dire au repos, la longueur des ressorts est $\delta a = L/N$. Les abscisses des ressorts au repos sont notées a_i et vérifient $a_i = a_0 + i\delta a$ pour $i = 0, N$. Le passage au continu est attendu dans la limite où N devient grand.

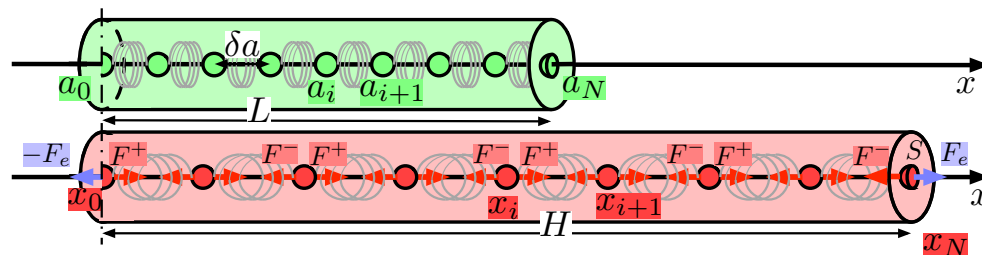
2 Allongements et déplacements

On suppose maintenant que le barreau élastique est déformé, ce que l'on modélise par les déplacements $\xi_i = x_i - a_i$ pour $i = 0, N$ des masses dont les abscisses passent de $x = a_i$ au repos vers $x = x_i$ lors de la déformation (figure 2.2). L'allongement du ressort compris entre x_i et x_{i+1} est égale à $(x_{i+1} - x_i) - (a_{i+1} - a_i) = (x_{i+1} - a_{i+1}) - (x_i - a_i) = \xi_{i+1} - \xi_i$. L'allongement d'un ressort est donc égal à la différence des déplacements de ses extrémités.

FIGURE 2.2 – Déplacements ξ_i des masses de a_i vers x_i .

3 Loi de Hooke

On suppose que le barreau élastique est soumis à la force extérieure $+F_e$ sur son extrémité droite et $-F_e$ sur son extrémité gauche. Le barreau se déforme alors jusqu'à un équilibre tel que $+F_e$ se retrouve appliquée en $x = x_N$ et $-F_e$ en $x = x_0$. La longueur $L = a_N - a_0$ du barreau au repos devient $H = x_N - x_0$ pour le nouvel équilibre (figure 2.3).

FIGURE 2.3 – Forces $F^+ = +F_e$ et $F^- = -F_e$ exercées à gauche et à droite .

La loi de Hooke décrit le comportement élastique d'un barreau élastique dans le cadre des petites déformations. On peut alors considérer que la section S du barreau varie **peu** lors de la déformation. Cette loi s'écrit alors

$$\frac{F_e}{S} = E \frac{H - L}{L} \quad \Leftrightarrow \quad F_e = \alpha \frac{H - L}{L} \quad \text{avec } \alpha = ES, \quad (2.1)$$

où E , exprimé en Pascals (N.m^{-2}), ne dépend que de la nature du matériau dont est constitué le barreau. Le paramètre $\alpha = ES$, appelé ici "raideur matériau" est exprimé en Newtons.

4 Tension de déplacement

On définit la tension T à l'intérieur du barreau élastique de la manière suivante :

- La force exercée sur la section S par le matériau situé dans la direction $u = +1$ est : $F^+ = T u = +T$.
- La force exercée sur la section S par le matériau situé dans la direction $u = -1$ est : $F^- = T u = -T$.

En modélisant le barreau élastique pour une chaîne de $N + 1$ masses ponctuelles, chaque masse est soumise à une force F^- par le ressort de gauche et une force F^+ par le ressort de droite. À l'équilibre, on a $F^- = -T$ et $F^+ = +T$ où la tension $T = F_e$ des ressorts est constante et égale à la force extérieure appliquée sur l'extrémité droite du barreau. Si $T_{i,i+1}$ est la tension du ressort compris entre les masses i et $i + 1$, la loi de Hooke entraîne donc

$$T_{i,i+1} = \alpha \frac{(x_{i+1} - x_i) - (a_{i+1} - a_i)}{\delta a} = \alpha \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\delta a}, \quad (2.2)$$

et on a $T_{i,i+1} = T$ pour tout $i = 0, N - 1$ à l'équilibre. On suppose que cette loi reste valide pour chaque ressort même lorsque les masses ponctuelles sont en mouvement, et donc que la tension est constante à l'intérieur d'un ressort.

5 Passage au continu

En l'absence d'équilibre global, on suppose que le ressort reliant les masses i et $i + 1$ peut être modélisé par une tension constante $T_{i,i+1}$, ce qui est d'autant plus exact que la longueur δa du ressort est petite. Lorsque le nombre $N + 1$ de masses est grand, avec donc $\delta a = L/N$ petit, on peut décrire les déplacements par une fonction continue $\xi(a)$ en interpolant les relations $\xi(a_i) = \xi_i$ pour $i = 0, N$. On peut aussi représenter les tensions $T_{i,i+1}$ des ressorts situés entre x_i et x_{i+1} (figure 8.2) par une fonction continue $T(a)$ en définissant les abscisses $a_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})$ pour $i = 0, N - 1$ des centres des ressorts lorsqu'ils sont au repos et par interpolation des relations $T(a_{i+\frac{1}{2}}) = T_{i,i+1}$.

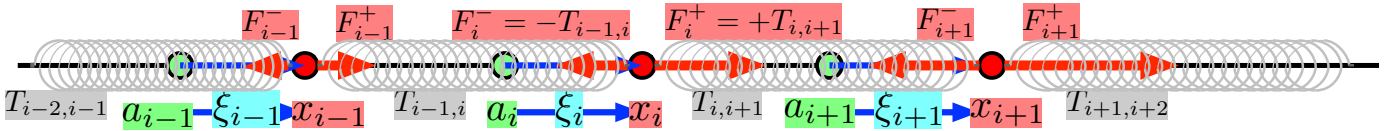


FIGURE 2.4 – Tensions $T_{i,i+1}$ des ressorts reliant les masses x_i et x_{i+1} .

Dans la limite où N devient infini, et donc δa tend vers zéro, on peut écrire $T(a_{i+\frac{1}{2}}) \xrightarrow{\delta a \rightarrow 0} T(a_i)$. On peut également écrire

$$T(a_{i+\frac{1}{2}}) = \alpha \frac{\xi(a_{i+1}) - \xi(a_i)}{\delta a} = \alpha \frac{\xi(a_i + \delta a) - \xi(a_i)}{\delta a} \xrightarrow{\delta a \rightarrow 0} \alpha \frac{\partial \xi}{\partial a}(a_i), \quad (2.3)$$

en utilisant la définition de la dérivée par passage à la limite. On utilise ici la notation de dérivée partielle dans la mesure où les champs continus $\xi(a, t)$ et $T(a, t)$ peuvent également dépendre du temps.

On peut donc écrire la loi de Hooke continue sous la forme :

$$T(a, t) = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial a}(a, t). \quad (2.4)$$

6 Principe fondamental

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, pour les masses $i = 1, N$:

$$\delta m \ddot{\xi}_i(t) = F_i^+(t) + F_i^-(t) = T_{i,i+1}(t) - T_{i-1,i}(t), \quad (2.5)$$

où $F_i^+(t) = +T_{i,i+1}(t)$ et $F_i^-(t) = -T_{i-1,i}(t)$ sont les forces exercées par les ressorts situés respectivement à droite et à gauche de la masse d'abscisse x_i (figure 2.5), de masse $\delta m = m/N$. Le principe fondamentale appliqué aux extrémités dépend de l'existence de forces extérieures. Deux cas particuliers peuvent être considérés :

- Absence de forces extérieures : $\frac{1}{2}\delta m \ddot{x}_0 = T_{0,1}$ ou $\frac{1}{2}\delta m \ddot{x}_N = -T_{N-1,N}$. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, on a $\delta m = m/N \rightarrow 0$ et donc $T_{0,1} = 0$ ou $T_{N-1,N} = 0$.
- Absence de déplacements : $\xi_0 = 0$ ou $\xi_N = 0$. Dans ce cas, les forces extérieures sont respectivement $-T_{0,1}$ en $x = a_0$ ou $T_{N-1,N}$ en $x = a_N$ pour que l'accélération soit nulle.

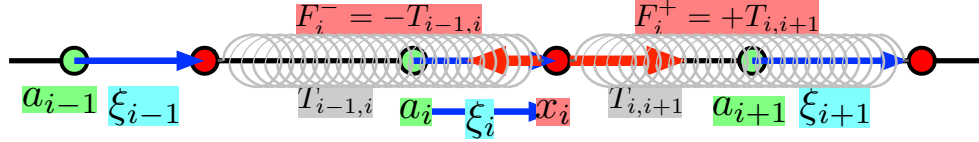


FIGURE 2.5 – Forces $F_i^+ = +T_{i,i+1}$ et $F_i^- = -T_{i-1,i}$ exercées sur la masse située en x_i .

On note $\xi(a, t)$ le champ de déplacement continu par interpolation de la relation $\xi(a_i, t) = \xi_i(t)$. En utilisant la définition $\mu = m/L$ de la masse linéique du barreau et les relations $\delta m = \mu \delta a$ et $\delta a = L/N$, on peut écrire

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a_i, t) = \frac{T(a_{i+\frac{1}{2}}, t) - T(a_{i-\frac{1}{2}}, t)}{\delta a} \xrightarrow{\delta a \rightarrow 0} \frac{\partial T}{\partial a}(a_i, t) \quad (2.6)$$

La version continue $T(a, t) = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial a}(a, t)$ de la loi de Hooke conduit alors à l'équation de D'Alembert, appelée également "équation des ondes 1D" :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a, t) = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t) \quad \text{avec } c = \sqrt{\alpha/\mu}. \quad (2.7)$$

Les conditions aux limites pour cette équation aux dérivées partielles s'écrivent :

- Absence de forces extérieures : $T(0, t) = 0$ ou $T(L, t) = 0$ pour tout temps t , ce qui entraîne $\frac{\partial \xi}{\partial a}(0, t) = 0$ ou $\frac{\partial \xi}{\partial a}(L, t) = 0$.
- Absence de déplacements : $\xi(0, t) = 0$ ou $\xi(L, t) = 0$ pour tout temps t .

7 Exemple de solution propagative

En écrivant l'équation de D'Alembert sous la forme

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial a} \right) \xi = 0, \quad (2.8)$$

on vérifie que tout champ de déplacement de la forme $\xi(a, t) = f(a - ct)$, où $f(X)$ est une fonction quelconque deux fois dérivable, est solution de l'équation de D'Alembert. On peut par exemple choisir $f(X)$ sous la forme d'un pulse localisé (figure 2.6). Le champ de déplacement est alors constitué d'un signal qui se propage à la vitesse c sans déformation. Le même raisonnement s'applique au cas d'un signal $\xi(x, t) = g(a + ct)$, où $g(X)$ est une fonction quelconque, avec une vitesse de propagation $-c$.

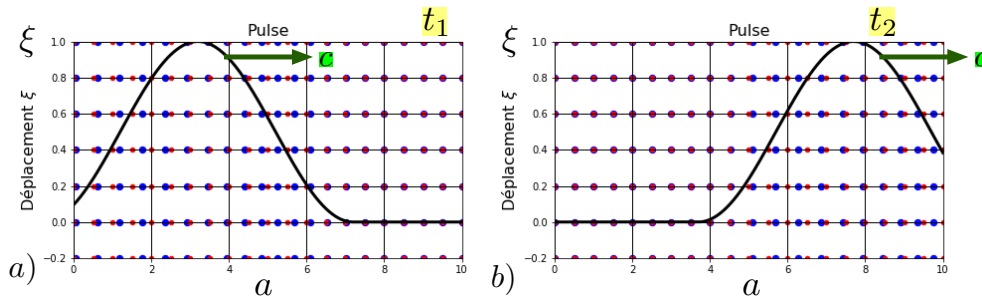


FIGURE 2.6 – Solution $\xi(a, t) = f(a - ct)$ en forme de pulse. a) et b) : déplacement pour deux temps successifs.

8 Ondes progressives monochromatiques

Les ondes progressives monochromatiques sont obtenues en choisissant $f(X) = A \cos(kX + \varphi)$ où A est une amplitudes arbitraire, k un nombre d'onde arbitraire et φ une phase arbitraire. Elle sont donc sous la forme $\xi(x, t) = A \cos[k(a - ct) + \varphi]$. Un exemple d'onde progressive monochromatique est représenté sur la figure 2.7.

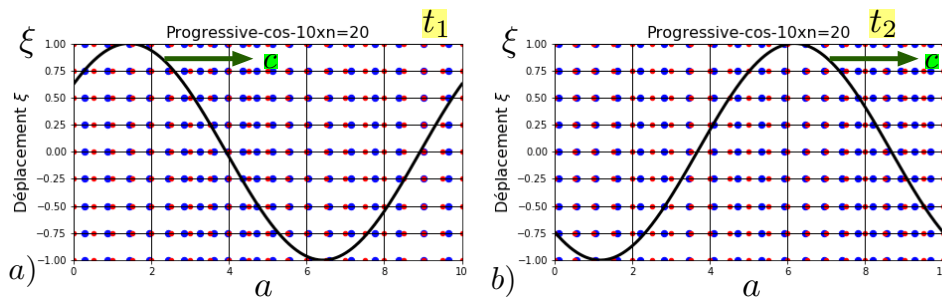


FIGURE 2.7 – Onde progressives monochromatique $\xi(a, t) = A \cos[k(a - ct)]$ avec $k = 2\pi/L$. a) et b) : déplacement pour deux temps successifs.

9 Ondes stationnaires

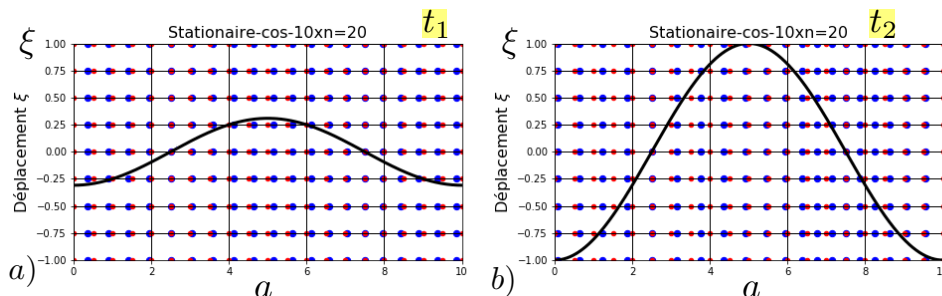


FIGURE 2.8 – Onde stationnaire $\xi(a, t) = A \cos(k_n a) \cos(\omega_n t)$ pour $n = 2$ avec $\omega_n = ck_n$. a) et b) : déplacement pour deux temps successifs.

En reportant dans l'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} = 0$, on vérifie que

les ondes stationnaires $\xi(a, t) = A \cos(k a) \cos(\omega t)$, avec A une amplitude arbitraire et k un nombre d'onde arbitraire, sont solutions lorsque la relation $\omega = k c$ est vérifiée. En effet $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi$ et $\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} = -k^2 \xi$, ce qui conduit à la relation $\omega^2 = k^2 c^2$. Le choix de $k = k_n = n \pi / L$ pour n entier ou demi-entier permet de considérer des solutions stationnaires telles que les extrémités du barreau sont exemptes de force extérieure ($\frac{\partial \xi}{\partial a}(0, t) = 0$ ou $\frac{\partial \xi}{\partial a}(L, t) = 0$) ou bien de déplacement ($\xi(0, t) = 0$ ou $\xi(L, t) = 0$). Par exemple, le cas $n = 2$ correspond au cas où les deux extrémités sont libres de contraintes (figure 2.8), tandis que l'exemple $n = 5/2$ correspond au cas où l'extrémité gauche en $x = x_0 = 0$ est libre de contraintes tandis que l'extrémité droite en $x = a_N = L$ est fixe (figure 2.9).

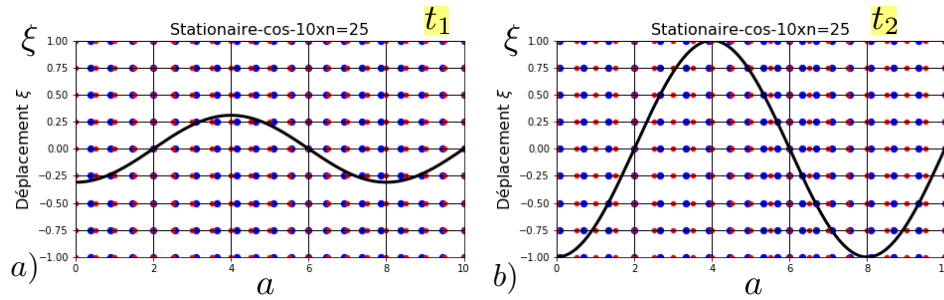


FIGURE 2.9 – Onde stationnaire $\xi(a, t) = A \cos(k_n a) \cos(\omega_n t)$ pour $n = 5/2$ avec $\omega_n = c k_n$. a) et b) : déplacement pour deux temps successifs.

10 Conclusion

La discrétisation d'un barreau en une chaîne de masses-ressort a permis d'exprimer la loi de Hooke, qui décrit le comportement rhéologique élastique d'un matériau, sous la forme d'une relation linéaire entre la tension et la dérivée du champ de déplacement par rapport à la variable d'espace. Le passage au continu du principe fondamental de la dynamique appliqué aux masses ponctuelles modélisant le barreau a permis d'établir l'équation de D'Alembert. Des exemples de solutions, progressives ou stationnaires, ont été présentés.

FORMULAIRE

Loi de Hooke 1D

Tension dans un ressort dont les extrémités subissent les déplacements ξ_i et ξ_{i+1} :

$$T_{i,i+1} = \alpha \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\delta a_N} . \quad (2.9)$$

Module de Young E (Pa). Section S (m^2). Raideur matériau $\alpha = E S$ (N).

Formulation continue pour le champ de déplacement $\xi(a, t)$ et le champ de

tension $T(a, t)$:

$$T(a, t) = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial a}(a, t) . \quad (2.10)$$

Équation du mouvement

Les déplacements sont régis par l'équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a, t) = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t) \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}} . \quad (2.11)$$

Raideur matériau $\alpha = ES$ (N). Masse linéique $\mu = m/L$ (kg.m⁻¹).

Exemples de solutions

L'équation de D'Alembert admet des solutions progressives ou stationnaires :

$$\text{Progressive : } \xi(a, t) = f(x - ct) \quad (2.12)$$

$$\text{Monochromatique : } \xi(a, t) = A \cos[k(a - ct) + \varphi] \quad (2.13)$$

$$\text{Stationnaire : } \xi(a, t) = A \cos(ka) \cos(ckt) . \quad (2.14)$$

EXERCICES

EXERCICE 2.1 Du discret à l'équation de D'Alembert

On modélise un barreau élastique de longueur L et de masse m par une chaîne de $N + 1$ masses ponctuelles glissant sans frottement sur un axe horizontal et reliées par des ressorts de masse négligeable. Les masses ponctuelles situées en $a_i = i \delta a$ au repos avec $i = 1, N - 1$ et $\delta a = L/N$, sont de masses $\delta m = m/N$. Les masses situées en $a_0 = 0$ et $a_N = L$ ont une masse $\delta m/2$.

On suppose que la tension $T_{i,i+1}$ du ressort situé entre les masses d'abscisse $x_i = a_i + \xi_i$ et $x_{i+1} = a_{i+1} + \xi_{i+1}$ vérifie la loi de Hooke $T_{i,i+1} = \alpha (\xi_{i+1} - \xi_i) / \delta a$, avec $\alpha = ES$ où E est le module de Young et S la section du barreau.

- 1) Justifier l'expression de la loi de Hooke à partir de la définition macroscopique du module de Young.

Il suffit d'appliquer la loi $F_e/S = E(H - L)/L$, où H est la longueur du barreau après déformation au cas des petits ressorts de longueur $\delta = L/N$ au repos. On suppose que S varie peu lors des déformations et que la tension est uniforme dans chaque petit ressort.

- 2) Montrer que le principe fondamental de la dynamique appliqué à **une masse** de position $x_i(t)$ conduit à la relation $\ddot{\xi}_i = (c^2/\delta a^2)(\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1})$ avec $c = \sqrt{\alpha/\mu}$ et $\mu = m/L$.

Le principe fondamental s'écrit $\delta m \ddot{\xi}_i = T_{i,i+1} - T_{i-1,i} = (\alpha/\delta a) (\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1})$.
On remarque alors que $\delta m = m/N = \mu \delta a$ où $\mu = m/L$ est la masse linéique du barreau.

3) En déduire que l'on peut écrire $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a_i, t) = (c^2/\delta a^2) [\xi(a_i + \delta a) - 2\xi(a_i) + \xi(a_i - \delta a)]$ pour $i = 1, N - 1$.

Il suffit ici de noter $\xi(a_i, t) = \xi_i(t)$.

4) Écrire les développements limités :

$$\begin{aligned}\xi(a + \delta a, t) &= \xi(a, t) + \frac{\partial \xi}{\partial a}(a, t) \delta a + C_+ \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t) \delta a^2 + O(\delta a^3) \quad (2.15) \\ \xi(a - \delta a, t) &= \xi(a, t) - \frac{\partial \xi}{\partial a}(a, t) \delta a + C_- \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t) \delta a^2 + O(\delta a^3) \quad (2.16)\end{aligned}$$

où C_+ et C_- sont de constantes que l'on déterminera.

On a $C_+ = C_- = 1/2$.

5) En déduire l'équation de D'Alembert dans la limite $N \rightarrow \infty$.

Comme $\delta a \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ on a $[\xi(a_i + \delta a) - 2\xi(a_i) + \xi(a_i - \delta a)]/\delta a^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a_i, t)$. On a donc bien $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a, t) = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t)$.

6) Vérifier que les champs $\xi(a, t) = f(a - ct)$, où $f(X)$ est une fonction deux fois dérivable, sont solutions de l'équation de D'Alembert.

On a $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a, t) = c^2 f''(a - ct)$ et $\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t) = f''(a - ct)$. L'équation de D'Alembert est donc bien vérifiée.

7) Représenter schématiquement le profil de déplacement $\xi(a, t)$ pour des temps successifs à partir d'un tracé quelconque de $f(X)$.

Il suffit de propager la forme du signal $f(X)$ à la vitesse c dans la direction Ox .

8) Mêmes questions pour les champs $\xi(a, t) = g(a + ct)$, où $g(X)$ est une fonction deux fois dérivable.

On a $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(a, t) = c^2 g''(a + ct)$ et $\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2}(a, t) = g''(a + ct)$. L'équation de D'Alembert est donc bien vérifiée. Le signal se propage à la vitesse $-c$.

9) Vérifier la relation entre k et ω pour que le champ de déplacement $\xi(a, t) = A \cos(ka) \cos(\omega t)$, où A est une amplitude arbitraire, soit solution de l'équation de D'Alembert.

On a $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi$ et $\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} = -k^2 \xi$. L'équation de D'Alembert est donc vérifiée lorsque $\omega^2 = k^2 c^2$.

Chapitre 3

Solutions de l'équation de D'Alembert

Sommaire

1	Équation de D'Alembert	28
2	Solutions générales en milieu infini	29
3	Conditions initiales	30
4	Ondes progressives monochromatiques	30
5	Ondes stationnaires	31
6	Conditions aux limites et ondes stationnaires . . .	32
7	Conclusion	33

Introduction

L'équation de D'Alembert, également appelée "équation des ondes 1D" décrit les ondes unidimensionnelles (1D) de nombreux systèmes physiques : vibrations longitudinales d'un barreau élastique ou d'un ressort, vibrations transversales d'une corde tendue, ondes sonores dans un tube, etc. On s'intéresse ici aux solutions générales de cette équation aux dérivées partielles en espace et en temps, qui fait intervenir une vitesse c . On vérifie que la superposition d'un signal quelconque se propageant vers la droite, à la vitesse c , et d'un autre signal quelconque se propageant vers la gauche, à la vitesse $-c$, est une solution de cette équation linéaire. On admet que toutes les solutions sont de cette forme. En milieu infini, les conditions initiales sur la valeur du champ spatio-temporel et de sa dérivée par rapport à l'espace suffisent à déterminer une solution unique que l'on peut exprimer à l'aide des profils initiaux. Une onde progressive monochromatique (OPM) est solution de l'équation de D'Alembert si sa pulsation est le produit de son nombre d'onde et de la vitesse c . La superposition de deux OPM de même amplitude et de même nombre d'onde est une solution stationnaire avec des noeuds et de ventres dont on peut déterminer les positions. En présence de conditions aux limites sur un intervalle fini, de types Dirichlet ou Neumann, les solutions appartiennent à une famille de d'onde stationnaires dénombrables que l'on peut expliciter.

1 Équation de D'Alembert

L'équation de D'Alembert, également appelée "équation des ondes 1D", s'applique à un champ unidimensionnel (1D) $\psi(x, t)$ où x est l'espace et t le temps (champ spatio-temporel). Elle s'écrit

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

où $c > 0$ a la dimension d'une vitesse.

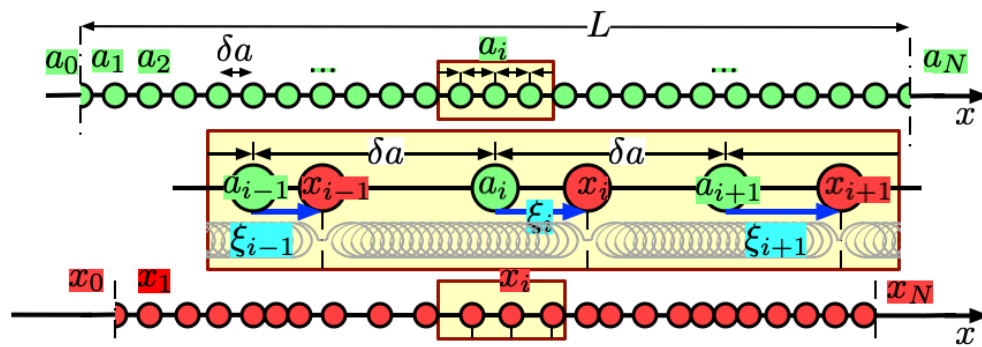


FIGURE 3.1 – Le passage au continu d'une chaîne masses-ressorts conduit à l'équation de D'Alembert pour le déplacement $\xi(a, t)$ des masses.

Cette équation peut s'obtenir par passage au continu pour la modélisation de nombreux systèmes physiques :

- Les vibrations longitudinales d'un barreau élastique ou d'un ressort d'axe Ox : dans ce cas, $\psi(x, t)$ est le champ de déplacement $\xi(x, t)$.

- Les vibrations transversales d'une corde tendue d'axe Ox : dans ce cas, $\psi(x, t)$ est le champ de déplacement $y(x, t)$ dans une direction orthogonale à l'axe.
- Les vibrations longitudinales d'un gaz compressible dans un tube : dans ce cas, $\psi(x, t)$ est le champ de pression $p(x, t)$
- Les oscillations électriques d'un coaxial : dans ce cas, $\psi(x, t)$ est le courant $I(x, t)$ dans l'âme.

2 Solutions générales en milieu infini

L'équation de D'Alembert peut se mettre sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

On vérifie que $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = 0$ si $\psi(x, t) = f(x - ct)$ où $f(X)$ est une fonction deux fois dérivable quelconque.

De même $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = 0$ si $\psi(x, t) = g(x + ct)$ où $g(X)$ est une fonction deux fois dérivable quelconque.

En reportant dans l'équation (3.2), ces deux expressions sont solutions de l'équation de D'Alembert. Il en va de même de leur superposition, l'équation étant linéaire. On admet ici que la forme générale des solutions de l'équation de D'Alembert s'écrit

$$\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (3.3)$$

où $f(X)$ et $g(X)$ sont deux fonctions dérivables quelconques. La démonstration peut s'effectuer en prouvant la forme générale des solutions des équations aux dérivées partielles $\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm c \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = 0$.

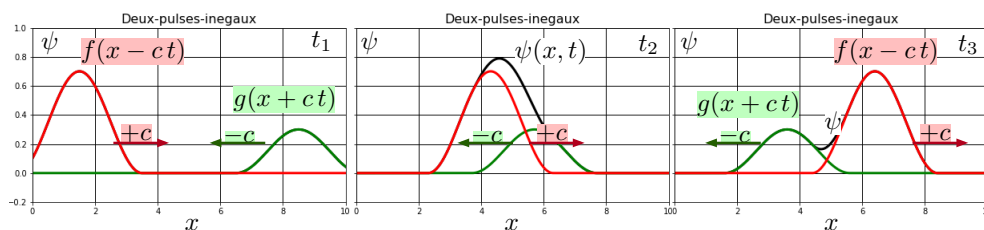


FIGURE 3.2 – Superposition $\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ de deux pulses se propageant en sens contraires, pour plusieurs instants t_1 , t_2 et t_3 .

La figure 3.2 représente la superposition de deux pulses se propageant en sens opposés avec les vitesses respectives $\pm c$.

3 Conditions initiales

On suppose connues les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ qui décrivent les conditions initiales à $t = 0$ de l'équation de D'Alembert :

$$\psi(x, 0) = u(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = v(x). \quad (3.4)$$

L'unique solution issue de ces conditions initiales s'écrit

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} [u(x - ct) + u(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(s) ds. \quad (3.5)$$

On peut tout d'abord vérifier que ce champ est bien solution de l'équation de D'Alembert et qu'il vérifie les conditions aux limites. Comme l'équation est linéaire, c'est l'unique solution.

Une autre démonstration consiste à chercher des solutions de la forme $\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$. Les conditions initiales conduisent à $f(x) + g(x) = u(x)$ et $-c f'(x) + c g'(x) = v(x)$ d'où $-c f(x) + c g(x) = \int_0^x v(s) ds + C$ où C est une constante. On en déduit $f(X) = \frac{1}{2} u(X) - \frac{1}{2c} \int_0^X v(s) ds - C$ et $g(X) = \frac{1}{2} u(X) + \frac{1}{2c} \int_0^X v(s) ds + C$. La constante d'intégration C disparaît dans l'expression $\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ et on retrouve bien l'expression de l'équation (3.5).

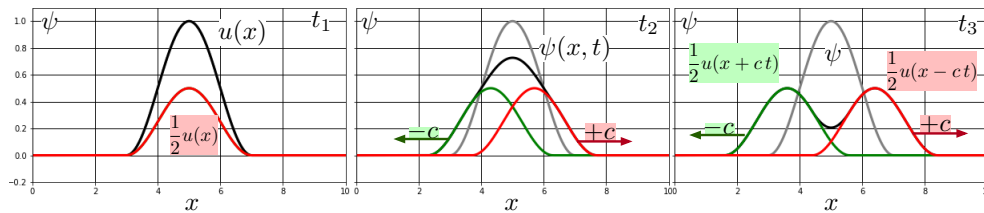


FIGURE 3.3 – Solution $\psi(x, t) = \frac{1}{2} u(x - ct) + \frac{1}{2} u(x + ct)$ dans le cas $v(x) = 0$, pour plusieurs instants t_1 , t_2 et t_3 .

Dans le cas particulier où $v(x) = 0$, la solution est $\psi(x, t) = \frac{1}{2} u(x - ct) + \frac{1}{2} u(x + ct)$, comme représenté sur la figure 3.3.

4 Ondes progressives monochromatiques

Une onde progressive monochromatique (OPM) est définie par l'expression

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi), \quad (3.6)$$

où A est l'amplitude, k le nombre d'onde, ω la pulsation et φ une phase. La période temporelle de cette OPM est $T = 2\pi/\omega$ et la longueur d'onde (période spatiale) est $\lambda = 2\pi/k$. On note $f = 1/T$ la fréquence.

On vérifie que cet OPM est solution de l'équation de D'Alembert pour A non nul, si et seulement si $\omega = \pm kc$. Si $\omega = kc$, on peut exprimer cette solution sous la forme générale avec $f(X) = A \cos(kX + \varphi)$ et $g(X) = 0$:

$$\psi(x, t) = f(x - ct) = A \cos[k(x - ct) + \varphi]. \quad (3.7)$$

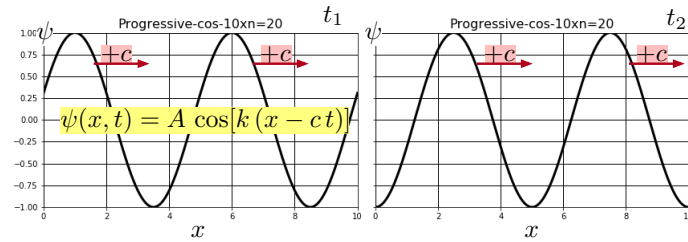


FIGURE 3.4 – Onde progressive monochromatique (OPM) pour deux instants successifs t_1 et t_2 .

On définit la notation complexe d’une OPM par

$$\underline{\psi} = A e^{i\omega t - ikx - i\varphi} = A [\cos(\omega t - kx - \varphi) + i \sin(\omega t - kx - \varphi)] , \quad (3.8)$$

de sorte que $\psi = \Re(\underline{\psi}) = A \cos(\omega t - kx - \varphi) = A \cos(kx - \omega t + \varphi)$.

5 Ondes stationnaires

La superposition de deux ondes progressives monochromatiques (OPM) de même amplitude A et de même nombre d’onde k , se propageant aux vitesses respectives $+c$ et $-c$, est une onde stationnaire de la forme

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + A \cos(kx + \omega t) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t) , \quad (3.9)$$

avec $\omega = kc$. On a utilisé la formule trigonométrique $\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2}\right) \cos \left(\frac{p-q}{2}\right)$. Dans le cas général, les éventuelles phases des deux OPM peuvent être ramenées à zéro par changement des origines du temps et de l’espace.

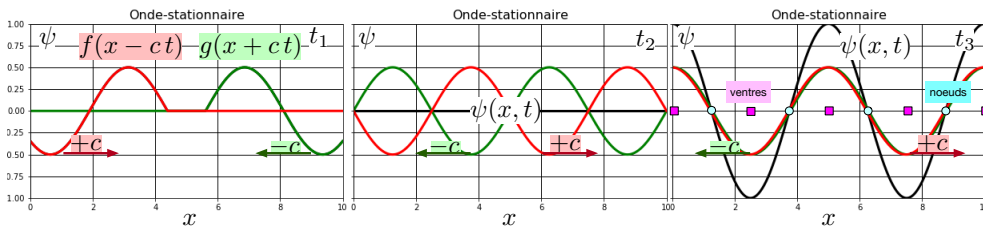


FIGURE 3.5 – Illustration de la décomposition d’une onde stationnaire comme résultant de la superposition deux signaux amenant des ondes progressives monochromatiques. Temps t_1 avant la rencontre des signaux. Temps t_2 avec interférences destructives : $\psi = 0$. Temps t_3 avec interférences constructives : noeuds et ventres visibles.

Cette expression permet de déterminer la position des noeuds et des ventres :

- Ventres en $x_m = m \pi/k$ avec m entier, tels que $\psi(x_m, t) = 2A \cos(\omega t)$ pour tout temps t .
- **Noeuds** en $x_m = (m + \frac{1}{2}) \pi/k$ avec m entier, tels que $\psi(x_m, t) = 0$ pour tout temps t .

La superposition $\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi_-) + A \cos(kx + \omega t + \varphi_+)$ peut se calculer en notation complexe :

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x, t) &= A e^{i\omega t - ikx - i\varphi_-} + A e^{i\omega t + ikx + i\varphi_+} \\ &= A \left(e^{-ikx - i\frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}} + e^{ikx + i\frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}} \right) e^{i\omega t + i\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}}, \quad (3.10) \end{aligned}$$

ce qui conduit à $\psi(x, t) = 2A \cos\left(kx + \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}\right)$. On peut retrouver cette expression en utilisant la formule trigonométrique $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

6 Conditions aux limites et ondes stationnaires

L'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ sur un intervalle fini $[0, L]$ est souvent résolue avec les deux types de conditions aux limites homogènes suivantes :

- Conditions de Dirichlet : $\psi(0, t) = 0$ ou $\psi(L, t) = 0$ pour tout temps.
- Conditions de Neumann : $\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = 0$ ou $\frac{\partial \psi}{\partial x}(L, t) = 0$ pour tout temps.

On montre que les solutions de l'équation de D'Alembert avec ces types de conditions aux limites appartiennent aux familles d'ondes stationnaires suivantes :

- ondes en cosinus (figure 3.6) : $\psi(x, t) = A \cos(k_n x) \cos(\omega_n t)$,
- ondes en sinus (figure 3.7) : $\psi(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$,

avec $k_n = n\pi/L$ et $\omega_n = k_n c$ pour n entier ou demi-entier : $n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

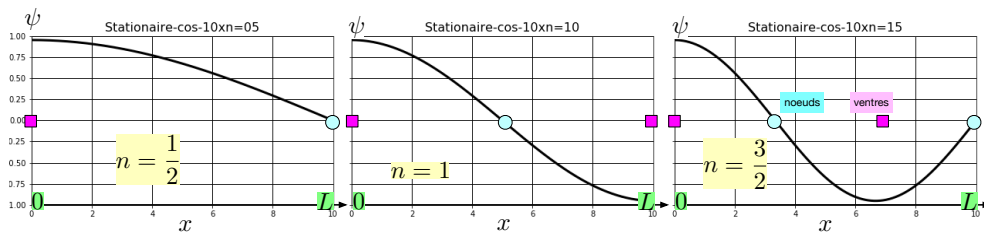


FIGURE 3.6 – Ondes stationnaires en cosinus $\psi(x, t) = A \cos(k_n x) \cos(\omega_n t)$ pour $n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$. L'extrémité $x = 0$ est toujours un ventre. L'extrémité $x = L$ est un noeud pour n demi-entier et un ventre pour n entier.

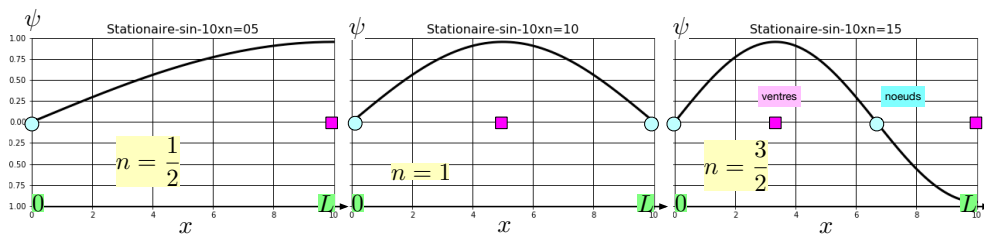


FIGURE 3.7 – Ondes stationnaires en sinus $\psi(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$ pour $n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$. L'extrémité $x = 0$ est toujours un noeud. L'extrémité $x = L$ est un ventre pour n demi-entier et un noeud pour n entier.

La superposition d'ondes stationnaires d'amplitudes quelconques satisfaisant un jeu de conditions aux limites donné, est une solution de l'équation de D'Alembert.

7 Conclusion

L'équation de D'Alembert décrit la superposition de signaux de formes quelconques se propageant vers la droite ou vers la gauche avec une vitesse égale à c en valeur absolue. La forme de ces signaux est déterminée par les conditions initiales sur le champ et sa dérivée par rapport au temps. Le cas particulier des ondes progressives monochromatiques (OPM) fait intervenir la notation complexe avec des exponentielles complexes. Les ondes stationnaires sont la superposition d'ondes progressives monochromatiques d'égale amplitude et d'égal nombre d'onde, se propageant dans des sens contraires aux vitesses $\pm c$. Les noeuds et les ventres de ces ondes sont répartis de manière périodique le long de l'axe Ox . L'imposition de conditions aux limites aux bornes d'un intervalle de longueur finie restreint les solutions à une famille dénombrable d'ondes stationnaires.

FORMULAIRE

Solutions générales de l'équation de D'Alembert

$$\begin{aligned} \text{Équation de D'Alembert : } & \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \\ \text{Solution générale : } & \psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \\ \text{où } f(X) \text{ et } g(X) & \text{ sont des fonction quelconques deux fois dérivables. } \quad (\mathbf{3.11}) \end{aligned}$$

Problème aux conditions initiales

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) = u(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = v(x) & \quad (\mathbf{3.12}) \\ \Rightarrow \psi(x, t) = \frac{1}{2} [u(x - ct) + u(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(s) ds. & \quad (\mathbf{3.13}) \end{aligned}$$

Ondes progressives monochromatiques

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi). \quad (\mathbf{3.14})$$

Amplitude : A . Nombre d'onde : k . Pulsation : ω . Phase : φ .

Période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Fréquence $f = \frac{1}{T}$.

Solution de l'équation de l'équation de D'Alembert ssi $\omega = \pm k c$.

Notation complexe avec $\psi = \Re(\underline{\psi})$:

$$\underline{\psi} = A e^{i\omega t - ikx - i\varphi} = A [\cos(\omega t - kx - \varphi) + i \sin(\omega t - kx - \varphi)] , \quad (3.15)$$

Ondes stationnaires

Superposition de deux OPM :

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + A \cos(kx + \omega t) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t) , \quad (3.16)$$

Solutions de l'équation de D'Alembert ssi $\omega = \pm kc$.

Famille dénombrable d'ondes stationnaires avec $k_n = n\pi/L$ et $\omega_n = k_n c$ pour n entier ou demi-entier : $n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$:

$$\begin{aligned} \text{Ondes en cosinus :} & \quad \psi(x, t) = A \cos(k_n x) \cos(\omega_n t) \\ \text{Ondes en sinus :} & \quad \psi(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

EXERCICES

EXERCICE 3.1 Solutions de l'équation de D'Alembert

On s'intéresse ici à des solutions de l'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$.

- 1) Quelle est la dimension de la constante $c > 0$? Que représente-t-elle?

| La constante est la valeur absolue de la vitesse des signaux décrit par l'équation de D'Alembert. C'est la vitesse de propagation des ondes.

- 2) Montrer que $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Même question pour $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

| Il suffit de développer en remarquant que les opérateurs de dérivation commutent.

- 3) On suppose que $\psi(x, t)$ vérifie $\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$. On considère la trajectoire $x(t) = a + ct$ où a est une abscisse quelconque. On fabrique alors la fonction $h(t) = \psi[x(t), t]$. Montrer que $h(t)$ est une fonction constante. En déduire que $\psi(x, t) = f(x - ct)$ et exprimer la fonction $f(X)$ en supposant que $\psi(x, 0) = u(x)$.

| On calcule $h'(t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}[x(t), t] + x'(t) \frac{\partial \psi}{\partial x}[x(t), t] = \frac{\partial \psi}{\partial t}[x(t), t] + c \frac{\partial \psi}{\partial x}[x(t), t] = 0$. On en déduit que $h(t)$ est une constante, qui vaut $h = \psi(a, 0) = u(a)$. Comme $\psi(a + ct, t) = u(a)$, pour tout a et tout t , on en déduit $\psi(x, t) = u(x - ct)$ par changement de variable. On a donc $f(X) = u(X)$.

- 4) On suppose que $\psi(x, t) = f(x - ct)$ avec $f(X) = A \exp\left(-\frac{X^2}{2\sigma^2}\right)$. Dessiner le profil spatial de $\psi(x, t)$ pour plusieurs temps successifs et indiquer le

sens de propagation.

Le signal est une gaussienne d'écart type σ (en forme de cloche) qui se propage vers la droite à la vitesse c .

- 5) On considère les conditions initiales $\psi(x, 0) = u(x)$ et $\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = v(x)$ avec $u(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ et $v(x) = 0$. Calculer la solution de l'équation de D'Alembert issue de ces conditions initiales. Tracer les solutions pour plusieurs temps successifs et indiquer le sens de propagation des signaux.

On a $\psi(x, t) = \frac{1}{2} u(x - ct) + \frac{1}{2} u(x + ct)$. C'est la superposition de deux gaussiennes se propageant en sens contraires.

- 6) Déterminer la notation complexe de l'onde progressive monochromatique $\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$.

On a $\underline{\psi}(x, t) = A i e^{i\omega t - ikx} = A i [\cos(\omega t - kx) + i \sin(\omega t - kx)]$.

- 7) Déterminer la position des noeuds de l'onde stationnaire $\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t)$.

En utilisant la formule trigonométrique $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, on a $\psi(x, t) = -2A \sin(kx) \cos(\omega t)$. Les noeuds sont situés aux points $x_m = m\pi/k$ pour m entier. **Une autre démonstration** consiste à écrire $\underline{\psi} = A i e^{i\omega t - ikx} - A i e^{i\omega t + ikx} = A i e^{i\omega t} [-2i \sin(kx)] = 2A e^{i\omega t} \sin(kx)$ et poser $\psi = \Re(\underline{\psi})$.

- 8) On cherche les solutions de l'équation de D'Alembert sur l'intervalle $[0, L]$ avec les conditions aux limites $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$. Décrire l'ensemble des solutions.

En se référant à la famille des ondes stationnaires du cours, les solutions sont de la forme $\psi(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi)$ où A est une amplitude arbitraire, φ une phase arbitraire, $k_n = n\pi/L$ avec n entier et $\omega_n = k_n c$. **Toute solution se décompose sur la base des solutions stationnaires.**

- g) Même question avec les conditions aux limites $\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = 0$ et $\psi(L, t) = 0$.

En se référant à la famille des ondes stationnaires du cours, les solutions sont de la forme $\psi(x, t) = A \cos(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi)$ où A est une amplitude arbitraire, φ une phase arbitraire, $k_n = n\pi/L$ avec n demi-entier et $\omega_n = k_n c$.

Chapitre 4

Oscillations propres d'une corde tendue

Sommaire

1	Discrétisation de la dynamique d'une corde tendue	38
2	Principe fondamental	38
3	Passage au continu et équation de D'Alembert . . .	39
4	Solutions stationnaire de l'équation de D'Alembert	40
5	Modes propres pour des extrémités fixes	40
6	Modes propres avec une extrémité libre	41
7	Expérience de la corde de Melde	42
8	Conclusion	43

Introduction

Les petites oscillations d'une corde tendue, comme les cordes de piano, de guitare ou de violon, peuvent être modélisées par des mouvements transversaux avec une tension de module constant. Seul le petit angle que fait cette tension avec l'axe de la corde varie. L'application du principe fondamental à des petits tronçons de corde fait intervenir la masse linéique de la corde. Dans la limite du continu, le quotient de la tension et de cette masse linéique est égale au carré de la vitesse de propagation des ondes, décrites par l'équation de D'Alembert. Lorsque les deux extrémités de la corde sont fixes, les ondes stationnaires forment une famille discrète que l'on appelle "modes propres d'oscillations". Lorsqu'une extrémité est libre de glisser sans frottement le long d'un axe transverse, les ondes stationnaires forment une autre famille de modes propres. L'expérience de la corde de Melde consiste à fixer une extrémité et à imposer un déplacement sinusoïdal à l'autre extrémité. L'amplitude de réponse des oscillations de la corde tend vers l'infini lorsque la pulsation du forçage s'approche des pulsations propres de la corde à deux extrémités fixes.

1 Discrétisation de la dynamique d'une corde tendue

On discrétise une corde d'axe Ox , de longueur L et de tension T en la découpant en $N - 1$ tronçons de longueur $\delta x = L/N$, d'abscisses x_i pour $i = 1, N - 1$ et de masse $\delta m = m/N$ où m est la masse de la corde. Les tronçons d'abscisses x_0 et x_N , situés aux extrémités, sont de longueur $\delta x/2$ et de masse $\delta m/2$ (figure 4.1).

On suppose que les oscillations sont petites de sorte que le module de la tension peut être considéré constant et que l'angle dont elle s'écarte de l'axe Ox est petit. On note $\theta_{i+\frac{1}{2}}$ pour $i = 0, N - 1$ cet angle aux points intermédiaires $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$. En notant y_i le déplacement de la corde en x_i , l'hypothèse d'angles petits permet d'écrire :

$$\sin \theta_{i+\frac{1}{2}} \sim \theta_{i+\frac{1}{2}} \sim \tan \theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\delta x} . \quad (4.1)$$

2 Principe fondamental

On note $\mu = m/L$ la masse linéique de la corde de sorte que $\delta m = \mu \delta x$. Le principe fondamental de la dynamique, appliqué aux tronçons $i = 1, N - 1$ et projeté sur l'axe Oy , s'écrit

$$\delta m \ddot{y}_i = T \sin \theta_{i+\frac{1}{2}} - T \sin \theta_{i-\frac{1}{2}} . \quad (4.2)$$

La projection du principe fondamental sur l'axe Ox permet de vérifier que les abscisses x_i sont immobiles en approximant les cosinus des angles $\theta_{i+\frac{1}{2}}$ par un, sous l'hypothèse des petites oscillations. Cette hypothèse permet également d'approximer les sinus de ces angles par leurs valeurs, ce qui conduit à :

$$\mu \ddot{y}_i = T \frac{\theta_{i+\frac{1}{2}} - \theta_{i-\frac{1}{2}}}{\delta x} . \quad (4.3)$$

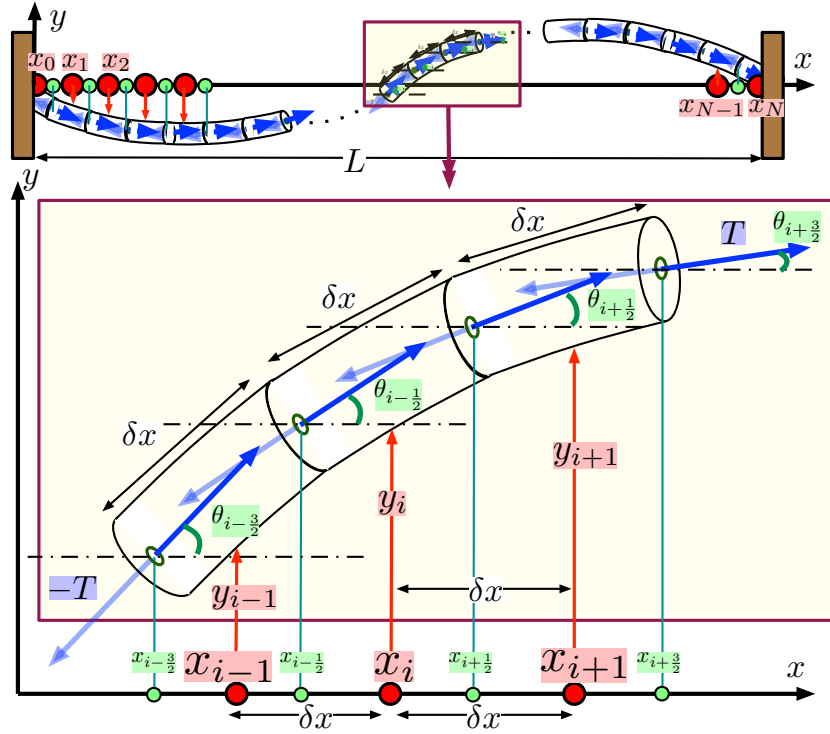


FIGURE 4.1 – Discretisation de la déformation d'une corde tendue.

Les approximations $\theta_{i+\frac{1}{2}} \sim \tan \theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+1}-y_i}{\delta x}$ et $\theta_{i-\frac{1}{2}} \sim \tan \theta_{i-\frac{1}{2}} = \frac{y_i-y_{i-1}}{\delta x}$ conduisent à l'équation :

$$\ddot{y}_i = c^2 \frac{y_{i+1} - 2y_i + 2y_{i-1}}{\delta x^2} \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{pour } i = 1, N-1. \quad (4.4)$$

3 Passage au continu et équation de D'Alembert

Dans la limite où $\delta x \rightarrow 0$, on considère le champ de déplacement continu $y(x, t)$ par extrapolation des valeurs discrètes en posant $y(x_i, t) = y_i(t)$. On peut alors écrire les développements limités suivants :

$$\begin{cases} y_{i+1}(t) = y(x_i + \delta x, t) = y(x_i, t) + \frac{\partial y}{\partial x}(x_i, t) \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_i, t) \delta x^2 + O(\delta x^3) \\ y_{i-1}(t) = y(x_i - \delta x, t) = y(x_i, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x_i, t) \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_i, t) \delta x^2 + O(\delta x^3) \end{cases} \quad (4.5)$$

En reportant dans l'équation du mouvement, on obtient

$$\ddot{y}_i(t) = c^2 \frac{y_{i+1}(t) - 2y_i(t) + y_{i-1}(t)}{\delta x^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_i, t) + O(\delta x). \quad (4.6)$$

Dans la limite $\delta x \rightarrow 0$, on obtient l'équation de D'Alembert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t). \quad (4.7)$$

On peut retrouver ce résultat par passage à la limite du continu des deux

équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{y}_i(t) = c^2 \frac{\theta_{i+\frac{1}{2}}(t) - \theta_{i-\frac{1}{2}}(t)}{\delta x} & \xrightarrow{\delta x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t), \\ \theta_{i+\frac{1}{2}}(t) = \frac{y_{i+1}(t) - y_i(t)}{\delta x} & \xrightarrow{\delta x \rightarrow 0} \theta(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \end{cases}, \quad (4.8)$$

et en remplaçant l'expression du champ continu $\theta(x, t)$ dans la première équation aux dérivées partielles.

4 Solutions stationnaire de l'équation de D'Alembert

On cherche des solutions stationnaires de l'équation $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ sous la forme $y(x, t) = F(x) G(t)$. En reportant dans l'équation on obtient

$$F(x) G''(t) = c^2 F''(x) G(t) \implies \frac{G''}{G}(t) = c^2 \frac{F''}{F}(x) = \kappa, \quad (4.9)$$

où κ est une constante, seule façon d'obtenir l'égalité entre une fonction qui ne dépend que du temps t et d'une fonction qui ne dépend que de l'espace x .

Le cas $\kappa = \sigma^2 > 0$ conduit aux fonctions $F(x) = F_+ e^{\sigma x/c} + F_- e^{-\sigma x/c}$ et $G(t) = G_+ e^{\sigma t} + G_- e^{-\sigma t}$, ce qui n'a pas d'intérêt ici.

Le cas physique $\kappa = -\omega^2 < 0$ conduit aux solutions :

$$F(x) = F_m \cos(kx + \varphi_F) \quad \text{et} \quad G(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi_G) \quad (4.10)$$

avec $\omega = kc$, où F_m et G_m sont des amplitudes arbitraires et φ_F et φ_G des phases arbitraires. Les solutions stationnaires de l'équation de D'Alembert sont donc de la forme

$$y(x, t) = A \cos(kx + \varphi_F) \cos(\omega t + \varphi_G) \quad \text{avec} \quad \omega = kc, \quad (4.11)$$

où A est une amplitude arbitraire et φ_F et φ_G des phases arbitraires.

5 Modes propres pour des extrémités fixes

On suppose ici que les extrémités de la corde, de longueur L , de tension T et de masse m , sont fixes. Les petites oscillations sont donc régies par l'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ avec $c = \sqrt{T/\mu}$, où $\mu = m/L$ est la masse linéique, avec les conditions limites $y(0, t) = y(L, t) = 0$ pour tout temps t . Les solutions stationnaires forment une famille dénombrable qui s'écrit :

$$y_n(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (4.12)$$

avec $k_n = n \frac{\pi}{L}$ et $\omega_n = ck_n$ pour n entier, où A est une amplitude arbitraire et φ_n une phase arbitraire. La figure 4.2 représente le tracé de $y_n(x, t)$ pour différentes valeurs de n et de t . On montre que toute solution $y(x, t)$ de l'équation de D'Alembert avec ces conditions aux limites se décompose de manière unique sur la base des modes propres sous la forme $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x, t)$.

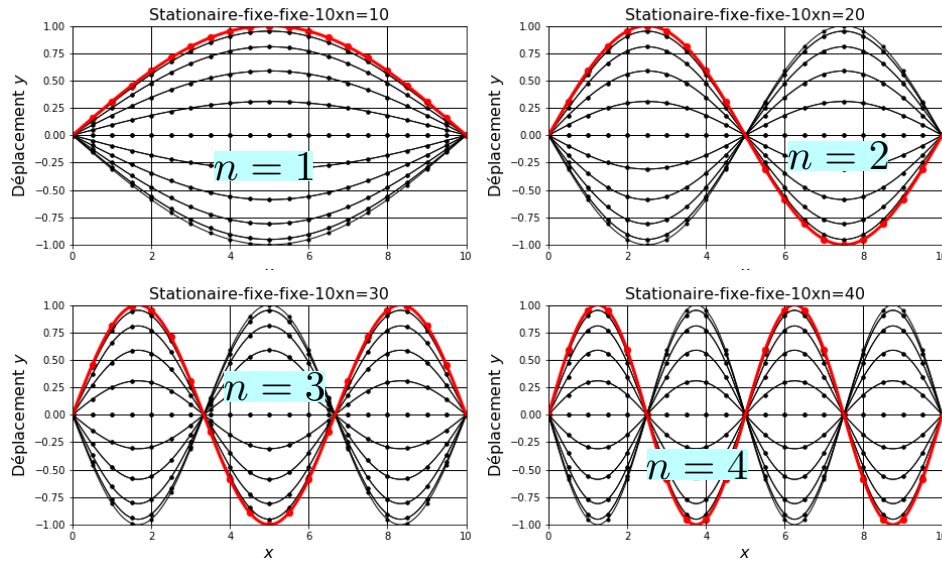


FIGURE 4.2 – Modes propres d’oscillations $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ dans le cas des extrémités fixes. En rouge : $y_n(x, 3T_n/4)$ pour $T_n = 2\pi/\omega_n$.

6 Modes propres avec une extrémité libre

On suppose maintenant que l’extrémité située en $x = L$ est libre de glisser sans frottement le long de l’axe Ly parallèle à l’axe Oy et passant par le point $(x, y) = (L, 0)$. La tension T est alors perpendiculaire à Ly , donc parallèle à l’axe Ox . On peut donc écrire $\theta_{N-\frac{1}{2}} = \frac{y_N - y_{N-1}}{\delta x} = 0$. Par passage à la limite $\delta x \rightarrow 0$, la conditions aux limites libre s’écrit $\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$ pour tout temps t .

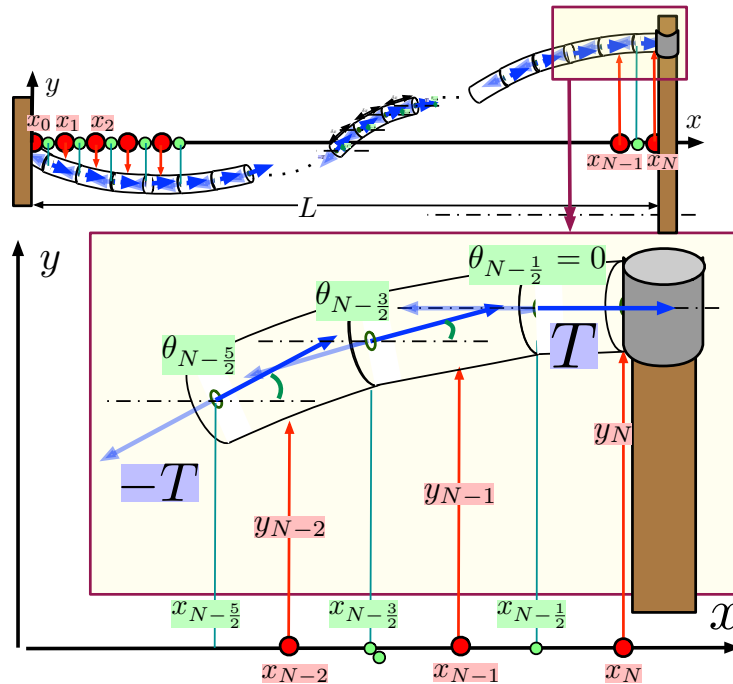


FIGURE 4.3 – La tension est perpendiculaire à l’axe Oy .

La résolution de l'équation de D'Alembert avec les conditions aux limites $y(0, t) = 0$ et $\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$ pour tout temps t conduit aux solutions

$$y_n(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (4.13)$$

avec $k_n = n \frac{\pi}{L}$ et $\omega_n = c k_n$ pour n **demi-entier**, où A est une amplitude arbitraire et φ_n une phase arbitraire. La figure 4.4 représente le tracé de $y_n(x, t)$ pour différentes valeurs de n et de t . On montre que toute solution $y(x, t)$ de l'équation de D'Alembert avec ces conditions aux limites se décompose de manière unique sur la base des modes propres : $y(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{\frac{1}{2}+p} y_{\frac{1}{2}+p}(x, t)$.

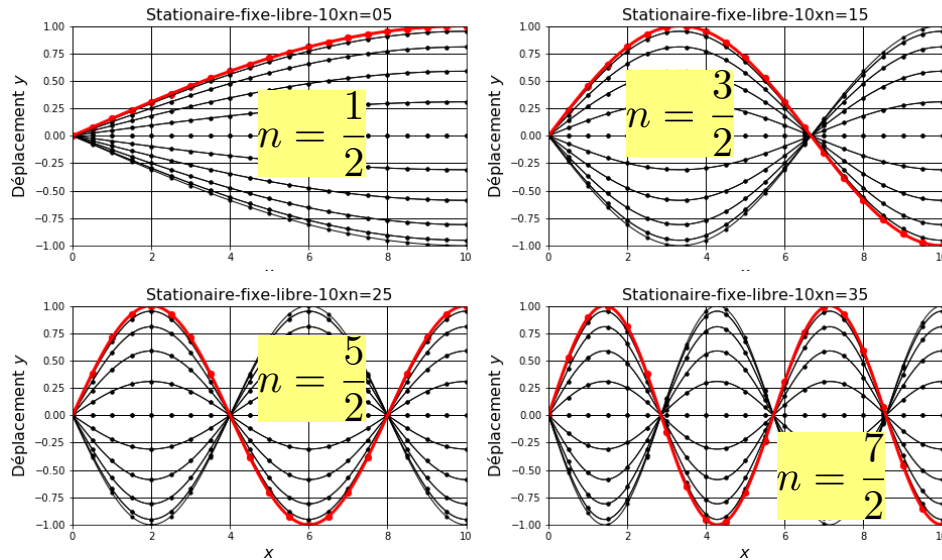


FIGURE 4.4 – Modes propres d'oscillations $n \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\}$ dans le cas d'une extrémité libre. En rouge : $y_n(x, 3T_n/4)$ pour $T_n = 2\pi/\omega_n$.

7 Expérience de la corde de Melde

On suppose ici que le déplacement d'une extrémité est contraint par un oscillateur d'amplitude A_e et de pulsation ω_e . La réponse est donc solution de l'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ avec les conditions aux limites :

$$y(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad y(L, t) = A_e \cos(\omega_e t) \quad \text{pour tout temps } t. \quad (4.14)$$

Comme $x = 0$ est un noeud, la solution s'écrit $y(x, t) = A \sin(k_e x) \cos(\omega_e t)$ avec $k_e = \omega_e/c$ pour satisfaire l'équation de D'Alembert et $A \sin(k_e L) = A_e$ pour satisfaire la condition aux limites en $x = L$.

On note $X = \omega/\omega_1$ où $\omega_1 = \pi c/L$ est la pulsation du mode propre $n = 1$ des oscillations de la corde dans le cas où les deux extrémités sont fixes. En notant $Y = A/A_e$ le rapport de l'amplitude de l'onde stationnaire sur l'amplitude de forçage, la courbe de réponse de l'expérience de la corde Melde est donnée par $Y = 1/\sin(\pi X)$ (figure 4.5). La corde entre en résonance pour $\omega_e = n\omega_1 = \omega_n$ avec n entier. Ces valeurs de résonance $X = n$ sont les pulsations des modes propres d'oscillation de la corde avec extrémités fixées. La figure 4.6 représente les solutions stationnaires obtenues dans le voisinage de la résonance $X = 2$.

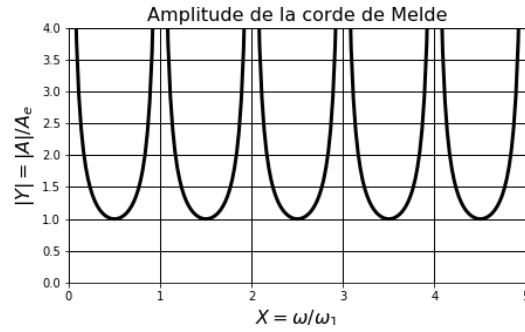


FIGURE 4.5 – Fonction de réponse $Y = 1/\sin(\pi X)$.

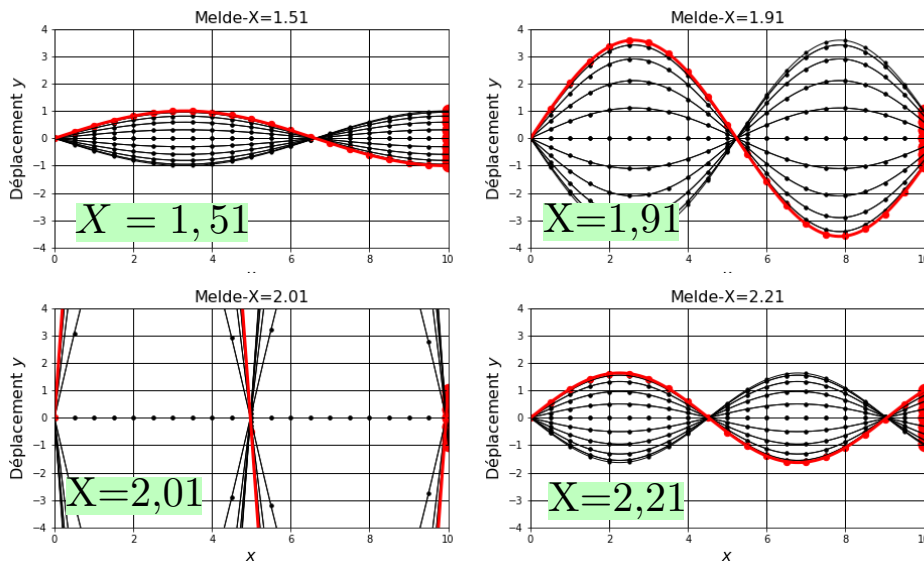


FIGURE 4.6 – Solutions stationnaires pour $A_e = 1$ et différentes valeurs de X .

8 Conclusion

En discrétisant une corde tendue en petits tronçons soumis à une tension de module constant et d'angles petits par rapport à l'axe, on a modélisé ses petites oscillations par l'équation de D'Alembert, par passage au continu. Dans le cas où les extrémités sont fixes, les solutions stationnaires forment une famille discrète dont les pulsations sont des multiples de la pulsation du mode fondamental, qui comprend un ventre au milieu de la corde. Cette famille, aux amplitudes arbitraires, forme une base des solutions de l'équation de D'Alembert avec extrémités fixes. Il en va de même pour le cas où une des extrémités est fixe et l'autre libre, les pulsations propres étant des multiples demi-entier de cette pulsation de base. L'expérience de la corde de Melde, qui consiste à imposer un oscillation harmonique pour le déplacement d'une extrémité en maintenant l'autre extrémité fixe, montre que la corde entre en résonance lorsque la pulsation de forçage est une pulsation propre des oscillations avec extrémités fixes.

FORMULAIRE

Petites oscillations du modèle discret

Le mouvement des petits tronçons de corde tendue est régi par le système :

$$\ddot{y}_i = c^2 \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\delta x^2} \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{pour } i = 1, N-1. \quad (4.15)$$

Solutions stationnaires de l'équation de D'Alembert

Équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (4.16)$$

Conditions aux limites rigides : $y(0, t) = y(L, t) = 0$:

$$y_n(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad \text{pour } n \text{ entier} \quad (4.17)$$

avec $k_n = n \frac{\pi}{L}$ et $\omega_n = c k_n = n \frac{\pi c}{L}$. Toute solution se décompose en :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x, t). \quad (4.18)$$

Conditions aux limites mixtes : $y(0, t) = 0$ et $\frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$:

$$y_n(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad \text{pour } n \text{ demi-entier} \quad (4.19)$$

avec $k_n = n \frac{\pi}{L}$ et $\omega_n = c k_n = n \frac{\pi c}{L}$. Toute solution se décompose en :

$$y(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{\frac{1}{2}+p} y_{\frac{1}{2}+p}(x, t). \quad (4.20)$$

Expérience de la corde de Melde

Conditions aux limites mixtes : $y(0, t) = 0$ et $y(L, t) = A_e \cos(\omega_e t)$:

$$y(x, t) = A \sin(k_e x) \cos(\omega_e t) \quad \text{avec } Y = \frac{A}{A_e} = \frac{1}{\sin(\pi X)} \quad (4.21)$$

et $X = \frac{\omega_e}{\omega_1}$ où $\omega_1 = \frac{\pi L}{c}$ et $k_e = \frac{\omega_e}{c}$. Résonance pour $X = n$ avec n entier.

EXERCICES

EXERCICE 4.1 Deux extrémités libres

On considère une corde tendue de longueur L , de tension T et de masse L . On suppose que ses deux extrémités, en $x = 0$ et $x = L$, glissent sans frottement le long d'un axe parallèle à Oy . Les oscillations de la corde sont régies par l'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

- 1) Exprimer la vitesse c en fonction des paramètres et écrire les conditions aux limites.

On a $c = \sqrt{T/\mu}$ où $\mu = m/L$ est la masse linéique de la corde. Les conditions aux limites sont $\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$ pour tout temps t .

- 2) Montrer que les solutions stationnaires sont de la forme $y_n(x, t) = A \cos(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ où A est une amplitude arbitraire, φ_n une phase arbitraire, n un entier positif et k_n et ω_n des grandeurs que l'on exprimera. Comment nomme-t-on cette famille de solutions ?

Comme $\frac{\partial y_n}{\partial x}(x, t) = -A k_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$, ces champs de déplacement vérifient les conditions aux limites $\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$ pour $k_n = n\pi/L$ avec n entier. Pour satisfaire l'équation de D'Alembert, il faut imposer $\omega_n = k_n c = n\pi c/L$. Ces solutions sont les modes propres d'oscillation de la corde avec conditions aux limites libres.

- 3) Dessiner les profils $y_1(x, t)$ pour différents temps t . Combien de noeuds et de ventres comporte cette solution stationnaire ?

Il y a deux ventres, situés aux extrémités et un noeud au milieu de la corde.

- 4) Même question pour $y_2(x, t)$, $y_3(x, t)$ et $y_4(x, t)$. Calculer le nombre de noeuds et de ventres pour n quelconque. Indiquer leur position.

La solution stationnaire $y_n(x, t)$ comporte $n + 1$ ventres, situés en $x = mL/n$ pour $m = 0, n$ et n noeuds, situés en $x = L/(2n) + mL/n$ pour $m = 0, n - 1$.

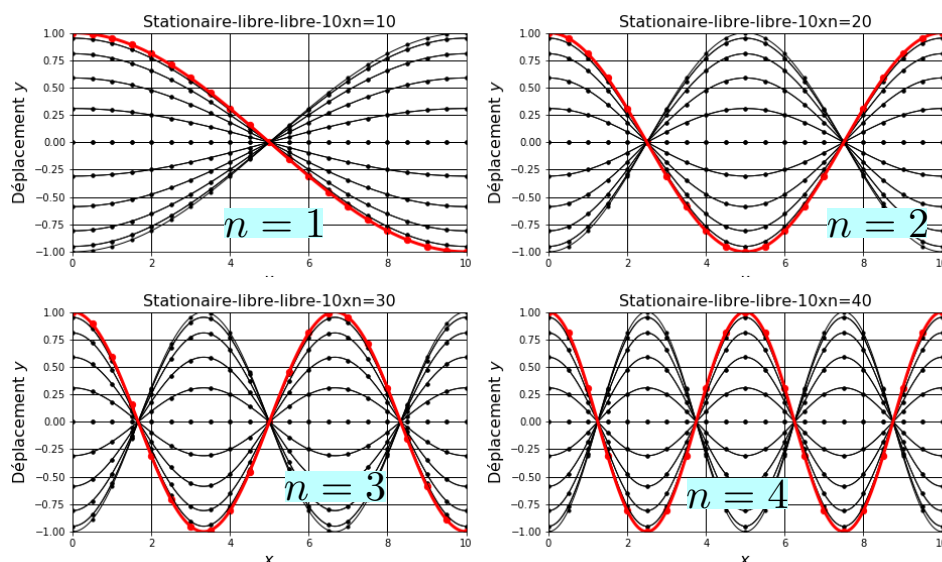


FIGURE 4.7 – Modes propres d'oscillations $n \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\}$ dans le cas de deux extrémité libre. En rouge : $y_n(x, 3T_n/4)$ pour $T_n = 2\pi/\omega_n$.

- 5) On considère la solution $y(x, t)$ telle que $y(x, 0) = y_0(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$ avec $y_0(x) = 2 A_0 \cos(2 k_1 x) \cos(k_1 x)$ et $k_1 = \pi/L$. Déterminer l'expression de cette solution.

On peut écrire $y_0(x) = A_0 \cos(3 k_1 x) + A_0 \cos(k_1 x)$ à l'aide de la formule trigonométrique $\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a + b) + \frac{1}{2} \cos(a - b)$. On en déduit $y(x, t) = A_0 \cos(k_3 x) \cos(\omega_3 t) + A_0 \cos(k_1 x) \cos(\omega_1 t)$ avec $k_3 = 3 k_1$, $\omega_1 = k_1 c$ et $\omega_3 = k_3 c$.

Chapitre 5

Réflexion et transmission des ondes sonores

Sommaire

1	Discrétisation du mouvement dans un tube	48
2	Équations du mouvement discrètes	49
3	Passage au continu	49
4	Équation de D'Alembert pour les ondes sonores . .	50
5	Vitesse du son	50
6	Débit associé à une onde sonore	51
7	Réflexion et transmission d'une onde sonore	52
8	Cas limites de réflexion et de transmission	53
9	Conclusion	53

Introduction

Les ondes sonores sont des oscillations des particules fluides d'un gaz compressible. Ces déplacements sont associés à des oscillations de pression, de masse volumique et de vitesse. Ce sont des ondes longitudinales dans la mesure où les déplacements et les vitesses sont orientés dans la direction de propagation de l'onde. On se restreint ici aux ondes sonores dans des tubes d'axe Ox . Les transformations sont supposées isentropiques (pas d'échange de chaleur). On se place dans le cadre des petites oscillations et on discrétise le fluide en petits tronçons pour lesquels on peut écrire la loi d'état linéarisée autour de l'équilibre, la loi de conservation de la masse et le principe fondamental de la dynamique. La limite du continu s'obtient en faisant tendre vers zéro la taille des petits tronçons, ce qui conduit à trois équations aux dérivées partielles en espace et en temps pour la vitesse et les fluctuations de pression et de masse volumique. En éliminant deux champs parmi les trois, ces ondes sonores sont décrites par l'équation de D'Alembert, dont les solutions sont des signaux qui se propagent sans déformation, à la vitesse du son, vers la gauche ou vers la droite. En présence d'une discontinuité de la section du tube, on peut calculer les coefficients de réflexion et de transmission d'une onde sonore à l'aide de la continuité de la pression et du débit.

1 Discrétisation du mouvement dans un tube

On considère les oscillations longitudinales des particules fluides d'un gaz compressible contenu dans un tube d'axe Ox . On découpe le fluide en petits tronçons dont les abscisses des sections qui les délimitent en l'absence de mouvement sont une suite de réels a_i tels que la longueur $a_{i+1} - a_i = \delta a$ est constante. En présence d'oscillations, les abscisses de ces extrémités deviennent $x_i(t) = a_i + \xi_i(t)$ où les $\xi_i(t)$ sont leurs déplacements (figure 5.1).

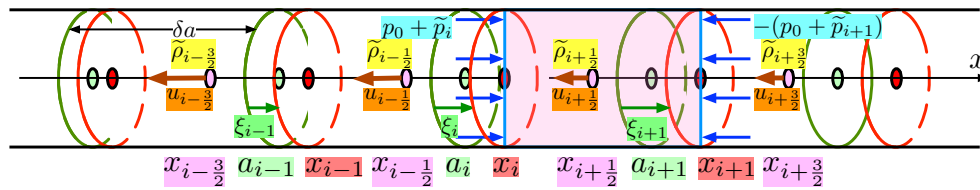


FIGURE 5.1 – Discrétisation du mouvement d'un gaz compressible.

La loi d'état du gaz s'écrit $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ où p est la pression, ρ la masse volumique et s l'entropie. En l'absence de mouvement, on suppose que $p = p_0$, $\rho = \rho_0$ et $s = s_0$ avec $p_0 = \mathcal{P}(\rho_0, s_0)$. On suppose que les oscillations sont isentropiques ($s = s_0$), ce qui correspond à une absence d'échange de chaleur. On note alors $p_i(t) = p_0 + \tilde{p}_i(t)$ la pression aux extrémités mobiles d'indices i . On note $x_{i+\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{2}[x_i(t) + x_{i+1}(t)]$ l'abscisse mobile du centre du tronçon compris entre les extrémités i et $i+1$ et on note $\rho_{i+\frac{1}{2}}(t) = \rho_0 + \tilde{\rho}_{i+\frac{1}{2}}(t)$ et $u_{i+\frac{1}{2}}(t) = \dot{x}_{i+\frac{1}{2}}(t)$ la **masse volumique** et la vitesse en ce centre.

2 Équations du mouvement discrètes

On suppose que les oscillations sont petites, c'est-à-dire $\tilde{p} \ll p_0$, $\tilde{\rho} \ll \rho_0$ et $u \ll \sqrt{p_0/\rho_0}$. On peut alors approximer la loi d'état $p_0 + \tilde{p} = \mathcal{P}(\rho_0 + \tilde{\rho}, s_0)$ par sa linéarisation autour de l'équilibre (p_0, ρ_0, s_0) qui s'écrit, dans la mesure où l'entropie s_0 reste constante :

$$\tilde{p} = c^2 \tilde{\rho} \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}(\rho_0, s_0). \quad (5.1)$$

La dérivée partielle de la pression par rapport à la masse volumique est toujours positive, en vertu du second principe de la thermodynamique (si une surpression provoquait une dilatation, le système serait instable).

La loi de conservation de la masse appliquée au tronçon compris entre $x_i(t)$ et $x_{i+1}(t)$ s'écrit $\rho_{i+\frac{1}{2}}(t)[x_{i+1}(t) - x_i(t)] S = \rho_0 \delta a S$ où S est la section du tube et $x_{i+1}(t) - x_i(t) = \delta a + \xi_{i+1}(t) - \xi_i(t)$. En simplifiant par S et en dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\rho_0 [u_{i+1}(t) - u_i(t)] + \delta a \dot{\tilde{\rho}}_{i+\frac{1}{2}}(t) = 0, \quad (5.2)$$

en ayant négligé le terme $\tilde{\rho}_{i+\frac{1}{2}}(t)[u_{i+1}(t) - u_i(t)] + \dot{\tilde{\rho}}_{i+\frac{1}{2}}(t)[\xi_{i+1}(t) - \xi_i(t)]$ devant les autres termes (hypothèse des petites oscillations).

Le principe fondamental appliqué à un tronçon de masse $\delta a [\rho_0 + \rho_{i+\frac{1}{2}}]$ S et d'accélération $\dot{u}_{i+\frac{1}{2}}$, soumis aux forces $[p_0 + \tilde{p}_i(t)] S$ et $-[p_0 + \tilde{p}_{i+1}(t)] S$ à ses extrémités, s'écrit $\delta a [\rho_0 + \tilde{\rho}_{i+\frac{1}{2}}] S \dot{u}_{i+\frac{1}{2}} = [p_0 + \tilde{p}_i(t)] S - [p_0 + \tilde{p}_{i+1}(t)] S$. En simplifiant par S et en négligeant le terme $\tilde{\rho}_{i+\frac{1}{2}} \dot{u}_{i+\frac{1}{2}}$ (hypothèse des petites oscillations), on obtient

$$\delta a \rho_0 \dot{u}_{i+\frac{1}{2}}(t) = \tilde{p}_i(t) - \tilde{p}_{i+1}(t). \quad (5.3)$$

3 Passage au continu

On s'intéresse maintenant à la limite $\delta a \rightarrow 0$, ce qui conduit à une description continue $u(a, t)$, $\tilde{\rho}(a, t)$ et $\tilde{p}(a, t)$ de la vitesse et des fluctuations de la masse volumique et de la pression par extrapolation des valeurs discrètes. La loi d'état linéarisée $\tilde{p}(a, t) = c^2 \tilde{\rho}(a, t)$ relie ainsi deux champs continus.

Pour toute fonction $f(a)$ obtenue en extrapolant les valeurs discrètes $f_i = f(a_i)$ aux abscisses a_i , on peut écrire :

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{\delta a} = \frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{\delta a} = \frac{f(a_i + \delta a) - f(a_i)}{\delta a} \xrightarrow{\delta a \rightarrow 0} f'(a_i), \quad (5.4)$$

Le passage à la limite $\delta a \rightarrow 0$ pour la conservation de la masse s'écrit alors

$$\dot{\tilde{\rho}}_{i+\frac{1}{2}}(t) = -\rho_0 \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{\delta a} \implies \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}(a, t) = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial a}(a, t) \quad (5.5)$$

tandis que le principe fondamental s'écrit

$$\rho_0 \dot{u}_{i+\frac{1}{2}}(t) = -\frac{\tilde{p}_{i+1}(t) - \tilde{p}_i(t)}{\delta a} \implies \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t}(a, t) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial a}(a, t). \quad (5.6)$$

4 Équation de D'Alembert pour les ondes sonores

En notant x au lieu de a la coordonnée spatiale, les petites oscillations isentropique d'un gaz compressible dans un tube sont modélisées par la loi d'état et les conservations de la masse et de la quantité de mouvement (principe fondamental) qui s'écrivent :

$$\tilde{p}(x, t) = c^2 \tilde{\rho}(x, t), \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}(x, t) = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad \text{et} \quad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}(x, t). \quad (5.7)$$

L'élimination de u s'obtient en dérivant l'équation de conservation de la masse par rapport au temps, ce qui conduit, en utilisant la conservation de la quantité de mouvement, à $\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2}$. L'élimination de $\tilde{\rho} = \tilde{p}/c^2$ conduit à l'équation de D'Alembert pour la pression :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2}(x, t). \quad (5.8)$$

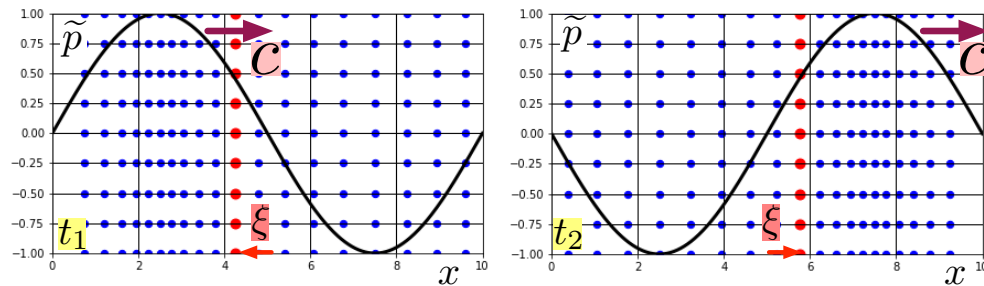


FIGURE 5.2 – Onde progressive monochromatique (OPM) pour deux instants successifs. Déplacement des particules fluides.

À titre d'exemple de solution, on considère l'onde progressive monochromatique (OPM) suivante :

$$\tilde{p} = p_m \sin(kx - \omega t), \quad \tilde{\rho} = \frac{p_m}{c^2} \sin(kx - \omega t) \quad \text{et} \quad u = \frac{p_m}{\rho_0 c} \sin(kx - \omega t), \quad (5.9)$$

avec $\omega = kc$ et p_m une amplitude quelconque. L'équation $\frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) = u(x, t)$ permet d'écrire le champ de déplacement sous la forme :

$$\xi(x, t) = \frac{p_m}{\omega \rho_0 c} \cos(kx - \omega t). \quad (5.10)$$

5 Vitesse du son

On admet que les solutions générales de l'équation de D'Alembert sont de la forme $\tilde{p}(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ où $f(X)$ et $g(X)$ sont des fonctions quelconques deux fois dérivables. On vérifie facilement que ce sont des solutions.

Par exemple, la superposition de deux signaux de même forme, c'est-à-dire tels que $f(X) = g(X)$, aux vitesses respectives $+c$ et $-c$, conduit à une solution $\tilde{p}(x, t) = f(x - ct) + f(x + ct)$ telle que $\tilde{p}(x, 0) = 2f(x)$ et $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}(x, 0) = 0$ (figure 5.3a).

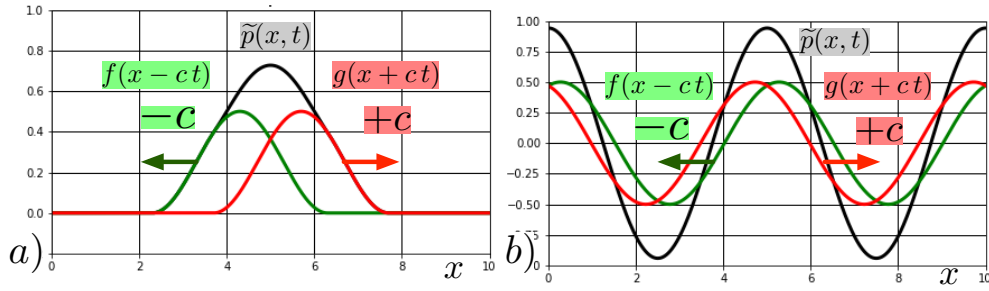


FIGURE 5.3 – Exemple de solutions $\tilde{p}(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$. a) Deux pulses de même amplitude. b) Deux ondes progressives monochromatiques de même amplitude et de vitesses opposées, résultant en une onde stationnaire.

La superposition de deux ondes progressives monochromatiques (OPM) de même amplitudes et de vitesses opposées est une onde stationnaire qui, pour l'exemple $f(X) = g(X) = A \cos(kX)$, s'écrit $\tilde{p}(x,t) = A \cos(kx - \omega t) + A \cos(kx + \omega t) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t)$ avec $\omega = kc$ (figure 5.3b).

Dans le cas d'un gaz parfait, les transformations isentropiques d'entropie $s = s_0$ vérifient la loi d'état $p = \mathcal{P}(\rho, s_0) = B(s_0) \rho^\gamma$ où $\gamma = 1,4$ pour l'air. On en déduit que $c^2 = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}(s_0, p_0) = \gamma p_0 / \rho_0$. Pour $p_0 = 10^5$ Pa, soit une Atmosphère, et $\rho_0 = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$, soit la masse volumique de l'air, la vitesse du son est donc $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$.

6 Débit associé à une onde sonore

On note $Q(x,t) = S u(x,t)$, où S est la section du tube, le débit associé à une oscillation. L'équation de conservation de la masse $\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$ conduit à distinguer les cas des ondes progressives qui se propagent vers la droite ou vers la gauche :

- Si $\tilde{p}(x,t) = \tilde{p}_-(x-ct)$, alors $u(x,t) = u_-(x-ct)$ avec $u_- = \frac{+1}{\rho_0 c} \tilde{p}_-$.
- Si $\tilde{p}(x,t) = \tilde{p}_+(x+ct)$, alors $u(x,t) = u_+(x+ct)$ avec $u_+ = \frac{-1}{\rho_0 c} \tilde{p}_+$.

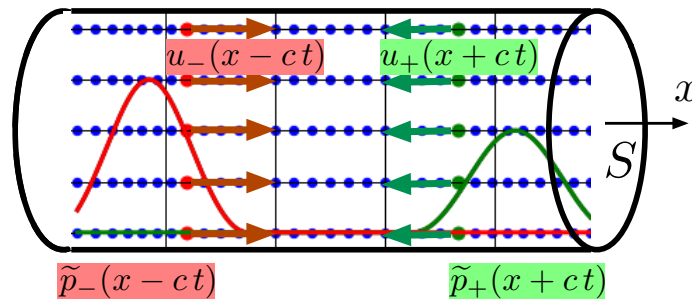


FIGURE 5.4 – Vitesses associées aux signaux de pression se propageant vers la droite ou vers la gauche.

On en déduit que le débit associé à une solution de l'équation de D'Alembert, de la forme $\tilde{p}(x,t) = \tilde{p}_-(x-ct) + \tilde{p}_+(x+ct)$, s'écrit

$$Q(x,t) = Y \tilde{p}_-(x-ct) - Y \tilde{p}_+(x+ct), \quad (5.11)$$

où $Y = \frac{S}{\rho_0 c}$ est appelée l'admittance.

7 Réflexion et transmission d'une onde sonore

On s'intéresse à la réflexion et la transmission d'une onde incidente de la forme $f_I(x - ct)$ au passage d'une discontinuité de la section du tube qui vaut S_1 pour $x < 0$ et S_2 pour $x > 0$. On suppose que l'entropie s_0 et la masse volumique ρ_0 sont les mêmes dans les deux tubes si bien que la vitesse du son c ne varie pas. La solution est donc de la forme :

- Pour $x < 0$: $\tilde{p}(x, t) = f_I(x - ct) + f_R(x + ct)$.
- Pour $x > 0$: $\tilde{p}(x, t) = f_T(x - ct)$.

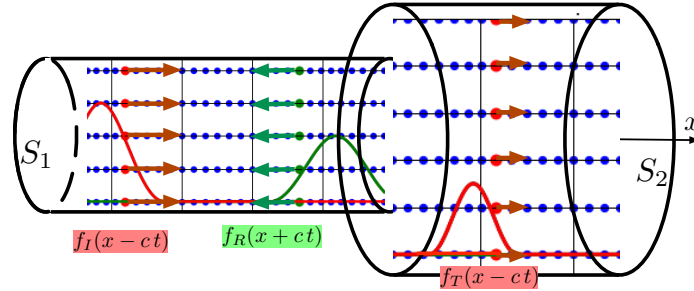


FIGURE 5.5 – Réflexion et transmission d'une onde progressive incidente au passage d'une discontinuité de section.

En notant $Y_1 = \frac{S_1}{\rho_0 c}$ et $Y_2 = \frac{S_2}{\rho_0 c}$ les admittances respectives des deux tubes, le débit associé s'écrit :

- Pour $x < 0$: $Q(x, t) = Y_1 f_I(x - ct) - Y_1 f_R(x + ct)$.
- Pour $x > 0$: $Q(x, t) = Y_2 f_T(x - ct)$.

En invoquant la continuité de la pression \tilde{p} et du débit Q en $x = 0$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \begin{cases} f_I(-ct) + f_R(ct) = f_T(-ct) \\ Y_1 f_I(-ct) - Y_1 f_R(ct) = Y_2 f_T(-ct) \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\implies \forall X \in \mathbb{R} : \begin{cases} f_T(X) - f_R(-X) = f_I(X) \\ Y_2 f_T(X) + Y_1 f_R(-X) = Y_1 f_I(X) \end{cases} \quad (5.13)$$

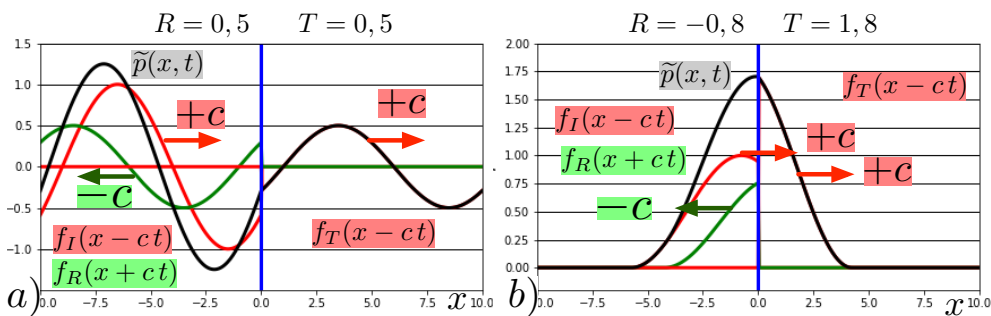


FIGURE 5.6 – Exemples : a) $R = T = 0,5$. b) $R = -0,8$ et $T = 1,8$.

On en déduit $f_T(X) = T f_I(X)$ et $f_R(X) = -R f_I(-X)$ avec

$$T = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2} \quad \text{et} \quad R = \frac{Y_2 - Y_1}{Y_1 + Y_2}. \quad (5.14)$$

On remarque que $T + R = 1$. La solution s'écrit donc :

- Pour $x < 0$: $\tilde{p}(x, t) = f_I(x - ct) - R f_I[-(x + ct)]$.
- Pour $x > 0$: $\tilde{p}(x, t) = T f_I(x - ct)$.

8 Cas limites de réflexion et de transmission

On considère ici, les deux cas limites suivants :

- $S_1 \ll S_2$ donc $Y_1 \ll Y_2$: $R \sim 1$ et $T \sim 0$.
- $S_1 \gg S_2$ donc $Y_1 \gg Y_2$: $R \sim -1$ et $T \sim 2$.

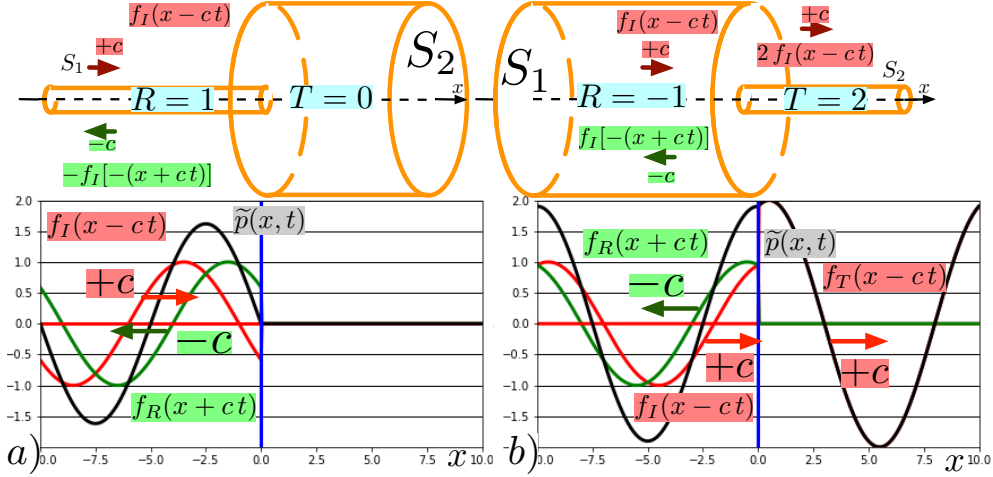


FIGURE 5.7 – Cas limite pour une onde progressive harmonique incidente : a) $R = 1$ et $T = 0$. b) $R = -1$ et $T = 2$.

Dans le cas limite $S_1/S_2 \rightarrow 0$, on a $(R, T) = (1, 0)$, ce qui conduit à $f_R(x + ct) = -f_I[-(x + ct)]$ et $f_T(x - ct) = 0$. Une onde progressive monochromatique incidente $f_I(x) = A \cos(kx)$ conduit alors à la solution $\tilde{p}(x, t) = +2A \sin(kx) \sin(\omega t)$ avec $\omega = kc$ pour $x < 0$ et $\tilde{p}(x, t) = 0$ pour $x > 0$.

Dans le cas limite $S_2/S_1 \rightarrow 0$, on a $(R, T) = (-1, 2)$, ce qui conduit à $f_R(x + ct) = f_I[-(x + ct)]$ et $f_T(x - ct) = 2f_I(x - ct)$. Une onde progressive monochromatique incidente $f_I(x) = A \cos(kx)$ conduit alors à la solution $\tilde{p}(x, t) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t)$ avec $\omega = kc$ pour $x < 0$ et $\tilde{p}(x, t) = 2A \cos(kx - \omega t)$ pour $x > 0$.

9 Conclusion

La discrétisation en petits tronçons d'un gaz compressible contenu dans un tube permet de modéliser les petites oscillations isentropiques par l'équation de D'Alembert, résultant de la linéarisation de l'équation d'état reliant la pression et la masse volumique ainsi que des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Les ondes sonores se propagent à la vitesse du son, qui dépend de la compressibilité du gaz. Ces ondes longitudinales sont non dispersives dans la mesure où les signaux se propagent sans déformation. Dans le cas d'une discontinuité de la section du tube, l'écriture de la continuité de la pression et du débit permet de déterminer les coefficients de réflexion et de transmission. Les cas limites où le rapport entre l'aire des sections est infini conduisent à des réflexions totales de l'onde incidente avec des noeuds ou des ventres à la discontinuité, suivant le cas.

FORMULAIRE

Vitesse du son

$$c^2 = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}(\rho_0, s_0). \quad (5.15)$$

Dans le cas d'un gaz parfait : $c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$

Dans le cas de l'air avec $p_0 = 10^5$ Pa et $\rho_0 = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$: $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$

Modélisation des ondes sonores

Linéarisation de la loi d'état, de la conservation de la masse et de la conservation de la quantité de mouvement autour de l'équilibre (ρ_0, p_0, s_0) pour des petites oscillations isentropiques ($s = s_0$) :

Masse volumique : $\rho(x, t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(x, t)$

Pression : $p(x, t) = p_0 + \tilde{p}(x, t)$.

$$\tilde{p} = c^2 \tilde{\rho}, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}. \quad (5.16)$$

Équation de D'Alembert : $\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2}(x, t)$.

Débit associé à une onde sonore

En notant $Y = \frac{S}{\rho_0 c}$ l'admittance et $Q(x, t) = S u(x, t)$ le débit :

- Si $\tilde{p}(x, t) = \tilde{p}_-(x - ct)$: $Q(x, t) = Y \tilde{p}_-(x - ct)$.
- Si $\tilde{p}(x, t) = \tilde{p}_+(x + ct)$: $Q(x, t) = -Y \tilde{p}_+(x + ct)$.

Réflexion et transmission par une discontinuité de section

Si S_1 est la section pour $x < 0$ et S_2 la section pour $x > 0$ la réflexion et la transmission d'une onde sonore incidente de la forme $f_I(x - ct)$ conduit, en notation $Y_1 = \frac{S_1}{\rho_0 c}$ et $Y_2 = \frac{S_2}{\rho_0 c}$ les admittances, à la solution :

- Pour $x < 0$: $\tilde{p}(x, t) = f_I(x - ct) - R f_I[-(x + ct)]$.
- Pour $x > 0$: $\tilde{p}(x, t) = T f_I(x - ct)$.

$$T = \frac{2 Y_1}{Y_1 + Y_2}, \quad R = \frac{Y_2 - Y_1}{Y_1 + Y_2} \quad \text{avec } R + T = 1. \quad (5.17)$$

Cas limites : $(R, T) = (1, 0)$ pour $S_1 \ll S_2$ et $(R, T) = (-1, 2)$ pour $S_1 \gg S_2$.

EXERCICES

EXERCICE 5.1

Réflexion et transmission d'une OPM

On s'intéresse ici à réflexion et à la transmission d'une onde progressive monochromatique (OPM) à travers une discontinuité de la section d'un tube contenant un gaz compressible.

- 1) On suppose que le gaz contenu dans le tube est un gaz parfait de pression $p_0 = 1000$ hPa et de température $T_0 = 20^\circ$ C. On suppose que sa masse molaire est $M = 29$ g.mol⁻¹ et on note $R = 8,31$ J.K⁻¹.mol⁻¹ la constante des gaz parfaits intervenant dans la loi d'état $p = \rho(R/M)T$. Calculer la masse volumique ρ_0 de l'air à la pression p_0 et à la température T_0 .

| On a $\rho_0 = p_0 M / (RT_0) = 1,2$ kg.m⁻³.

- 2) Montrer que la vitesse du son est $c = \sqrt{\gamma(R/M)T_0}$ et calculer sa valeur.

| On a $c^2 = \gamma p_0 / \rho_0 = \gamma(R/M)T_0$, d'où $c = 342$ m.s⁻¹.

- 3) On note $f_I(x - ct)$ l'onde incidente et on suppose que la fluctuation de pression autour de l'équilibre est $\tilde{p}(x, t) = f_I(x - ct) - R f_I[-(x + ct)]$ pour le tube en $x < 0$ de section S_1 et $\tilde{p}(x, t) = T f_I(x - ct)$ pour le tube en $x > 0$ de section S_2 . Justifier la forme de cette solution et écrire la continuité de la pression et du débit en $x = 0$.

| Le signal réfléchi et le signal transmis ont le même forme $f_I(X)$ que l'onde incidente. La continuité de la pression s'écrit $(1 - R) f_I(-ct) = T f_I(-ct)$ et donc $T + R = 1$. La continuité du débit s'écrit $Y_1 (1 + R) f_I(-ct) = Y_2 T f_I(-ct)$, et donc $Y_1 (1 + R) = Y_2 T$, avec $Y_1 = S_1 / (\rho_0 c)$ et $Y_2 = S_2 / (\rho_0 c)$.

- 4) En déduire l'expression de R et de T en fonction des admittances Y_1 et Y_2 .

| Le système $T + R = 1$ et $Y_2 T - Y_1 R = Y_1$ conduit à $T = 2Y_1 / (Y_1 + Y_2)$ et $R = (Y_2 - Y_1) / (Y_1 + Y_2)$.

- 5) Calculer R et T dans la limite $S_1 / S_2 \rightarrow 0$. En déduire l'expression de la solution dans le cas $f_I(X) = A \cos(kX)$.

| On a $R = 1$ et $T = 0$ et $\tilde{p}(x, t) = A \cos(kx - \omega t) - A \cos(kx + \omega t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$ pour $x < 0$ et $\tilde{p}(x, t) = 0$ pour $x > 0$, avec $\omega = kc$.

- 6) Calculer R et T dans la limite $S_2 / S_1 \rightarrow 0$. En déduire l'expression de la solution dans le cas $f_I(X) = A \cos(kX)$.

| On a $R = -1$ et $T = 2$ et $\tilde{p}(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + A \cos(kx + \omega t) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t)$ pour $x < 0$ et $\tilde{p}(x, t) = 2A \cos(kx - \omega t)$ pour $x > 0$, avec $\omega = kc$.

- 7) Interpréter physiquement ces deux cas limites.

| Dans le cas $S_1 \ll S_2$, l'onde sonore dans le petit tube débouche sur une grande chambre dont la pression est très peu modifiée par l'onde incidente. Le point $x = 0$ se comporte comme un noeud pour la pression car celle-ci ne varie pas. L'onde est complètement réfléchi par ce noeud. Dans le cas $S_1 \gg S_2$, l'onde sonore est complètement réfléchi par le mur que constitue l'extrémité du grand tube, le trou du petit tube étant négligeable. Le point $x = 0$ se comporte comme un ventre pour la pression. L'onde stationnaire ainsi obtenue pour $x < 0$, génère une onde sonore progressive d'amplitude $2A$ dans le petit tube : c'est l'amplitude d'oscillation de pression du ventre en $x = 0$.

Chapitre 6

Ondes électriques amorties dans un coaxial

Sommaire

1	Description d'un cable coaxial	58
2	Discrétisation d'un coaxial	59
3	Passage au continu	59
4	Amortissement temporel	59
5	Amortissement spatial	60
6	Conclusion	61

Introduction

La discrétisation d'un câble coaxial permet de modéliser ce système de transmission de signaux électriques comme une suite de petits circuits RLC . L'application des lois de Kirchoff et le passage au continu établit que le champ de courant dans l'âme du coaxial est solution de "l'équation des ondes 1D amorties". On étudie alors la décroissance temporelle de l'amplitude d'une onde progressive monochromatique à l'aide de la notation complexe. Cette approche est pertinente pour aborder l'amortissement des oscillations d'un barreau élastique ou d'une corde tendue de tailles finies, modélisées par cette même équation. On utilise également la notation complexe pour étudier la décroissance spatiale d'une onde progressive monochromatique, cette situation étant pertinente dans le cas de la transmission d'un signal le long d'un axe avec un faible amortissement.

1 Description d'un câble coaxial

Un câble coaxial comporte un fil conducteur d'électricité, appelé "âme", entouré d'un diélectrique (isolant), lui-même entouré d'une tresse ou d'un tube conducteur, le tout étant protégé par une gaine de protection en plastique (figure 6.1). Les deux conducteurs partagent le même axe Ox , d'où le nom de ce câble. Ce système est utilisé pour la transmission de signaux numériques ou analogiques à haute ou basse fréquence.

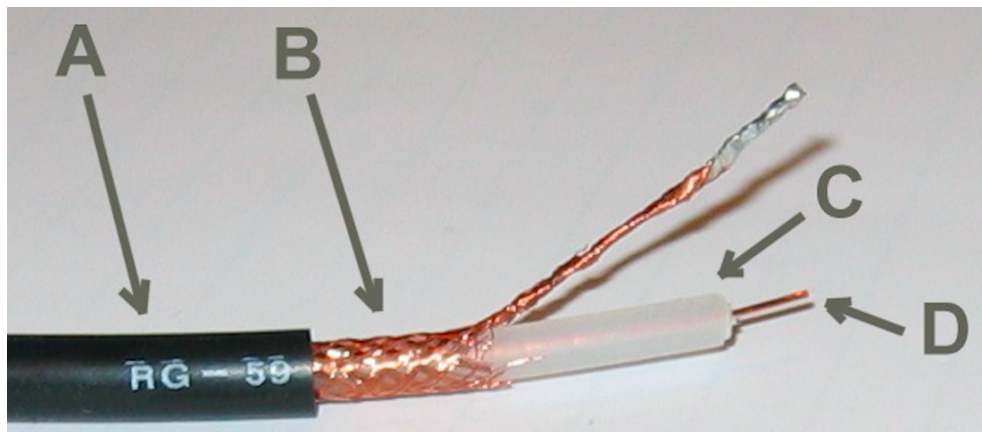


FIGURE 6.1 – Structure d'un coaxial. A) Gaine extérieure de protection. B) Blindage en cuivre. C) Diélectrique isolant. D) Conducteur central (âme) (Wikipedia).

Sa forme permet de protéger les signaux des perturbations électromagnétiques extérieures. Le blindage extérieur, relié à la masse, joue le rôle de cage de Faraday et empêche ainsi que les perturbations vers le milieu extérieur.

2 Discrétisation d'un coaxial

On modélise le câble coaxial en le découpant en petits tronçons de longueur δx . L'âme du tronçon de centre x_i est parcouru par un courant $I_i(t)$ et se comporte comme une bobine d'inductance $\Lambda \delta x$, résultant de son interaction avec le blindage. L'âme oppose aussi une résistance $\rho \delta x$, souvent faible. On modélise la polarisation du diélectrique par des petits condensateurs de capacité $\Gamma \delta x$ situés aux extrémités $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ des tronçons. On note $U_{i+\frac{1}{2}}(t)$ la tension en ces points.

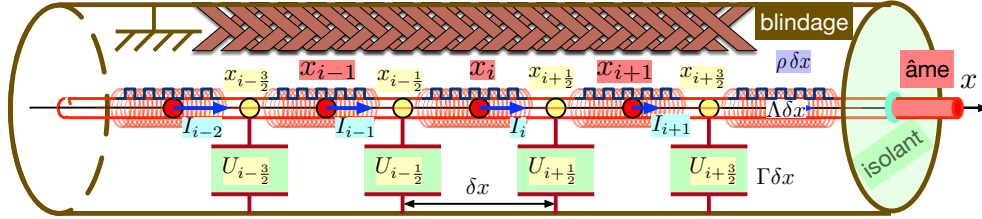


FIGURE 6.2 – Discrétisation d'un coaxial en petits tronçons.

L'application des lois de Kirchoff comporte la loi des mailles et la loi des noeuds suivants :

$$\begin{aligned} U_{i-\frac{1}{2}}(t) - U_{i+\frac{1}{2}}(t) &= \Lambda \delta x \dot{I}_i(t) + \rho \delta x I_i(t) , \\ I_i(t) - I_{i+1}(t) &= \Gamma \delta x \dot{U}_{i+\frac{1}{2}}(t) . \end{aligned} \quad (6.1)$$

3 Passage au continu

Dans la limite $\delta x \rightarrow 0$, on décrit le courant et la tension par des champs continus $I(x, t)$ et $U(x, t)$ par extrapolation des valeurs discrètes $I_i(t) = I(x_i, t)$ et $U_{i+\frac{1}{2}}(t) = U(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$. En appliquant la définition $f'(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$ de la dérivée d'une fonction, les lois de Kirchoff deviennent

$$-\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = \Lambda \frac{\partial I}{\partial t}(x, t) + \rho I(x, t) \quad \text{et} \quad -\frac{\partial I}{\partial x}(x, t) = \Gamma \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) . \quad (6.2)$$

En éliminant le champ $U(x, t)$, on obtient l'équation des ondes 1D amorties suivante :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}(x, t) + 2\mu \frac{\partial I}{\partial t}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\rho}{2\Lambda} . \quad (6.3)$$

4 Amortissement temporel

On cherche des solutions complexes de l'équation $\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial I}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$ sous la forme

$$\underline{I}(x, t) = A e^{\sigma t} e^{i\omega t - ikx - i\varphi} , \quad (6.4)$$

où A (amplitude), ω (pulsation), k (nombre d'onde) et φ (phase) sont des constantes réelles. Comme l'équation est linéaire à coefficients réels, le complexe conjugué d'une solution $\underline{I}(x, t)$ est aussi solution, et donc sa partie réelle $I(x, t) = \Re(\underline{I}) = A e^{\sigma t} \cos(kx - \omega t + \varphi)$ est une solution réelle.

En notant $s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ et en remarquant que $\frac{\partial \underline{I}}{\partial t} = s \underline{I}$ et $\frac{\partial \underline{I}}{\partial x} = -ik \underline{I}$ pour l'expression de $\underline{I}(x, t)$ proposée, on obtient, en reportant dans l'équation :

$$(s^2 + 2\mu s + c^2 k^2) A e^{\sigma t} e^{i\omega t - ikx - i\varphi} = 0. \quad (6.5)$$

On suppose ici que $\mu^2 < k^2 c^2$, si bien que les racines de l'équation du second degré $s^2 + 2\mu s + c^2 k^2$ en s sont $s_{\pm} = -\mu \pm i\omega_*$ avec $\omega_* = \sqrt{k^2 c^2 - \mu^2}$. On a donc obtenu des solutions de la forme (6.4) avec $\sigma = -\mu < 0$ et $\omega = \pm\omega_*$. Ce sont des ondes d'amplitude décroissante qui s'écrivent et se propagent :

$$\begin{aligned} \text{vers la droite} & : I_-(x, t) = A_- e^{-\mu t} \cos(kx - \omega_* t + \varphi_-), \\ \text{vers la gauche} & : I_+(x, t) = A_+ e^{-\mu t} \cos(kx + \omega_* t + \varphi_+), \end{aligned} \quad (6.6)$$

avec $\omega_* = \sqrt{k^2 c^2 - \mu^2}$.

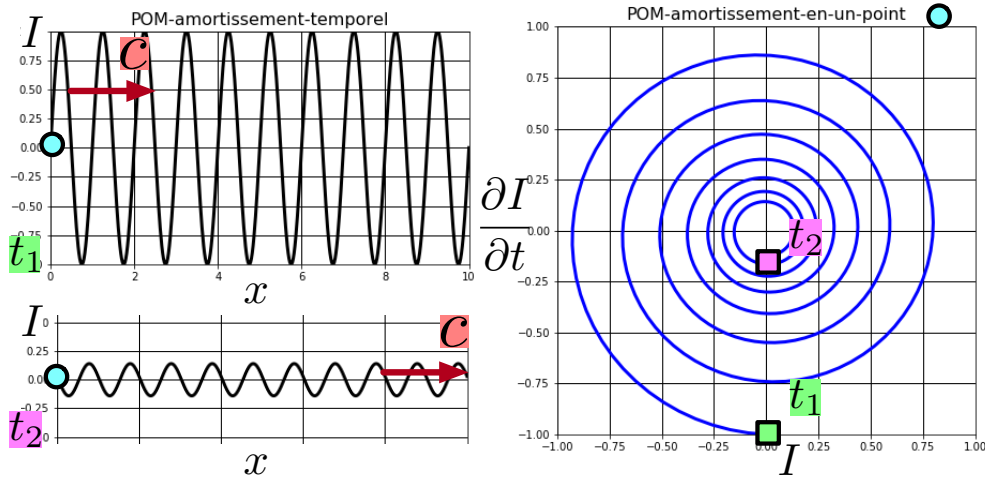


FIGURE 6.3 – Onde progressive monochromatique amortie au cours du temps. Profils $I(x, t_1)$ et $I(x, t_2)$ et spirale $[I(0, t); \frac{\partial I}{\partial t}(0, t)]$ pour $t \in [t_1, t_2]$.

5 Amortissement spatial

On cherche maintenant des solutions complexes de l'équation $\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial I}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$ sous la forme

$$\underline{I}(x, t) = A e^{\gamma x} e^{i\omega t - ikx - i\varphi}, \quad (6.7)$$

où A (amplitude), γ , k (nombre d'onde) et φ (phase) sont des constantes réelles. La partie réelle $I(x, t) = \Re(\underline{I}) = A e^{\gamma x} \cos(kx - \omega t + \varphi)$ est une solution réelle si \underline{I} est une solution complexe.

En notant $\kappa = \gamma - ik \in \mathbb{C}$ et en remarquant que $\frac{\partial \underline{I}}{\partial t} = i\omega \underline{I}$ et $\frac{\partial \underline{I}}{\partial x} = \kappa \underline{I}$ pour l'expression de $\underline{I}(x, t)$ proposée, on obtient, en reportant dans l'équation :

$$(-\omega^2 + 2i\mu\omega - \kappa^2 c^2) A e^{\gamma x} e^{i\omega t - ikx - i\varphi} = 0. \quad (6.8)$$

Le carré du nombre complexe κ est donc donné par $\kappa^2 c^2 = -\omega^2 + 2i\mu\omega$. En notant $Z = \kappa c/\omega$, cette équation s'écrit $Z^2 = -(1 - 2i\epsilon)$ avec $\epsilon = \mu/\omega$. On suppose ici dans le cas d'une faible résistance telle que $\epsilon \ll 1$. On peut alors faire

le développement limité $(\gamma - ik)c/\omega = Z = \pm i(1 - 2i\epsilon)^{1/2} = \pm[i + \epsilon + O(\epsilon^2)]$. On en déduit $-k = \pm\omega/c + O(\epsilon)$ et $\gamma = \pm\mu/c + O(\epsilon^2)$. À l'ordre dominant en ϵ , les champs complexes $\underline{I}(x, t)$ sont donc solutions pour les choix suivants :

$$\gamma - ik = \pm \left(\frac{\mu}{c} + i \frac{\omega}{c} \right). \quad (6.9)$$

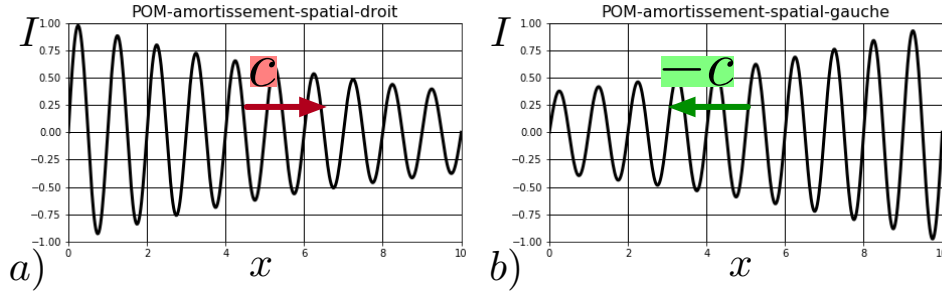


FIGURE 6.4 – Onde progressive monochromatique amortie le long de l'axe. a) Onde $I_-(x, t)$ se propageant vers la droite. b) Onde $I_+(x, t)$ se propageant vers la gauche.

Les solutions générales sont donc des ondes progressives spatialement amorties qui se propagent :

$$\begin{aligned} \text{vers la droite} & : I_-(x, t) = A_- e^{-(\mu/c)x} \cos(k_* x - \omega t + \varphi_-), \\ \text{vers la gauche} & : I_+(x, t) = A_+ e^{(\mu/c)x} \cos(k_* x + \omega t + \varphi_+), \end{aligned} \quad (6.10)$$

avec $k_* = \omega/c$ (figure 6.4). On remarque que le taux d'amortissement μ/c ne dépend pas de la pulsation ω ou du nombre d'onde k_* .

6 Conclusion

La propagation des signaux électriques dans un câble coaxial est décrite par l'équation des ondes 1D amorties, comme l'a montré l'application de la loi des mailles et des noeuds à la discrétisation du câble en une série de circuits RLC. Une condition initiale sous la forme d'une onde monochromatique se propage vers la droite ou vers la gauche avec une amplitude qui s'amortit avec le temps. Sous un autre point de vue, une condition aux limites harmonique génère une onde monochromatique qui se propage vers la droite ou vers la gauche avec une amplitude qui décroît exponentiellement avec l'espace dans le sens de la propagation. L'amortissement temporel se rencontre plus facilement pour le cas des ondes élastiques longitudinales dans un barreau élastique ou des ondes transversales d'une corde tendues, tandis que l'amortissement spatial est plus approprié à la description des ondes électriques dans un câble coaxial.

FORMULAIRE

Lois de Kirchoff

$$\begin{aligned} U_{i-\frac{1}{2}}(t) - U_{i+\frac{1}{2}}(t) &= \Lambda \delta x \dot{I}_i(t) + \rho \delta x I_i(t), \\ I_i(t) - I_{i+1}(t) &= \Gamma \delta x \dot{U}_{i+\frac{1}{2}}(t). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Équations des ondes amorties

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial I}{\partial t} + \rho I \quad \text{et} \quad -\frac{\partial I}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial I}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\rho}{2\Lambda}. \quad (6.13)$$

Amortissement temporel

En supposant $\mu^2 < k^2 c^2$:

$$\begin{aligned} \text{Vers la droite} &: I_-(x, t) = A_- e^{-\mu t} \cos(kx - \omega_* t + \varphi_-), \\ \text{Vers la gauche} &: I_+(x, t) = A_+ e^{-\mu t} \cos(kx + \omega_* t + \varphi_+). \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\text{avec } \omega_* = \sqrt{k^2 c^2 - \mu^2}.$$

Amortissement spatial

En supposant $\epsilon = \mu/\omega \ll 1$:

$$\begin{aligned} \text{vers la droite} &: I_-(x, t) = A_- e^{-(\mu/c)x} \cos(k_* x - \omega t + \varphi_-), \\ \text{vers la gauche} &: I_+(x, t) = A_+ e^{(\mu/c)x} \cos(k_* x + \omega t + \varphi_+), \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\text{avec } k_* = \omega/c.$$

EXERCICES

EXERCICE 6.1 Équation des télégraphistes

On considère un câble coaxial dont l'inductance linéique est $\Lambda = 0,16 \mu\text{H.m}^{-1}$, la capacité linéique est $\Gamma = 100 \text{ pF.m}^{-1}$ et la résistance linéique est $\rho = 2 \cdot 10^{-8} \Omega.\text{m}^{-1}$ et donc une conductance linéique $G_a = 1/\rho = 5 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1} = 5 \cdot 10^7 \Omega^{-1}.\text{m}$. On suppose qu'un courant de fuite très faible peut passer entre

l'âme et la tresse avec une conductance linéique $g \delta x$ avec $g = 10^{-11} \text{ S.m}^{-1}$ (figure 6.5).

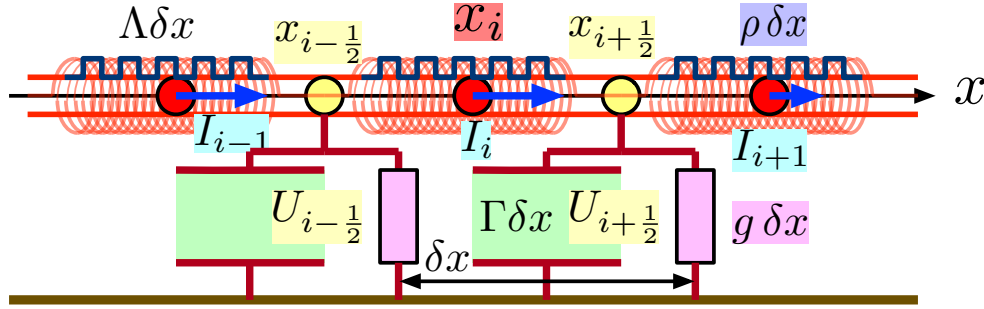


FIGURE 6.5 – Discrétisation d'un câble coaxial avec conductance.

1) Justifier la loi des noeuds $I_i(t) - I_{i+1}(t) = \Gamma \delta x \dot{U}_{i+\frac{1}{2}}(t) + g \delta x U_{i+\frac{1}{2}}(t)$.

La conductance $g \delta x$ est l'inverse de la résistance du courant de fuite vers la masse.

2) Écrire la loi des mailles pour chaque tronçon.

La loi des mailles $U_{i-\frac{1}{2}}(t) - U_{i+\frac{1}{2}}(t) = \Lambda \delta x \dot{I}_i(t) + \rho \delta x I_i(t)$ ne fait pas intervenir la conductance de fuite.

3) Montrer, dans la limite continue $\delta x \rightarrow 0$, que le système est régi par l'équation des télégraphiste suivante :

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial I}{\partial t} + \rho I \quad \text{et} \quad -\frac{\partial I}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial U}{\partial t} + g U. \quad (6.16)$$

Il suffit d'utiliser la définition de la dérivée d'une fonction en x après interpolation des grandeurs discrètes en champs continus.

4) En déduire que $I(x, t)$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + 2(\mu + \nu) \frac{\partial I}{\partial t} + 4\mu\nu I = c^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}, \quad (6.17)$$

où c , μ et ν sont des constantes que l'on exprimera en fonction de ρ , g , Λ et Γ . Donner leurs valeurs numériques en précisant les unités.

Il suffit d'éliminer $U(x, t)$ pour obtenir l'équation avec $c = 1/\sqrt{\Lambda\Gamma} = 2.5 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$, $\mu = \rho/(2\Lambda) = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ et $\nu = g/(2\Gamma) = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$.

5) On cherche des solutions complexes de la forme $\underline{I} = A e^{\sigma t} e^{i\omega t - ikx - i\varphi}$, où A , ω , k et φ sont des constantes réelles. En supposant que $(\mu - \nu)^2 < c^2 k^2$, calculer σ et ω pour un k donné, afin que \underline{I} soit solution. En déduire l'expression des solutions réelles.

En posant $s = \sigma + i\omega$ et en reportant dans l'équation, on doit résoudre l'équation du second degré $s^2 + 2(\mu + \nu)s + 4\mu\nu + c^2 k^2 = 0$. Comme le discriminant est négatif, les solutions sont $s_{\pm} = -(\mu + \nu) \pm i\omega_*$ avec $\omega_* = \sqrt{k^2 c^2 - (\mu - \nu)^2}$. Les solutions réelles sont de la forme :

$$\begin{aligned} \text{vers la droite} & : I_-(x, t) = A_- e^{-(\mu+\nu)t} \cos(kx - \omega_* t + \varphi_-), \\ \text{vers la gauche} & : I_+(x, t) = A_+ e^{-(\mu+\nu)t} \cos(kx + \omega_* t + \varphi_+). \end{aligned} \quad (6.18)$$

6) On cherche des solutions complexes de la forme $\underline{I}(x, t) = A e^{\gamma x} e^{i\omega t - ikx - i\varphi}$, où A , ω , k et φ sont des constantes réelles. En supposant que μ/ω et ν/ω

sont d'ordre ϵ avec $\epsilon \ll 1$, $(\mu - \nu)^2 < c^2 k^2$, calculer γ et k pour un ω donné, afin que \underline{I} soit solution. En déduire l'expression des solutions réelles.

En posant $\kappa = \gamma - ik$ et en reportant dans l'équation, on doit résoudre l'équation du second degré $-\omega^2 + 2i(\mu + \nu)\omega + 4\mu\nu = \kappa^2 c^2$. On en déduit $\kappa^2 c^2 = (-ik + \gamma)^2 c^2 = -k^2 c^2 - 2ik\gamma c^2 + O(\epsilon^2) = -\omega^2 + 2i(\mu + \nu)\omega + 4\mu\nu$. Comme $\mu\nu = O(\epsilon^2)$, on peut négliger ce dernier terme. On en déduit que $k = \mp k_*$ avec $k_* = \omega/c$ et $\gamma = -(\mu + \nu)\omega/(k c^2)$. Les solutions réelles sont de la forme :

$$\begin{array}{ll} \text{vers la droite} & : \quad I_-(x, t) = A_- e^{-[(\mu + \nu)/c]x} \cos(k_* x - \omega t + \varphi_-), \\ \text{vers la gauche} & : \quad I_+(x, t) = A_+ e^{[(\mu + \nu)/c]x} \cos(k_* x + \omega t + \varphi_+). \end{array} \quad (6.19)$$

Chapitre 7

Dispersion des ondes

Sommaire

1	Chaine discrète de pendules	66
2	Petites oscillations couplées	67
3	Passage au continu	67
4	Relation de dispersion	68
5	Paquet à deux ondes	68
6	Paquet à N ondes	70
7	Conclusion	71

Introduction

L'exemple d'une chaîne de pendules couplés par des ressorts permet d'illustrer le cas des ondes dispersives, c'est-à-dire tel que la vitesse de phase dépend du nombre d'onde. Le principe fondamental de la dynamique, formulé avec le moment cinétique, fait intervenir les couples de torsion des ressorts en plus du moment de la force de gravité. On se place dans le cadre des petites oscillations et de l'élasticité linéaire pour le comportement des ressorts. Dans la limite où l'angle entre les pendules et la verticale varie sur des échelles spatiales grandes devant l'espacement des points d'attache, on peut le décrire par un champ continu qui obéit à l'équation de Klein-Gordon. Les ondes progressives monochromatiques solutions de cette équation aux dérivées partielles ont une pulsation reliée au nombre d'onde par une relation de dispersion. Leurs vitesses de phase, que l'on peut voir comme la vitesse de propagation des crêtes, dépend également du nombre d'onde. Un paquet d'onde est constitué d'ondes de nombres d'ondes voisins. On montre que leur enveloppe, qui est maximale lorsque toutes les ondes sont en phase, se propage à la vitesse de groupe, obtenue en dérivant la relation de dispersion. Pour l'exemple de la chaîne de pendules, la vitesse de groupe est plus petite que la vitesse de phase.

1 Chaîne discrète de pendules

On considère une chaîne de pendules dont les abscisses des points d'attaches sont notées x_i . On note $\theta_i(t)$ les angles que font, avec la verticale, les bras des pendules de longueur l et de masse négligeable. Les masses des pendules sont $\delta m = \mu dx$ où μ est une masse linéique et $\delta x = x_{i+1} - x_i$ l'espacement constant entre les attaches.

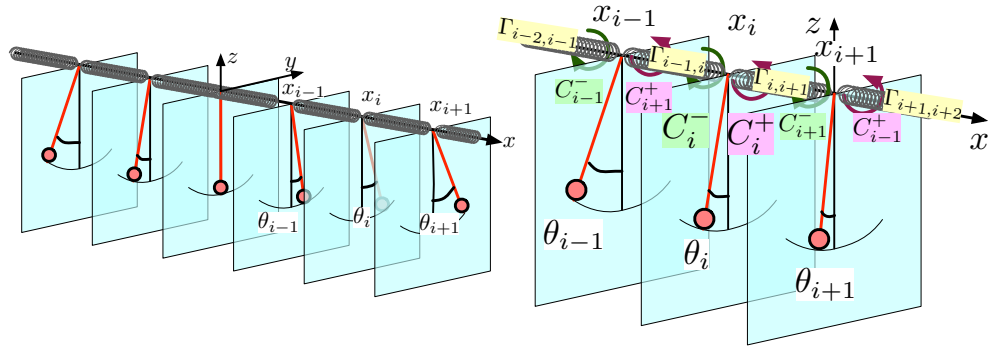


FIGURE 7.1 – Chaîne de pendules couplés par des ressorts exerçant des couples de rappels.

Les pendules sont couplés par des ressorts qui exercent des couples de torsion autour de l'axe Ox . On note $\Gamma_{i,i+1}$ la contrainte de torsion du ressort compris entre les pendules i et $i + 1$, de sorte que :

- le couple exercées sur le pendule i par le ressort situé sur sa droite (du côté des x croissants) et $C_i^+ = +\Gamma_{i,i+1}$.
- le couple exercées sur le pendule i par le ressort situé sur sa gauche (du côté des x décroissants) et $C_i^- = -\Gamma_{i-1,i}$.

On suppose que l'écart entre les angles de deux pendules voisins est petits, si bien que l'on peut se placer dans le cadre d'un comportement rhéologique élastique des ressorts en torsion. On peut alors écrire la loi de Hooke suivante :

$$\Gamma_{i,i+1} = \frac{\beta}{\delta x} (\theta_{i+1} - \theta_i), \quad (7.1)$$

où β est une constante de dimension N.m^2 .

2 Petites oscillations couplées

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au ressort i est ici écrit à l'aide du moment cinétique $l^2 \delta m \dot{\theta}_i(t)$ par rapport à l'axe Ox , l'accélération tangentielle étant $l \ddot{\theta}_i(t)$. On obtient alors

$$l^2 \delta m \ddot{\theta}_i = M + C_i^+ + C_i^- = -l \delta m g \sin \theta_i + \beta \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\delta x} - \beta \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\delta x}, \quad (7.2)$$

où g est la gravité et $M = -l \delta m g \sin \theta_i$ le moment du poids de la masse par rapport à l'axe Ox .

En supposant que les oscillations sont petites, on peut effectuer l'approximation $\sin \theta_i \sim \theta_i$, ce qui conduit, en utilisant $\delta m = \mu \delta x$, au système couplé :

$$\ddot{\theta}_i = -\frac{g}{l} \theta_i + \frac{\beta}{l^2 \mu} \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\delta x^2} = -\omega_*^2 \theta_i + c^2 \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\delta x^2}, \quad (7.3)$$

où $\omega_* = \sqrt{g/l}$ a la dimension d'une pulsation (rad.s^{-1}) et $c = \sqrt{\beta/(l^2 \mu)}$ a la dimension d'une vitesse (m.s^{-1}).

3 Passage au continu

On s'intéresse à des mouvements dont l'échelle de variation spatiale est grande devant δx . On peut ainsi prendre la limite $\delta x \rightarrow 0$ avec une masse linéique $\mu = \delta m / \delta x$ constante. On peut alors considérer le champ continu $\theta(x, t)$ par interpolation des valeurs discrètes $\theta(x_i, t) = \theta_i(t)$. On écrit alors les développements limités suivantes :

$$\theta_{i+1}(t) = \theta(x_i + \delta x, t) + \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_i, t) \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x_i, t) \delta x^2 + O(\delta x^3), \quad (7.4)$$

$$\theta_{i-1}(t) = \theta(x_i - \delta x, t) - \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_i, t) \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x_i, t) \delta x^2 + O(\delta x^3). \quad (7.5)$$

En en déduit la limite continue de l'équation $\ddot{\theta}_i = -\omega_*^2 \theta_i + c^2 \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\delta x^2}$:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\omega_*^2 \theta + c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (7.6)$$

Cette équation aux dérivées partielles est appelée "équation de Klein-Gordon", ou encore équation des ondes 1D avec dispersion.

4 Relation de dispersion

On cherche des solutions complexes de l'équation de Klein-Gordon sous la forme :

$$\underline{\theta}(x, t) = A e^{i\omega t - ikx - i\varphi}, \quad (7.7)$$

où A est une amplitude réelle, φ une phase, ω une pulsation et k un nombre d'onde. La solution réelle associée est une onde progressive monochromatique (OPM) qui s'écrit : $\theta(x, t) = \Re(\underline{\theta}) = A \cos(kx - \omega t + \varphi)$. En reportant l'expression dans l'équation aux dérivées partielles et en remarquant que $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\omega^2 \theta$ et $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -k^2 \theta$, la pulsation ω et le nombre d'onde k doivent être liés par la relation $-\omega^2 = -\omega_*^2 - c^2 k^2$. On en déduit la relation de dispersion $\omega = \pm\Omega(k)$ avec

$$\Omega(k) = \sqrt{\omega_*^2 + c^2 k^2}. \quad (7.8)$$

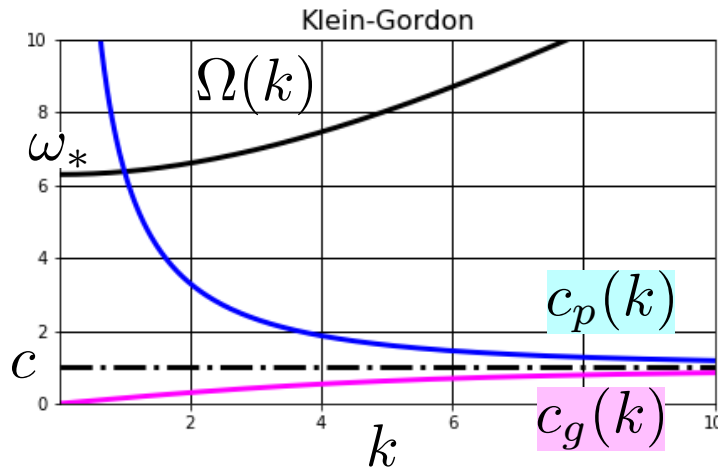


FIGURE 7.2 – Relation de dispersion $\Omega(k)$ et vitesse de phase $c_p(k)$ et de groupe $c_g(k)$ associées pour l'équation de Klein-Gordon.

La vitesse de phase $c_p(k) = \Omega(k)/k$ est la vitesse de propagation des crêtes, des creux ou d'une phase particulière de l'onde, dans la mesure où la solution peut s'écrire sous la forme $\theta(x, t) = A \cos\{k[x - c_p(k)t]\}$.

La vitesse de groupe est définie par la relation $c_g(k) = \Omega'(k)$ et vaut ici

$$c_g(k) = \frac{c^2 k}{\sqrt{\omega_*^2 + c^2 k^2}} = \frac{c^2}{c_p(k)}. \quad (7.9)$$

Pour cet exemple, on remarque que $c_p(k) c_g(k) = c^2$.

5 Paquet à deux ondes

On considère la superposition de deux ondes progressives monochromatiques (OPM) de même amplitude et de nombres d'onde voisins $k_1 = k_0 + \delta k$ et $k_2 = k_0 - \delta k$, avec δk petit :

$$\theta(x, t) = A \cos[k_1 x - \Omega(k_1) t] + A \cos[k_2 x - \Omega(k_2) t]. \quad (7.10)$$

En appliquant la formule trigonométrique $\cos p + \cos q = \cos \frac{p+q}{2} + \cos \frac{p-q}{2}$, on peut écrire

$$\theta(x, t) = 2 A \cos(k_0 x - \bar{\omega} t) \cos(\delta k x - \delta \omega t), \quad (7.11)$$

$$\text{avec } \bar{\omega} = \frac{\Omega(k_0 + \delta k) + \Omega(k_0 - \delta k)}{2} = \Omega(k_0) + O(\delta k) \quad (7.12)$$

$$\text{et } \delta \omega = \frac{\Omega(k_0 + \delta k) - \Omega(k_0 - \delta k)}{2} = \Omega'(k_0) \delta k + O(\delta k^2). \quad (7.13)$$

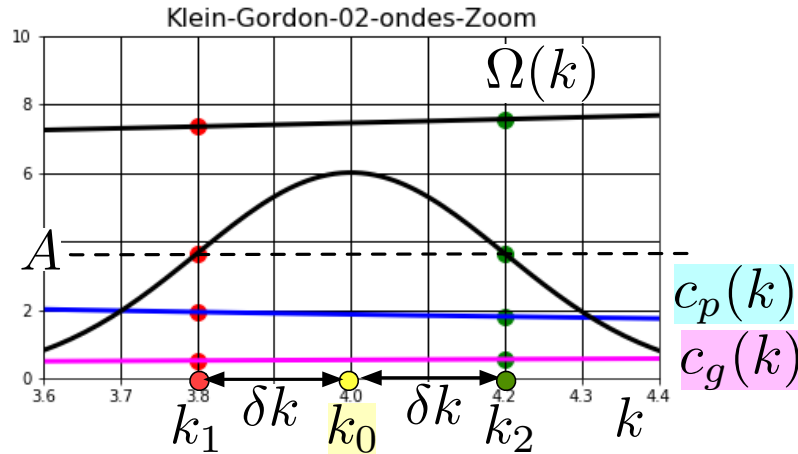


FIGURE 7.3 – Vitesses de phase c_p et de groupe c_g de deux ondes de nombres d’onde k_1 et k_2 voisin, avec δk petit.

À l’ordre dominant en δk , le paquet à deux ondes s’écrit donc :

$$\theta(x, t) \sim 2 A \cos[k_0 (x - c_{p0} t)] \cos[\delta k (x - c_{g0} t)], \quad (7.14)$$

où $c_{p0} = \Omega(k_0)/k_0$ et $c_{g0} = \Omega'(k_0)$. C’est le produit d’une onde progressive monochromatique de nombre d’onde k_0 et de vitesse de phase c_{p0} par une enveloppe qui se propage à la vitesse de groupe c_{g0} . La période spatiale $2\pi/\delta k$ de l’enveloppe est grande devant la période $2\pi/k_0$ de l’onde porteuse.

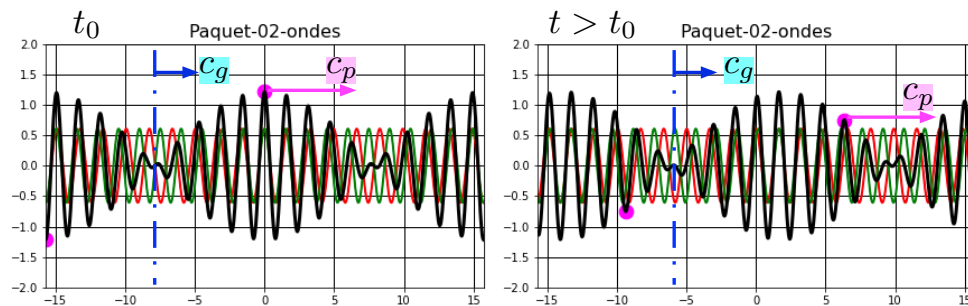


FIGURE 7.4 – Superposition des ondes k_1 (rouge) et k_2 (vert) pour deux instants successifs. L’enveloppe se propage à la vitesse de groupe c_g qui est plus petite que la vitesse de phase c_p .

6 Paquet à N ondes

On considère la superposition de N ondes progressives monochromatiques (OPM) de nombres d'onde $k_n = k_0 + \delta k_n$, pour $n = 1, N$, et d'amplitude modulées par une fonction gaussienne sous la forme

$$\theta(x, t) = A \sum_{n=1}^N G(k_n) \cos[k_n x - \Omega(k_n) t], \quad (7.15)$$

où A est une amplitude et $G(k) = \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{2\delta k^2}\right]$, avec δk_n et δk petits. La solution complexe $\underline{\theta}$ associée, telle que $\theta = \Re(\underline{\theta})$, s'écrit

$$\underline{\theta}(x, t) = A \sum_{n=1}^N e^{i\Omega(k_n)t - ik_n x - \frac{\delta k_n^2}{2\delta k^2}} = A \sum_{n=1}^N e^{i\Omega(k_0 + \delta k_n)t - ik_n x - \frac{\delta k_n^2}{2\delta k^2}}. \quad (7.16)$$

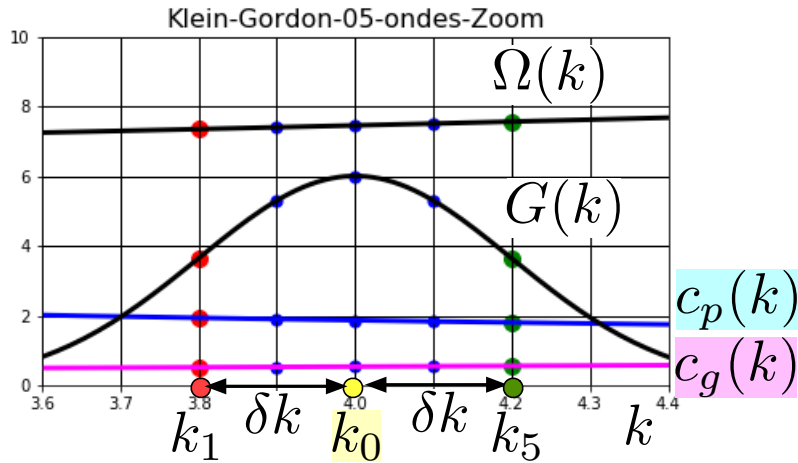


FIGURE 7.5 – Vitesses de phase c_p et de groupe c_g de cinq ondes de nombres d'onde k_1, k_2, \dots, k_5 voisins, avec δk petit, dont les amplitudes $G(k)$ décroissent lorsque k_n s'écarte de k_0 .

En utilisant l'approximation $\Omega(k_0 + \delta k_n) = \omega_0 + c_{g0} \delta k_n$ avec $\omega_0 = \Omega(k_0)$ et $c_{g0} = \Omega'(k_0)$, on peut écrire

$$\underline{\theta}(x, t) = A e^{i\omega_0 t - ik_0 x} F(x - c_{g0} t) \quad \text{avec} \quad F(X) = \sum_{n=1}^N e^{-i\delta k_n X - \frac{\delta k_n^2}{2\delta k^2}}. \quad (7.17)$$

On suppose que les δk_n sont répartis de manière symétrique autour de 0 de sorte que $\delta k_n + \delta k_{N+1-n} = 0$ pour tout n . Il en résulte que l'enveloppe $F(X)$ est réelle. On montre que cette enveloppe tend vers une gaussienne lorsque N tend vers l'infini avec une répartition dense des δk_n .

On a donc montré que le paquet d'onde s'écrit sous la forme

$$\theta(x, t) = A \cos[k_0 (x - c_{p0} t)] F(x - c_{g0} t), \quad (7.18)$$

que l'on peut interpréter comme une onde progressive monochromatique de nombre d'onde k_0 et de vitesse de phase $c_{p0} = c_p(k_0)$, modulée par une enveloppe F qui se propage à la vitesse de groupe $c_{g0} = c_g(k_0)$. La figure 7.6

représente le cas $N = 5$ avec une enveloppe donc l'intervalle de localisation est petit devant sa période mais grand devant la longueur d'onde de la porteuse. Le maximum d'amplitude est obtenu lorsque les ondes monochromatiques de longueurs d'ondes k_n sont en phase.

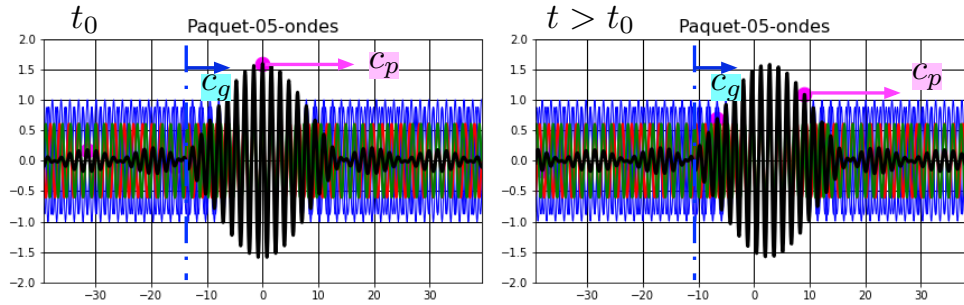


FIGURE 7.6 – Superposition des ondes k_1 (rouge) et k_2 (vert) pour deux instants successifs. L'enveloppe se propage à la vitesse de groupe c_g qui est plus petite que le vitesse de phase c_p .

7 Conclusion

L'exemple d'une chaîne de pendules couplés par des ressorts a permis de donner un sens physique à l'équation de Klein-Gordon, qui constitue un exemple simple d'ondes dispersives. Les ondes progressive monochromatiques solutions de cette équation aux dérivée partielles ont une vitesse de phase, que l'on peut illustrer par la vitesse des maxima, qui dépend du nombre d'onde. La relation de dispersion permet d'exprimer la pulsation d'une telle onde en fonction de son nombre d'onde. La vitesse de groupe, définie par la dérivée de la relation de dispersion, est la vitesse de l'enveloppe d'un paquet d'onde des nombres d'ondes voisins.

FORMULAIRE

Petites oscillations couplées

Couples de rappels C_i^+ et C_i^- exercés par les ressorts sur le pendule i :

$$C_i^+ = +\Gamma_{i,i+1} \quad \text{et} \quad C_i^- = -\Gamma_{i-1,i} \quad \text{avec} \quad \Gamma_{i,i+1} = \frac{\beta}{\delta x} (\theta_{i+1} - \theta_i). \quad (7.19)$$

Équation du mouvement pour les petites oscillations :

$$l^2 \delta m \ddot{\theta}_i = l \delta m g \sin \theta_i + \beta \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\delta x} - \beta \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\delta x}, \quad (7.20)$$

Équation de Klein-Gordon

En notant $\mu = \delta m / \delta x$ la masse linéique de la chaîne, la limite continue $\delta x \rightarrow 0$ avec μ constant conduit à l'équation de Klein-Gordon :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\omega_*^2 \theta + c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad \omega_* = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{\frac{\beta}{l^2 \mu}}. \quad (7.21)$$

Relation de dispersion, vitesse de phase et vitesse de groupe :

$$\Omega(k) = \sqrt{\omega_*^2 + c^2 k^2}, \quad c_p(k) = \frac{\Omega(k)}{k}, \quad c_g(k) = \Omega'(k) = \frac{c^2 k}{\sqrt{\omega_*^2 + c^2 k^2}}. \quad (7.22)$$

Paquet d'ondes

Superposition d'ondes progressives monochromatiques de nombres d'ondes voisins :

$$\theta(x, t) = A \cos[k_0 (x - c_{p0} t)] F(x - c_{g0} t), \quad (7.23)$$

où $F(X)$ est une enveloppe modulant l'onde progressive monochromatique.

$$\text{Cas } N = 2 : \quad F(X) = 2 \cos(\delta k X). \quad (7.24)$$

EXERCICES

EXERCICE 7.1 Paquet d'ondes dispersives

On considère l'équation de Klein-Gordon $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \omega_*^2 \theta = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$.

- 1) Quelle relation doivent vérifier k , σ et ω pour que la notation complexe $\underline{\theta} = A \exp(\sigma t + i \omega t - i k x)$ soit solution ? On suppose A , σ , ω et k réels.

On doit vérifier $\sigma = 0$ ainsi que la relation de dispersion $\omega = \pm \Omega(k)$ avec $\Omega(k) = \sqrt{\omega_*^2 + c^2 k^2}$.

- 2) Quelle relation doivent vérifier k , σ et ω pour que la notation complexe $\underline{\theta} = A \exp(\sigma t + i \omega t - i k x)$ soit solution de l'équation des ondes amorties $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial \theta}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ avec $\mu > 0$? On suppose A , σ , ω et k réels. Comparer les solutions de cette équation avec celle de l'équation de Klein-Gordon dans le cas μ petit.

On doit vérifier $s^2 + 2\mu s + c^2 k^2 = 0$ avec $s = \sigma + i\omega$. Dans le cas $\mu \rightarrow 0$, on a $\sigma \sim -\mu$ et $\omega \sim kc$. Ces ondes sont non dispersives et amorties, tandis que les ondes de l'équation de Klein-Gordon sont dispersives et non amorties.

- 3) On considère la superposition des ondes $\theta_1(x, t) = A \sin(k_1 x - \omega_1 t)$ et $\theta_2(x, t) = A \sin(k_2 x - \omega_2 t)$ avec $k_1 = k_0 - \delta k$, $k_2 = k_0 + \delta k$, $\omega_1 = \Omega(k_1)$ et $\omega_2 = \Omega(k_2)$ où $\Omega(k)$ est la relation de dispersion de l'équation de Klein-Gordon. Montrer que $\theta(x, t) = 2A \cos[k_0 (x - \tilde{c}_p t)] F(x - \tilde{c}_g t)$ où \tilde{c}_p ,

\tilde{c}_g et $F(X)$ sont des grandeurs que l'on précisera.

En appliquant la formule trigonométrique $\sin p + \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ on a $\tilde{c}_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2k_0}$ et $\tilde{c}_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\delta k}$.

- 4) On considère la superposition d'onde progressive monochromatique solution suivante :

$$\theta(x, t) = \frac{A}{N} \sum_{m=-M}^M \cos(k_m x - \omega_m t), \quad (7.25)$$

avec $N = 2M + 1$, $k_m = k_0 + \delta k_m$, $\delta k_m = m \kappa$, $\kappa = 2\delta k/N$ et $\omega_m = \Omega(k_m)$, où $\Omega(k)$ est la relation de dispersion de l'équation de Klein-Gordon. En supposant que δk est petit et en utilisant l'approximation $\Omega(k_m) \sim \Omega(k_0) + c_{g0} \delta k_m$ avec $c_{g0} = \Omega'(k_0)$, montrer que $\theta(x, t) \sim A \cos[k_0(x - c_{p0}t)] F(x - c_{g0}t)$ où $c_{p0} = \Omega(k_0)/k_0$ et $F(X)$ une fonction réelle que l'on déterminera. On pourra admettre ou montrer, au préalable, la relation suivante :

$$\sum_{m=-M}^M u^m = \frac{u^{-(M+\frac{1}{2})} - u^{(M+\frac{1}{2})}}{u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}}. \quad (7.26)$$

En notation complexe, on peut écrire

$$\underline{\theta} = \frac{A}{N} \sum_{m=-M}^M e^{i\Omega(k_0 + \delta k_m)t - i(k_0 + \delta k_m)x} \sim \frac{A}{N} e^{i\Omega(k_0)t - i k_0 x} \sum_{m=-M}^M e^{i\delta k_m(c_{g0}t - x)}, \quad (7.27)$$

On calcule l'expression de l'enveloppe $F(X)$ qui est :

$$F(X) = \frac{1}{N} \sum_{m=-M}^M e^{-i\delta k_m X} = \frac{1}{M} \sum_{m=-M}^M e^{-i m \kappa X} = \frac{1}{M} \sum_{m=-M}^M u^m = \frac{u^{-(M+\frac{1}{2})} - u^{(M+\frac{1}{2})}}{u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}}, \quad (7.28)$$

avec $u = \exp(-i\kappa X)$. On en déduit :

$$F(X) = \frac{1}{N} \frac{\sin[(M + \frac{1}{2})\kappa X]}{\sin(\frac{\kappa}{2}X)} = \frac{\sin(\delta k X)}{N \sin[\frac{\delta k}{N} X]}. \quad (7.29)$$

- 5) La figure 7.7 représente la fonction $G_N(Y) = \frac{\sin Y}{N \sin(Y/N)}$ pour N croissant. Décrire l'enveloppe $F(X)$ pour N grand. Dessiner schématique le paquet d'onde dans le cas $N = 20$ en supposant $\delta k = k_0/100$.

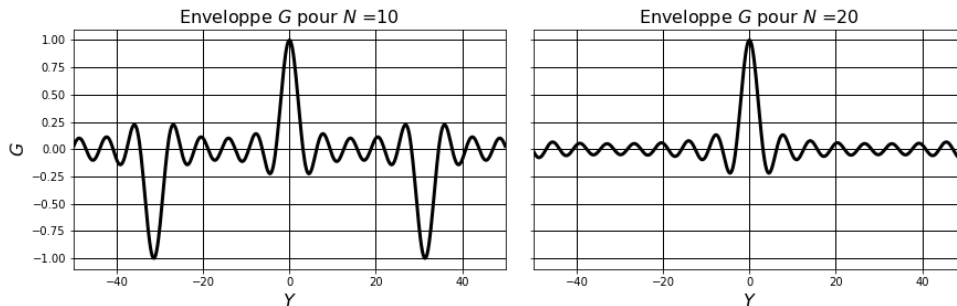


FIGURE 7.7 – Fonction $G_N(Y) = \frac{\sin Y}{N \sin(Y/N)}$ pour $N = 10$ et $N = 20$.

La période de G_N , donc de $F(X) = G_N(\delta k X)$, est de plus en plus grande lorsque N devient grand. La fonction $G_N(Y)$ converge simplement vers la fonction $G(Y) = \sin(Y)/Y$. L'enveloppe, dont l'extension est en $1/\delta k$, se propage à la vitesse de groupes, modulant l'onde porteuse de longueur d'onde $2\pi/k_0$.

Chapitre 8

Modes propres d'oscillations des systèmes discrets

Sommaire

1	Géométrie d'une chaîne masses-ressorts	76
2	Tensions des ressorts et forces sur les masses	76
3	Principe fondamental de la dynamique	77
4	Chaîne avec $N = 2$	78
5	Chaîne avec $N = 3$	78
6	Chaîne avec N quelconque	79
7	Conclusion	80

Introduction

On étudie ici les oscillations d'une chaîne discrète de masses ponctuelles glissant sans frottement sur un axe horizontal et reliées entre elles par des ressorts. Pour simplifier, on se limite ici au cas où les deux extrémités de la chaîne sont fixes mais la généralisation au cas où une ou deux extrémités sont libres est aisée. L'application du principe fondamentale de la dynamique à ces masses conduit à un système linéaire d'équations différentielles ordinaires couplées. En calculant les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de couplage, on peut décrire les oscillations propres d'une chaîne comprenant un nombre N de masses. Lorsque N devient grand, les pulsations normalisées des premiers modes tendent vers des entiers, ce qui permet d'appréhender les modes propres du cas continu.

1 Géométrie d'une chaîne masses-ressorts

On considère une chaîne de $N + 1$ masses ponctuelles glissant sans frottement le long d'un axe Ox (figure 8.1). Les masses sont reliées par des ressorts identiques de masse négligeable. En l'absence de forces et de mouvement, c'est-à-dire au repos, les masses sont en $x = a_i$ pour $i = 0, N$ et séparées par une distance $\delta a_N = L/N$ où L est la longueur totale de la chaîne.

On suppose que la masse des masses ponctuelles est $\delta m_N = m/N$, sauf pour aux extrémités où elles valent $\delta m_N/2$. La masse total de la chaîne vaut donc m . On note $\mu = m/L$ la masse linéique de la chaîne.

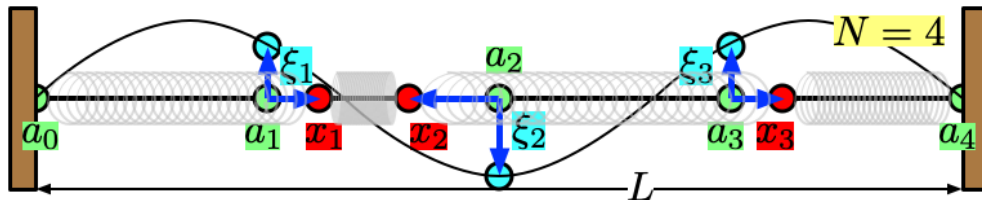


FIGURE 8.1 – Géométrie d'une chaîne masses-ressorts dans le cas $N = 4$. La courbe est une interpolation des déplacements ξ_i pour $i = 0, N$.

On suppose que les extrémités sont fixes. Lorsque la chaîne est en mouvement, on note $x_i(t)$, pour $i = 1, N - 1$ les positions des masses et $\xi_i(t) = x_i(t) - a_i$ leurs déplacements. On a $\xi_0 = \xi_N = 0$ pour les masses situées aux extrémités.

2 Tensions des ressorts et forces sur les masses

Pour $i = 0, N - 1$, on note $T_{i,i+1}$ la tension du ressort compris entre les masse d'abscisses x_i et x_{i+1} , définie à partir des forces suivantes (figure 8.2) :

- La force exercée sur la masse x_i par le ressort situé à sa droite est $F_i^+ = +T_{i,i+1}$.
- La force exercée sur la masse x_i par le ressort situé à sa gauche est $F_i^- = -T_{i-1,i}$.

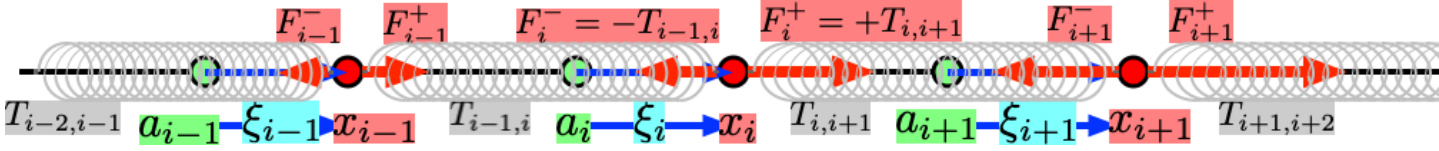


FIGURE 8.2 – La tension T d'un ressort est définie par les forces $F^+ = +T$ et $F^- = -T$ exercées sur les masses.

La loi de Hooke décrit le comportement rhéologique d'un ressort en exprimant que sa tension est proportionnelle à son allongement :

$$T_{i,i+1} = k_N [(x_{i+1} - x_i) - (a_{i+1} - a_i)] = k_N (\xi_{i+1} - \xi_i), \quad (8.1)$$

où k_N est la raideur des ressorts. En effet, la longueur $\delta a_N = a_{i+1} - a_i$ devient $x_{i+1} - x_i$ après déformation et les relations $x_{i+1} = a_{i+1} + \xi_{i+1}$ et $x_i = a_i + \xi_i$ permettent de voir que l'allongement du ressort est égal à la différence des déplacements de ses extrémités.

On définit α par la relation $k_N = \alpha/\delta a_N = \alpha N/L$. Cette constante, dont l'unité est le Newton, ne dépend que du matériau dont est constitué le ressort et de son enroulement. Il est indépendant de la longueur des ressorts, et donc de N , et il permet d'écrire la loi de Hooke sous la forme

$$T_{i,i+1} = \alpha \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\delta a_N}. \quad (8.2)$$

3 Principe fondamental de la dynamique

Pour $i = i, N - 1$, le principe fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\delta m_N \ddot{x}_i = F_i^- + F_i^+. \quad (8.3)$$

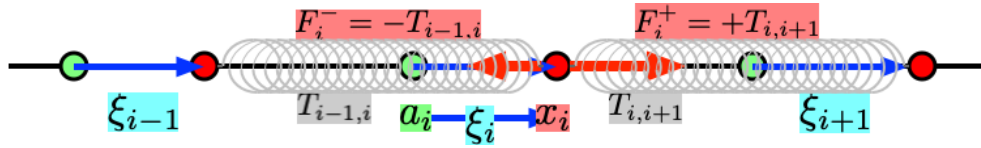


FIGURE 8.3 – Forces exercées sur la masse ponctuelle d'abscisse x_i .

Comme $\ddot{x}_i = \ddot{\xi}_i$ et que les forces sont $F_i^- = -T_{i-1,i} = -k_N (\xi_i - \xi_{i-1})$ et $F_i^+ = +T_{i,i+1} = k_N (\xi_{i+1} - \xi_i)$, par définition de la tension et application de la loi de Hooke, on peut écrire

$$\delta m_N \ddot{\xi}_i = k_N (\xi_{i+1} - \xi_i) - k_N (\xi_i - \xi_{i-1}) = k_N (\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}). \quad (8.4)$$

En utilisant $\delta m_N = \mu \delta a_N$, $k_N = \alpha/\delta a_N$ et en notant $c = \sqrt{\alpha/\mu}$, on obtient

$$\ddot{\xi}_i = \frac{c^2}{\delta a_N^2} (\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}). \quad (8.5)$$

4 Chaîne avec $N = 2$

Dans le cas $N = 2$, une seule masse d'abscisse $x_1(t) = a_1 + \xi_1(t)$ oscille en étant reliée à deux ressorts (figure 8.4). On a $\delta a_2 = L/2$ et $\delta m_2 = m/2$ et toujours $\mu = m/L$.

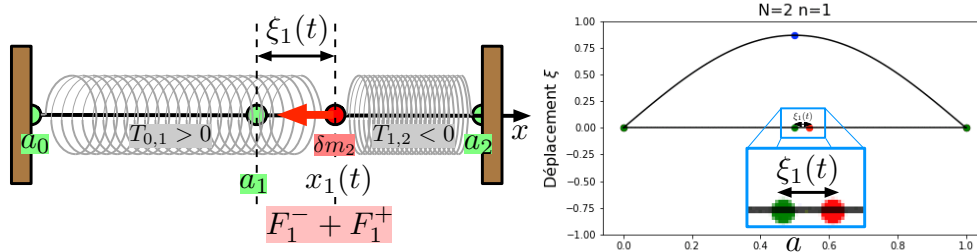


FIGURE 8.4 – Chaîne masses-ressorts dans le cas $N = 2$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à cette masse s'écrit

$$\delta m_2 \ddot{\xi}_1 = F_1^- + F_1^+ = -k_2 (\xi_1 - \xi_0) + k_2 (\xi_2 - \xi_1). \quad (8.6)$$

Comme $\xi_0 = \xi_2 = 0$, puisque les extrémités sont fixes, et en utilisant $k_2 = \alpha/\delta_2$, $\delta m_2 = \mu \delta a_2$ et $c = \sqrt{\alpha/\mu}$, on obtient

$$\ddot{\xi}_1 = \frac{c^2}{\delta a_2^2} (-2)\xi_1 \iff \ddot{\xi}_1 = -\omega_{2,1}^2 \xi_1 \quad \text{avec} \quad \omega_{2,1} = \frac{c}{\delta a_2} \sqrt{-s_{2,1}}, \quad (8.7)$$

en notant $s_{2,1} = -2$. Les solutions de l'équation différentielle ordinaire du second degré sont donc de la forme $\xi_1 = A_{2,1} \cos(\omega_{2,1} t + \varphi_{2,1})$, où $A_{2,1}$ et $\varphi_{2,1}$ sont des constantes qui dépendent des conditions initiales $\xi_1(0)$ et $\dot{\xi}_1(0)$. En notant $\Omega_{2,1} = \frac{L}{\pi c} \omega_{2,1}$ la pulsation adimensionnée, on peut calculer

$$\Omega_{2,1} = \frac{L}{\pi c} \frac{c}{\delta a_2} \sqrt{-s_{2,1}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{-s_{2,1}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0,900. \quad (8.8)$$

5 Chaîne avec $N = 3$

Dans le cas $N = 3$, les deux masses en $x_1(t) = a_1 + \xi_1(t)$ et $x_2(t) = a_2 + \xi_2(t)$ oscillent en étant reliées à trois ressorts (figure 8.5). On a $\delta a_3 = L/3$, $\delta m_3 = m/3$ et toujours $\mu = m/L$.

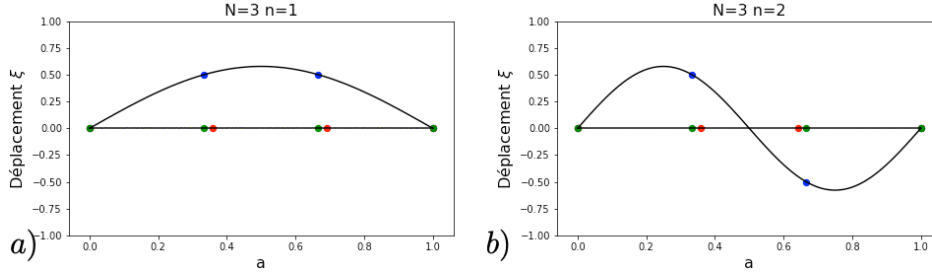
Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ces deux masses s'écrit

$$\ddot{\xi}_1 = \frac{c^2}{\delta a_3^2} (\xi_2 - 2\xi_1 + \xi_0) \quad \text{et} \quad \ddot{\xi}_2 = \frac{c^2}{\delta a_3^2} (\xi_3 - 2\xi_2 + \xi_1). \quad (8.9)$$

Comme $\xi_0 = \xi_3 = 0$, on peut écrire ce système sous la forme

$$\ddot{\underline{\xi}}_3 = \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \frac{c^2}{\delta a_3^2} \underline{A}_3 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \underline{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Les valeurs propres de la matrice \underline{A}_3 sont $s_{3,1} = -1$ et $s_{3,2} = -3$ et les vecteurs propres associés sont respectivement $\underline{\Phi}_{3,1} = (1, 1)^T$ et $\underline{\Phi}_{3,2} = (1, -1)^T$. On peut


 FIGURE 8.5 – Chaîne dans le cas $N = 3$. a) mode $n = 1$. b) mode $n = 2$.

alors décomposer le vecteur $\underline{\xi}_3 = (\xi_1, \xi_2)^T$ sur la base propre de diagonalisation de la matrice \underline{A}_3 :

$$\underline{\xi}_3 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \zeta_{3,1} \underline{\Phi}_{3,1} + \zeta_{3,2} \underline{\Phi}_{3,2}, \quad (8.11)$$

Comme $\underline{A}_3 (\zeta_{3,1} \underline{\Phi}_{3,1} + \zeta_{3,2} \underline{\Phi}_{3,2}) = s_{3,1} \zeta_{3,1} \underline{\Phi}_{3,1} + s_{3,2} \zeta_{3,2} \underline{\Phi}_{3,2}$, l'équation du mouvement, s'écrit $\ddot{\underline{\xi}}_3 = \ddot{\zeta}_{3,1} \underline{\Phi}_{3,1} + \ddot{\zeta}_{3,2} \underline{\Phi}_{3,2} = \frac{c^2}{\delta a_3^2} (s_{3,1} \zeta_{3,1} \underline{\Phi}_{3,1} + s_{3,2} \zeta_{3,2} \underline{\Phi}_{3,2})$. On en déduit

$$\ddot{\zeta}_{3,1} = \frac{c^2}{\delta a_3^2} s_{3,1} \zeta_{3,1} \iff \ddot{\zeta}_{3,1} = \omega_{3,1}^2 \zeta_{3,1} \text{ avec } \omega_{3,1} = \frac{c}{\delta a_3} \sqrt{-s_{3,1}}, \quad (8.12)$$

$$\ddot{\zeta}_{3,2} = \frac{c^2}{\delta a_3^2} s_{3,2} \zeta_{3,2} \iff \ddot{\zeta}_{3,2} = \omega_{3,2}^2 \zeta_{3,2} \text{ avec } \omega_{3,2} = \frac{c}{\delta a_3} \sqrt{-s_{3,2}}. \quad (8.13)$$

Les solutions sont $\zeta_{3,1} = A_{3,1} \cos(\omega_{3,1} t + \varphi_{3,1})$ et $\zeta_{3,2} = A_{3,2} \cos(\omega_{3,2} t + \varphi_{3,2})$ où $A_{3,1}$, $A_{3,2}$, $\varphi_{3,1}$ et $\varphi_{3,2}$ sont des constantes qui dépendent des conditions initiales $\zeta_{3,1}(0)$, $\dot{\zeta}_{3,1}(0)$, $\zeta_{3,2}(0)$ et $\dot{\zeta}_{3,2}(0)$.

En notant $\Omega_{3,1} = \frac{L}{\pi c} \omega_{3,1}$ et $\Omega_{3,2} = \frac{L}{\pi c} \omega_{3,2}$ les pulsations adimensionnées, on peut calculer

$$\Omega_{3,1} = \frac{3}{\pi} \sqrt{-s_{3,1}} = \frac{3}{\pi} = 0,955 \quad (8.14)$$

$$\Omega_{3,2} = \frac{3}{\pi} \sqrt{-s_{3,2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} = 1,654. \quad (8.15)$$

6 Chaîne avec N quelconque

Dans le cas général, on a $\delta a_N = L/N$, $\delta m_N = m/N$ avec les notations $\mu = m/L$ et $c = \sqrt{\alpha/\mu}$. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ces deux masses s'écrit

$$\ddot{\underline{\xi}}_N = \frac{c^2}{\delta a_N^2} \underline{A}_N \underline{\xi}_N, \quad (8.16)$$

où les composante de la matrice $(N-1) \times (N-1)$ sont $A_N(i, i) = -2$ pour $i = 1, N-1$, $A_N(i-1, i) = 1$ pour $i = 2, N-1$ et $A_N(i, i+1) = 1$ pour $i = 1, N-2$. On peut montrer que les valeurs propres $s_{N,n}$ pour $n = 1, N-1$

de la matrice \underline{A}_3 sont toutes négatives et que les vecteurs propres associés $\underline{\Phi}_{N,n}$ forment une base. La décomposition $\underline{\xi}_N(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \zeta_{N,n}(t) \underline{\Phi}_{N,n}$ conduit aux équations $\ddot{\zeta}_{N,n} = -\omega_{N,n}^2 \zeta_{N,n}$ avec $\omega_{N,n} = (c/\delta_N) \sqrt{-s_{N,n}}$. Les solutions sont de la forme $\zeta_{N,n}(t) = A_{N,n} \cos(\omega_{N,n} t + \varphi_{N,n})$ où les $A_{N,n}$ et $\varphi_{N,n}$ sont des constantes qui dépendent des conditions initiales $\zeta_{N,n}(0)$ et $\dot{\zeta}_{N,n}(0)$ intervenant dans la décomposition sur la base propre des conditions initiales $\underline{\xi}_N(0) = \sum_{n=1}^{N-1} \zeta_{N,n}(0) \underline{\Phi}_{N,n}$ et $\dot{\underline{\xi}}_N(0) = \sum_{n=1}^{N-1} \dot{\zeta}_{N,n}(0) \underline{\Phi}_{N,n}$. En notant $\Omega_{N,n} = \frac{L}{\pi c} \omega_{N,n}$ les pulsations adimensionnées, on peut calculer

$$\Omega_{N,n} = \frac{N}{\pi} \sqrt{-s_{N,n}}. \quad (8.17)$$

Le tracé de ces valeurs pour différentes valeurs de N avec $n = 1, N-1$, permet de constater la relation $\Omega_{N,n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} n$ (figure 8.6).

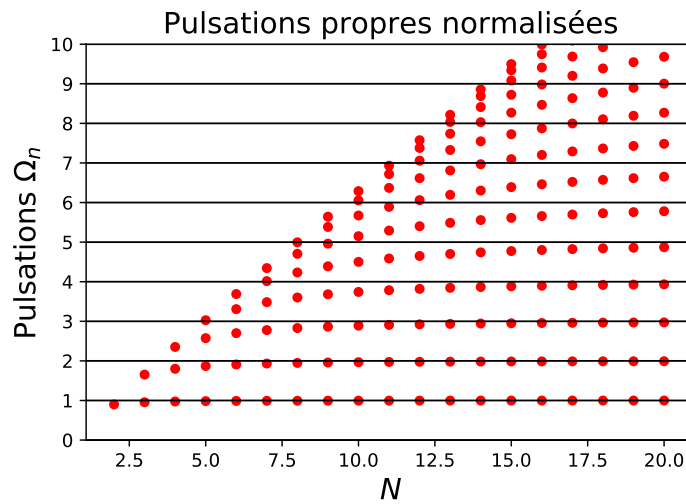


FIGURE 8.6 – Valeur des pulsations adimensionnées $\Omega_{N,n}$ pour $N = 1, 10$ et $n = 1, N-1$.

L'examen des composantes des vecteurs propres $\underline{\Phi}_{N,n}$ (figure 8.7 pour $N = 10$) permet de constater que les oscillations propres s'approchent, lorsque N est grand, des solutions stationnaires de l'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ avec les conditions aux limites $\xi(0, t) = \xi(L, t)$, qui s'écrivent $\xi_n(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$ pour les pulsations propres $\omega_n = n \pi c / L$ avec n entier et les nombre d'onde $k_n = \omega_n / c = n \pi / L$. On a bien $\omega_{N,n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \omega_n$.

7 Conclusion

Les oscillations des chaînes de masses-ressorts pour $N = 2$ (un ressort mobile) et $N = 3$ (deux ressorts mobile) ont été détaillées puis généralisées au cas N quelconque. Les notations et l'adimensionnalisation des pulsations propres ont été choisies dans l'optique de faire tendre N vers l'infini. On retrouve dans ce cas les modes propres continus d'oscillation d'un barreau élastique ou d'un ressort de masse linéique donné, solutions stationnaires de l'équation de D'Alembert avec conditions aux limites de Dirichlet.

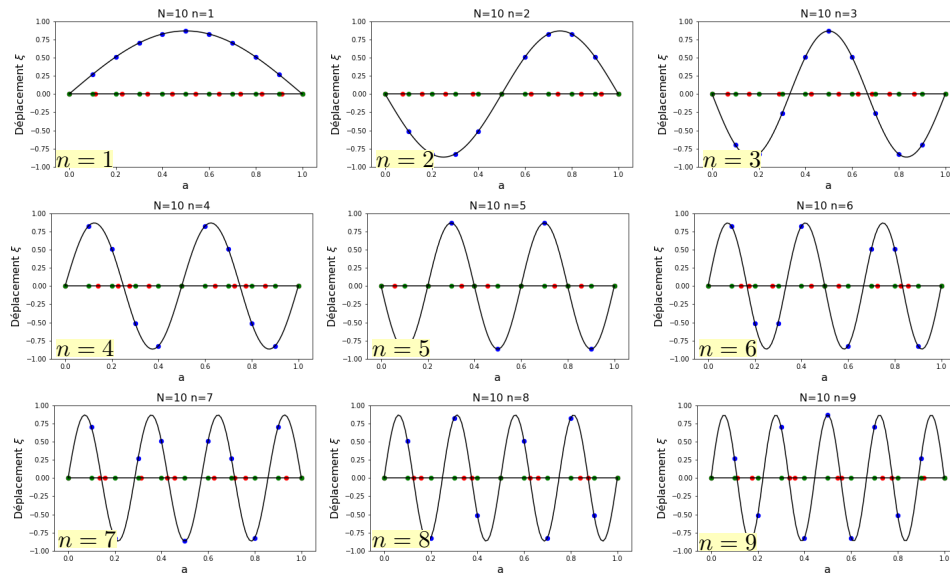


FIGURE 8.7 – Modes propres d’oscillation pour $N = 10$ au $2/3$ de la période.

FORMULAIRE

Loi de Hooke 1D

Tension dans ressort dont les extrémités subissent les déplacement ξ_i et ξ_{i+1} :

$$T_{i,i+1} = \alpha \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\delta a_N} . \quad (8.18)$$

Équation du mouvement

Les déplacements sont régis par le système couplé :

$$\ddot{\xi}_i = \frac{c^2}{\delta a_N^2} (\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}) \text{ pour } i = 1, N-1 \quad (8.19)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\underline{\xi}}_N = \frac{c^2}{\delta a_N^2} \underline{A}_N \underline{\xi}_N \text{ avec } \underline{A}_N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} . \quad (8.20)$$

Pulsation des modes propres

La diagonalisation de la matrice \underline{A}_N , de valeurs propres $s_{N,n}$ négatives, permet de calculer les pulsations adimensionnées $\Omega_{N,n}$ avec $n = 1, N-1$ des oscillations

propres :

$$\Omega_{N,n} = \frac{L}{\pi c} \omega_{N,n} = \frac{N}{\pi} \sqrt{-s_{N,n}} \quad \text{avec} \quad \omega_{N,n} = \frac{c}{\delta_N} \sqrt{-s_{N,n}}. \quad (8.21)$$

$$\text{On observe : } \Omega_{N,n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} n. \quad (8.22)$$

EXERCICES

EXERCICE 8.1 Modes propres

On considère une chaîne de $N + 1$ masses ponctuelles glissant sans frottement sur un axe horizontal et reliées par des ressorts de masse négligeable. Les masses ponctuelles situées en $a_0 = 0$ et $a_N = L$, de masse $\delta m_N/2$, avec $\delta m_N = m/N$ sont fixes. Les masses ponctuelles situées en $a_i = i \delta a$ au repos pour $i = 1, N-1$, avec $\delta a_N = L/N$, sont de masses $\delta m_N = m/N$. Les raideurs des ressorts sont identiques et valent $k_N = \alpha/\delta a_N$. On note $\mu = m/L$ la masse linéique de la chaîne et $c = \sqrt{\alpha/\mu}$. On note ξ_i , pour $i = 1, N-1$, les déplacements des masses et $\underline{\xi}_N = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1})^T$ est un vecteur colonne de \mathbb{R}^{N-1} .

- 1) Calculer la masse totale de la chaîne, en comptant ses extrémités.
| La masse totale est $m = \frac{1}{2} \delta m_N + (N-1) \delta m_N + \frac{1}{2} \delta m_N = N \delta m_N$.
- 2) Calculer sa longueur totale.
| La longueur totale est $L = N \delta a_N$.

Cas $N = 2$

- 3) Dessiner la configuration de la chaîne masses-ressorts dans le cas $N = 2$
| Il y a une seule masse mobile au centre de la chaîne.
- 4) Montrer que l'équation du mouvement s'écrit $\ddot{\xi}_1 = A_1 (c/\delta a_2)^2 \xi_1$, où A_1 est une constante que l'on déterminera
| On appliquant le principe fondamental et la loi de comportement rhéologique du ressort, on obtient $A_1 = -2$.
- 5) En déduire que $\xi_1(t) = A_{2,1} \cos(\omega_{2,1} t + \varphi_{2,1})$ où $A_{2,1}$ et $\varphi_{2,1}$ sont des constantes arbitraires et $\omega_{2,1}$ est une pulsation que l'on déterminera.
| L'équation du mouvement s'écrit $\ddot{\xi}_1 = -\omega_{2,1}^2 \xi_1$ avec $\omega_{2,1} = (c/\delta a_2) \sqrt{2}$.
- 6) En déduire la valeur de la pulsation adimensionnée $\Omega_{2,1} = (L/\pi c) \omega_{2,1}$.
| On trouve $\Omega_{2,1} = 2 \sqrt{2}/\pi = 0,900$.

Cas $N = 3$

- 7) Dessiner la configuration de la chaîne masses-ressorts dans le cas $N = 3$
| Il y a deux masses mobiles à l'intérieur de la chaîne.
- 8) Montrer que l'équation du mouvement s'écrit $\ddot{\underline{\xi}}_3 = \underline{\underline{A}}_3 (c/\delta a_3)^2 \underline{\xi}_3$, où $\underline{\xi}_3 =$

$(\xi_1, \xi_2)^T$ est un vecteur colonne à deux composantes et \underline{A}_2 est une matrice 2×2 que l'on déterminera.

On appliquant le principe fondamentale et la loi de comportement rhéologique du ressort, on obtient $\underline{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

9) Calculer les valeurs propres $s_{3,1}$ et $s_{3,2}$ et les vecteurs propres $\underline{\Phi}_{3,1}$ et $\underline{\Phi}_{3,2}$ de la matrice \underline{A}_2 .

La valeur propre $s_{3,1} = -1$ est associée au vecteur propre $\underline{\Phi}_{3,1} = (1, 1)^T$. La valeur propre $s_{3,2} = -3$ est associée au vecteur propre $\underline{\Phi}_{3,2} = (1, -1)^T$.

10) Justifier que pour tout vecteur $\underline{\xi}_3 = (\xi_1, \xi_2)^T$, il existe $\zeta_{3,1}$ et $\zeta_{3,2}$ tels que $\underline{\xi}_3 = (\xi_1, \xi_2)^T = \zeta_{3,1} \underline{\Phi}_{3,1} + \zeta_{3,2} \underline{\Phi}_{3,2}$.

Les deux vecteurs $\underline{\Phi}_{3,1}$ et $\underline{\Phi}_{3,2}$ sont indépendants. Ils forment la base de diagonalisation de la matrice \underline{A}_3 .

11) En déduire que $\zeta_{3,1} = A_{3,1} \cos(\omega_{1,3} t + \varphi_{3,1})$ et où $A_{3,1}$ et $\varphi_{3,1}$ sont des constantes arbitraires et $\omega_{3,1}$ est une pulsation que l'on déterminera. Même question pour $\zeta_{3,2}$ en changeant les indices.

Comme $\underline{A}_3 \underline{\Phi}_{3,1} = s_{3,1} \underline{\Phi}_{3,1}$ et $\underline{A}_3 \underline{\Phi}_{3,2} = s_{3,2} \underline{\Phi}_{3,2}$, l'équation du mouvement s'écrit $\ddot{\zeta}_{3,1} = -\omega_{3,1}^2 \zeta_{3,1}$ et $\ddot{\zeta}_{3,2} = -\omega_{3,2}^2 \zeta_{3,2}$ avec $\omega_{3,1} = (c/\delta a_3) \sqrt{-s_{3,1}}$ et $\omega_{3,2} = (c/\delta a_3) \sqrt{-s_{3,2}}$.

12) En déduire les valeurs des pulsations adimensionnées $\Omega_{3,1} = (L/\pi c) \omega_{3,1}$ et $\Omega_{3,2} = (L/\pi c) \omega_{3,2}$.

On trouve $\Omega_{3,1} = 3/\pi = 0,955$ et $\Omega_{3,2} = 3\sqrt{3}/\pi = 1,654$.

13) Décrire et dessiner la forme des oscillations associées aux pulsations adimensionnées $\Omega_{3,1}$ et $\Omega_{3,2}$.

La pulsation $\Omega_{3,1}$ correspond à une oscillation telle que $\xi_1 = \xi_2$ dans la mesure où elle est associée au vecteur propre $\underline{\Phi}_{3,1} = (1, 1)^T$. Les déplacements sont en alors en phase. La pulsation $\Omega_{3,2}$ correspond à une oscillation telle que $\xi_1 = -\xi_2$ dans la mesure où elle est associée au vecteur propre $\underline{\Phi}_{3,2} = (1, -1)^T$. Les déplacements sont en alors en opposition de phase.

Cas $N = 4$

14) Dessiner la configuration de la chaîne masses-ressorts dans le cas $N = 3$

Voir figure 8.1.

15) Calculer les valeurs des pulsations adimensionnées $\Omega_{4,n}$ pour $n \in \{1, 2, 3\}$.

On trouve $\Omega_{4,1} = 0,974$, $\Omega_{4,2} = 1,800$ et $\Omega_{4,3} = 2,353$.

Cas N grand

La figure 8.6 indique les valeurs des pulsations adimensionnées $\Omega_{N,n}$ pour $N = 1, 10$ et $n = 1, N - 1$.

16) Vers quelles valeurs tendent les pulsations $\Omega_{N,n}$ quand $N \rightarrow \infty$?

On peut écrire $\Omega_{N,n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} n$.

Bibliographie

Ouvrage de physique du programme PC des CPGE

- [1] M.-N. Sanz, B.Salamito, D. Chardo, Physique tout en un, Programme PC, Dunod, 2016
<http://univ-toulouse.scholarvox.com/reader/docid/88841874>

Webographie

- [2] A repository of Animated GIFs by Flipping Physics!
<https://www.flippingphysics.com/gifs.html>
- [3] P. FALSTAD, Oscillations and Waves,
<http://www.falstad.com>
- [4] O. THUAL , 2019, vidéo teaser du cours "Dynamique des ondes", Toulouse INP - ENSEEIHT, 2MFEE
<https://is.gd/CMD5II>

Livre sur les ondes, niveau Master

- [5] O. THUAL, Des ondes et des fluides, Cépaduès-Éditions, 2005.
<http://www.cepadues.com>
- [6] O. THUAL, Instabilités hydrodynamiques, *Éd. Ress. Pédago. Ouv. INP 1017* (2020) 12h
<http://pedagotech.inp-toulouse.fr/201017>
- [7] O. THUAL, [200413] O. Thual, Hydraulique à surface libre, *Éd. Ress. Pédago. Ouv. INP 0122* (2020) 40h
<http://pedagotech.inp-toulouse.fr/200122>
- [8] O. THUAL, Hydraulique pour l'ingénieur généraliste, *Éd. Ress. Pédago. Ouv. INP 0714* (2018) 16h
<http://pedagotech.inp-toulouse.fr/180714>