

# Chapitre 8

## Modes propres d'oscillations des systèmes discrets

*O. Thual, 2 octobre 2021*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Géométrie d'une chaîne masses-ressorts . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Tensions des ressorts et forces sur les masses . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Principe fondamental de la dynamique . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Chaîne avec <math>N = 2</math> . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Chaîne avec <math>N = 3</math> . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Chaîne avec <math>N</math> quelconque . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>6</b>

---

## Introduction

On étudie ici les oscillations d'une chaîne discrète de masses ponctuelles glissant sans frottement sur un axe horizontal et reliées entre elles par des ressorts. Pour simplifier, on se limite ici au cas où les deux extrémités de la chaîne sont fixes mais la généralisation au cas où une ou deux extrémités sont libres est aisée. L'application du principe fondamentale de la dynamique à ces masses conduit à un système linéaire d'équations différentielles ordinaires couplées. En calculant les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de couplage, on peut décrire les oscillations propres d'une chaîne comprenant un nombre  $N$  de masses. Lorsque  $N$  devient grand, les pulsations normalisées des premiers modes tendent vers des entiers, ce qui permet d'appréhender les modes propres du cas continu.

### 1 Géométrie d'une chaîne masses-ressorts

On considère une chaîne de  $N + 1$  masses ponctuelles glissant sans frottement le long d'un axe  $Ox$  (figure 8.1). Les masses sont reliées par des ressorts identiques de masse négligeable. En l'absence de forces et de mouvement, c'est-à-dire au repos, les masses sont en  $x = a_i$  pour  $i = 0, N$  et séparées par une distance  $\delta a_N = L/N$  où  $L$  est la longueur totale de la chaîne.

On suppose que la masse des masses ponctuelles est  $\delta m_N = m/N$ , sauf pour aux extrémités où elles valent  $\delta m_N/2$ . La masse total de la chaîne vaut donc  $m$ . On note  $\mu = m/L$  la masse linéique de la chaîne.

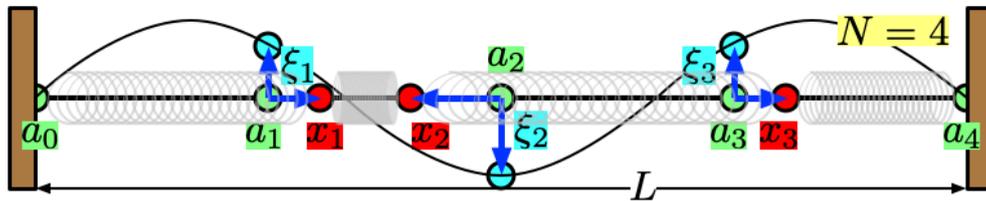


FIGURE 8.1 – Géométrie d'une chaîne masses-ressorts dans le cas  $N = 4$ . La courbe est une interpolation des déplacements  $\xi_i$  pour  $i = 0, N$ .

On suppose que les extrémités sont fixes. Lorsque la chaîne est en mouvement, on note  $x_i(t)$ , pour  $i = 1, N - 1$  les positions des masses et  $\xi_i(t) = x_i(t) - a_i$  leurs déplacements. On a  $\xi_0 = \xi_N = 0$  pour les masses situées aux extrémités.

### 2 Tensions des ressorts et forces sur les masses

Pour  $i = 0, N - 1$ , on note  $T_{i,i+1}$  la tension du ressort compris entre les masse d'abscisses  $x_i$  et  $x_{i+1}$ , définie à partir des forces suivantes (figure 8.2) :

- La force exercée sur la masse  $x_i$  par le ressort situé à sa droite est  $F_i^+ = +T_{i,i+1}$ .
- La force exercée sur la masse  $x_i$  par le ressort situé à sa gauche est  $F_i^- = -T_{i-1,i}$ .

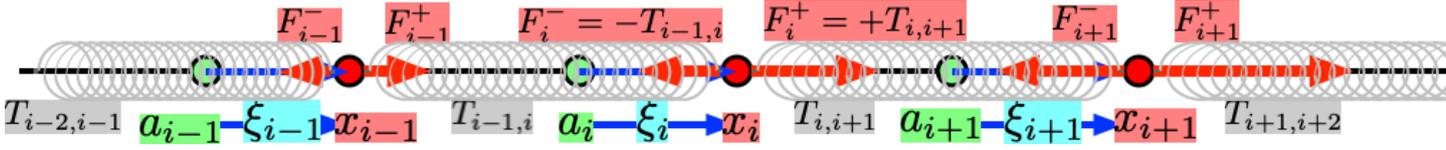


FIGURE 8.2 – La tension  $T$  d'un ressort est définie par les forces  $F^+ = +T$  et  $F^- = -T$  exercées sur les masses.

La loi de Hooke décrit le comportement rhéologique d'un ressort en exprimant que sa tension est proportionnelle à son allongement :

$$T_{i,i+1} = k_N [(x_{i+1} - x_i) - (a_{i+1} - a_i)] = k_N (\xi_{i+1} - \xi_i), \quad (8.1)$$

où  $k_N$  est la raideur des ressorts. En effet, la longueur  $\delta a_N = a_{i+1} - a_i$  devient  $x_{i+1} - x_i$  après déformation et les relations  $x_{i+1} = a_{i+1} + \xi_{i+1}$  et  $x_i = a_i + \xi_i$  permettent de voir que l'allongement du ressort est égal à la différence des déplacements de ses extrémités.

On définit  $\alpha$  par la relation  $k_N = \alpha/\delta a_N = \alpha N/L$ . Cette constante, dont l'unité est le Newton, ne dépend que du matériau dont est constitué le ressort et de son enroulement. Il est indépendant de la longueur des ressorts, et donc de  $N$ , et il permet d'écrire la loi de Hooke sous la forme

$$T_{i,i+1} = \alpha \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\delta a_N}. \quad (8.2)$$

### 3 Principe fondamental de la dynamique

Pour  $i = i, N - 1$ , le principe fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\delta m_N \ddot{x}_i = F_i^- + F_i^+. \quad (8.3)$$

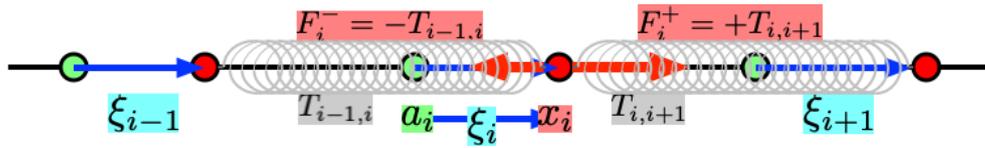


FIGURE 8.3 – Forces exercées sur la masse ponctuelle d'abscisse  $x_i$ .

Comme  $\ddot{x}_i = \ddot{\xi}_i$  et que les forces sont  $F_i^- = -T_{i-1,i} = -k_N (\xi_i - \xi_{i-1})$  et  $F_i^+ = +T_{i,i+1} = k_N (\xi_{i+1} - \xi_i)$ , par définition de la tension et application de la loi de Hooke, on peut écrire

$$\delta m_N \ddot{\xi}_i = k_N (\xi_{i+1} - \xi_i) - k_N (\xi_i - \xi_{i-1}) = k_N (\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}). \quad (8.4)$$

En utilisant  $\delta m_N = \mu \delta a_N$ ,  $k_N = \alpha/\delta a_N$  et en notant  $c = \sqrt{\alpha/\mu}$ , on obtient

$$\ddot{\xi}_i = \frac{c^2}{\delta a_N^2} (\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}). \quad (8.5)$$

## 4 Chaîne avec $N = 2$

Dans le cas  $N = 2$ , une seule masse d'abscisse  $x_1(t) = a_1 + \xi_1(t)$  oscille en étant reliée à deux ressorts (figure 8.4). On a  $\delta a_2 = L/2$  et  $\delta m_2 = m/2$  et toujours  $\mu = m/L$ .

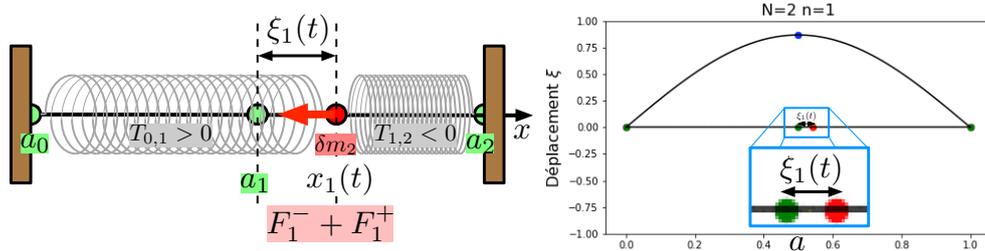


FIGURE 8.4 – Chaîne masses-ressorts dans le cas  $N = 2$ .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à cette masse s'écrit

$$\delta m_2 \ddot{\xi}_1 = F_1^- + F_1^+ = -k_2 (\xi_1 - \xi_0) + k_2 (\xi_2 - \xi_1). \quad (8.6)$$

Comme  $\xi_0 = \xi_2 = 0$ , puisque les extrémités sont fixes, et en utilisant  $k_2 = \alpha/\delta_2$ ,  $\delta m_2 = \mu \delta a_2$  et  $c = \sqrt{\alpha/\mu}$ , on obtient

$$\ddot{\xi}_1 = \frac{c^2}{\delta a_2^2} (-2)\xi_1 \iff \ddot{\xi}_1 = -\omega_{2,1}^2 \xi_1 \quad \text{avec} \quad \omega_{2,1} = \frac{c}{\delta a_2} \sqrt{-s_{2,1}}, \quad (8.7)$$

en notant  $s_{2,1} = -2$ . Les solutions de l'équation différentielle ordinaire du second degré sont donc de la forme  $\xi_1 = A_{2,1} \cos(\omega_{2,1} t + \varphi_{2,1})$ , où  $A_{2,1}$  et  $\varphi_{2,1}$  sont des constantes qui dépendent des conditions initiales  $\xi_1(0)$  et  $\dot{\xi}_1(0)$ . En notant  $\Omega_{2,1} = \frac{L}{\pi c} \omega_{2,1}$  la pulsation adimensionnée, on peut calculer

$$\Omega_{2,1} = \frac{L}{\pi c} \frac{c}{\delta a_2} \sqrt{-s_{2,1}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{-s_{2,1}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0,900. \quad (8.8)$$

## 5 Chaîne avec $N = 3$

Dans le cas  $N = 3$ , les deux masses en  $x_1(t) = a_1 + \xi_1(t)$  et  $x_2(t) = a_2 + \xi_2(t)$  oscillent en étant reliées à trois ressorts (figure 8.5). On a  $\delta a_3 = L/3$ ,  $\delta m_3 = m/3$  et toujours  $\mu = m/L$ .

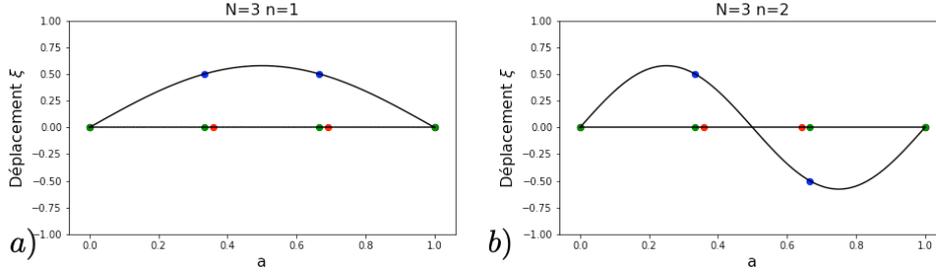
Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ces deux masses s'écrit

$$\ddot{\xi}_1 = \frac{c^2}{\delta a_3^2} (\xi_2 - 2\xi_1 + \xi_0) \quad \text{et} \quad \ddot{\xi}_2 = \frac{c^2}{\delta a_3^2} (\xi_3 - 2\xi_2 + \xi_1). \quad (8.9)$$

Comme  $\xi_0 = \xi_3 = 0$ , on peut écrire ce système sous la forme

$$\ddot{\underline{\xi}}_3 = \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \frac{c^2}{\delta a_3^2} \underline{A}_3 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \underline{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Les valeurs propres de la matrice  $\underline{A}_3$  sont  $s_{3,1} = -1$  et  $s_{3,2} = -3$  et les vecteurs propres associés sont respectivement  $\underline{\Phi}_{3,1} = (1, 1)^T$  et  $\underline{\Phi}_{3,2} = (1, -1)^T$ . On peut


 FIGURE 8.5 – Chaîne dans le cas  $N = 3$ . a) mode  $n = 1$ . b) mode  $n = 2$ .

alors décomposer le vecteur  $\underline{\xi}_3 = (\xi_1, \xi_2)^T$  sur la base propre de diagonalisation de la matrice  $\underline{A}_3$  :

$$\underline{\xi}_3 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \zeta_{3,1} \underline{\Phi}_{3,1} + \zeta_{3,2} \underline{\Phi}_{3,2}, \quad (8.11)$$

Comme  $\underline{A}_3 (\zeta_{3,1} \underline{\Phi}_{3,1} + \zeta_{3,2} \underline{\Phi}_{3,2}) = s_{3,1} \zeta_{3,1} \underline{\Phi}_{3,1} + s_{3,2} \zeta_{3,2} \underline{\Phi}_{3,2}$ , l'équation du mouvement, s'écrit  $\ddot{\underline{\xi}}_3 = \ddot{\zeta}_{3,1} \underline{\Phi}_{3,1} + \ddot{\zeta}_{3,2} \underline{\Phi}_{3,2} = \frac{c^2}{\delta a_3^2} (s_{3,1} \zeta_{3,1} \underline{\Phi}_{3,1} + s_{3,2} \zeta_{3,2} \underline{\Phi}_{3,2})$ . On en déduit

$$\ddot{\zeta}_{3,1} = \frac{c^2}{\delta a_3^2} s_{3,1} \zeta_{3,1} \iff \ddot{\zeta}_{3,1} = \omega_{3,1}^2 \zeta_{3,1} \text{ avec } \omega_{3,1} = \frac{c}{\delta a_3} \sqrt{-s_{3,1}}, \quad (8.12)$$

$$\ddot{\zeta}_{3,2} = \frac{c^2}{\delta a_3^2} s_{3,2} \zeta_{3,2} \iff \ddot{\zeta}_{3,2} = \omega_{3,2}^2 \zeta_{3,2} \text{ avec } \omega_{3,2} = \frac{c}{\delta a_3} \sqrt{-s_{3,2}}. \quad (8.13)$$

Les solutions sont  $\zeta_{3,1} = A_{3,1} \cos(\omega_{3,1} t + \varphi_{3,1})$  et  $\zeta_{3,2} = A_{3,2} \cos(\omega_{3,2} t + \varphi_{3,2})$  où  $A_{3,1}$ ,  $A_{3,2}$ ,  $\varphi_{3,1}$  et  $\varphi_{3,2}$  sont des constantes qui dépendent des conditions initiales  $\zeta_{3,1}(0)$ ,  $\dot{\zeta}_{3,1}(0)$ ,  $\zeta_{3,2}(0)$  et  $\dot{\zeta}_{3,2}(0)$ .

En notant  $\Omega_{3,1} = \frac{L}{\pi c} \omega_{3,1}$  et  $\Omega_{3,2} = \frac{L}{\pi c} \omega_{3,2}$  les pulsations adimensionnées, on peut calculer

$$\Omega_{3,1} = \frac{3}{\pi} \sqrt{-s_{3,1}} = \frac{3}{\pi} = 0,955 \quad (8.14)$$

$$\Omega_{3,2} = \frac{3}{\pi} \sqrt{-s_{3,2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} = 1,654. \quad (8.15)$$

## 6 Chaîne avec $N$ quelconque

Dans le cas général, on a  $\delta a_N = L/N$ ,  $\delta m_N = m/N$  avec les notations  $\mu = m/L$  et  $c = \sqrt{\alpha/\mu}$ . Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ces deux masses s'écrit

$$\ddot{\underline{\xi}}_N = \frac{c^2}{\delta a_N^2} \underline{A}_N \underline{\xi}_N, \quad (8.16)$$

où les composante de la matrice  $(N-1) \times (N-1)$  sont  $A_N(i, i) = -2$  pour  $i = 1, N-1$ ,  $A_N(i-1, i) = 1$  pour  $i = 2, N-1$  et  $A_N(i, i+1) = 1$  pour  $i = 1, N-2$ . On peut montrer que les valeurs propres  $s_{N,n}$  pour  $n = 1, N-1$

de la matrice  $\underline{A}_3$  sont toutes négatives et que les vecteurs propres associés  $\underline{\Phi}_{N,n}$  forment une base. La décomposition  $\underline{\xi}_N(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \zeta_{N,n}(t) \underline{\Phi}_{N,n}$  conduit aux équations  $\ddot{\zeta}_{N,n} = -\omega_{N,n}^2 \zeta_{N,n}$  avec  $\omega_{N,n} = (c/\delta_N) \sqrt{-s_{N,n}}$ . Les solutions sont de la forme  $\zeta_{N,n}(t) = A_{N,n} \cos(\omega_{N,n} t + \varphi_{N,n})$  où les  $A_{N,n}$  et  $\varphi_{N,n}$  sont des constantes qui dépendent des conditions initiales  $\zeta_{N,n}(0)$  et  $\dot{\zeta}_{N,n}(0)$  intervenant dans la décomposition sur la base propre des conditions initiales  $\underline{\xi}_N(0) = \sum_{n=1}^{N-1} \zeta_{N,n}(0) \underline{\Phi}_{N,n}$  et  $\dot{\underline{\xi}}_N(0) = \sum_{n=1}^{N-1} \dot{\zeta}_{N,n}(0) \underline{\Phi}_{N,n}$ . En notant  $\Omega_{N,n} = \frac{L}{\pi c} \omega_{N,n}$  les pulsations adimensionnées, on peut calculer

$$\Omega_{N,n} = \frac{N}{\pi} \sqrt{-s_{N,n}}. \quad (8.17)$$

Le tracé de ces valeurs pour différentes valeurs de  $N$  avec  $n = 1, N-1$ , permet de constater la relation  $\Omega_{N,n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} n$  (figure 8.6).

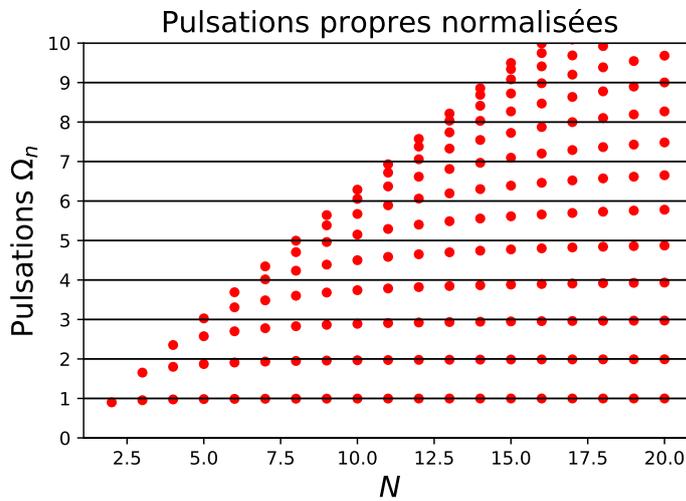


FIGURE 8.6 – Valeur des pulsations adimensionnées  $\Omega_{N,n}$  pour  $N = 1, 10$  et  $n = 1, N-1$ .

L'examen des composantes des vecteurs propres  $\underline{\Phi}_{N,n}$  (figure 8.7 pour  $N = 10$ ) permet de constater que les oscillations propres s'approchent, lorsque  $N$  est grand, des solutions stationnaires de l'équation de D'Alembert  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$  avec les conditions aux limites  $\xi(0, t) = \xi(L, t)$ , qui s'écrivent  $\xi_n(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$  pour les pulsations propres  $\omega_n = n \pi c / L$  avec  $n$  entier et les nombre d'onde  $k_n = \omega_n / c = n \pi / L$ . On a bien  $\omega_{N,n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \omega_n$ .

## 7 Conclusion

Les oscillations des chaînes de masses-ressorts pour  $N = 2$  (un ressort mobile) et  $N = 3$  (deux ressorts mobile) ont été détaillées puis généralisées au cas  $N$  quelconque. Les notations et l'adimensionnalisation des pulsations propres ont été choisies dans l'optique de faire tendre  $N$  vers l'infini. On retrouve dans ce cas les modes propres continus d'oscillation d'un barreau élastique ou d'un ressort de masse linéique donné, solutions stationnaires de l'équation de D'Alembert avec conditions aux limites de Dirichlet.

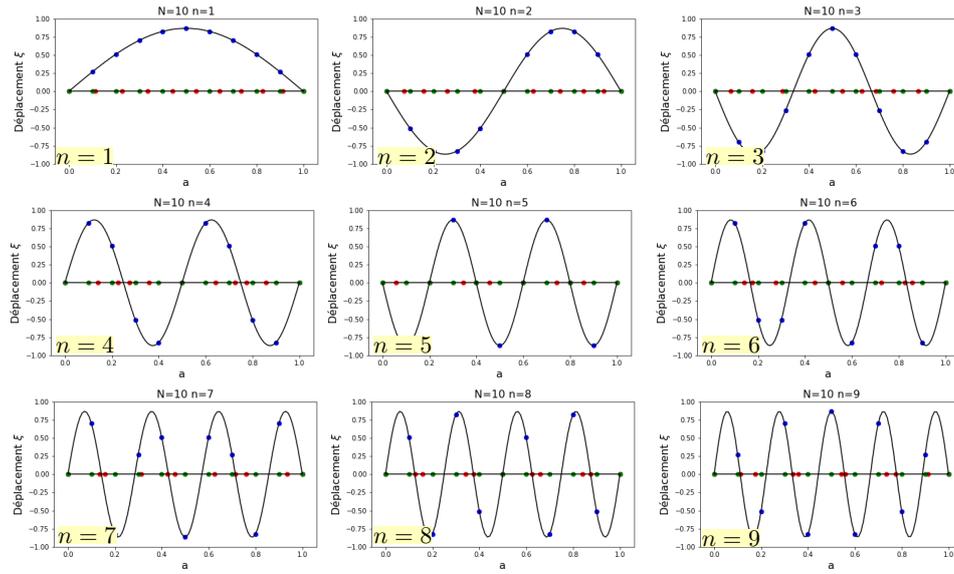


FIGURE 8.7 – Modes propres d'oscillation pour  $N = 10$  au  $2/3$  de la période.

## FORMULAIRE

### Loi de Hooke 1D

Tension dans ressort dont les extrémités subissent les déplacement  $\xi_i$  et  $\xi_{i+1}$  :

$$T_{i,i+1} = \alpha \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\delta a_N} . \quad (8.18)$$

### Équation du mouvement

Les déplacements sont régis par le système couplé :

$$\ddot{\xi}_i = \frac{c^2}{\delta a_N^2} (\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}) \text{ pour } i = 1, N-1 \quad (8.19)$$

$\Leftrightarrow$

$$\ddot{\underline{\xi}}_N = \frac{c^2}{\delta a_N^2} \underline{A}_N \underline{\xi}_N \text{ avec } \underline{A}_N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} . \quad (8.20)$$

### Pulsation des modes propres

La diagonalisation de la matrice  $\underline{A}_N$ , de valeurs propres  $s_{N,n}$  négatives, permet de calculer les pulsations adimensionnées  $\Omega_{N,n}$  avec  $n = 1, N-1$  des oscillations

propres :

$$\Omega_{N,n} = \frac{L}{\pi c} \omega_{N,n} = \frac{N}{\pi} \sqrt{-s_{N,n}} \quad \text{avec} \quad \omega_{N,n} = \frac{c}{\delta_N} \sqrt{-s_{N,n}}. \quad (8.21)$$

$$\text{On observe : } \Omega_{N,n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} n. \quad (8.22)$$

## EXERCICES

### EXERCICE 8.1 Modes propres

On considère une chaîne de  $N + 1$  masses ponctuelles glissant sans frottement sur un axe horizontal et reliées par des ressorts de masse négligeable. Les masses ponctuelles situées en  $a_0 = 0$  et  $a_N = L$ , de masse  $\delta m_N/2$ , avec  $\delta m_N = m/N$  sont fixes. Les masses ponctuelles situées en  $a_i = i \delta a$  au repos pour  $i = 1, N-1$ , avec  $\delta a_N = L/N$ , sont de masses  $\delta m_N = m/N$ . Les raideurs des ressorts sont identiques et valent  $k_N = \alpha/\delta a_N$ . On note  $\mu = m/L$  la masse linéique de la chaîne et  $c = \sqrt{\alpha/\mu}$ . On note  $\xi_i$ , pour  $i = 1, N-1$ , les déplacements des masses et  $\underline{\xi}_N = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1})^T$  est un vecteur colonne de  $\mathbb{R}^{N-1}$ .

- 1) Calculer la masse totale de la chaîne, en comptant ses extrémités.  
| La masse totale est  $m = \frac{1}{2} \delta m_N + (N-1) \delta m_N + \frac{1}{2} \delta m_N = N \delta m_N$ .
- 2) Calculer sa longueur totale.  
| La longueur totale est  $L = N \delta a_N$ .

#### Cas $N = 2$

- 3) Dessiner la configuration de la chaîne masses-ressorts dans le cas  $N = 2$   
| Il y a une seule masse mobile au centre de la chaîne.
- 4) Montrer que l'équation du mouvement s'écrit  $\ddot{\xi}_1 = A_1 (c/\delta a_2)^2 \xi_1$ , où  $A_1$  est une constante que l'on déterminera  
| On appliquant le principe fondamental et la loi de comportement rhéologique du ressort, on obtient  $A_1 = -2$ .
- 5) En déduire que  $\xi_1(t) = A_{2,1} \cos(\omega_{2,1} t + \varphi_{2,1})$  où  $A_{2,1}$  et  $\varphi_{2,1}$  sont des constantes arbitraires et  $\omega_{2,1}$  est une pulsation que l'on déterminera.  
| L'équation du mouvement s'écrit  $\ddot{\xi}_1 = -\omega_{2,1}^2 \xi_1$  avec  $\omega_{2,1} = (c/\delta a_2) \sqrt{2}$ .
- 6) En déduire la valeur de la pulsation adimensionnée  $\Omega_{2,1} = (L/\pi c) \omega_{2,1}$ .  
| On trouve  $\Omega_{2,1} = 2 \sqrt{2}/\pi = 0,900$ .

#### Cas $N = 3$

- 7) Dessiner la configuration de la chaîne masses-ressorts dans le cas  $N = 3$   
| Il y a deux masses mobiles à l'intérieur de la chaîne.
- 8) Montrer que l'équation du mouvement s'écrit  $\ddot{\underline{\xi}}_3 = \underline{\underline{A}}_3 (c/\delta a_3)^2 \underline{\xi}_3$ , où  $\underline{\xi}_3 =$

$(\xi_1, \xi_2)^T$  est un vecteur colonne à deux composantes et  $\underline{A}_2$  est une matrice  $2 \times 2$  que l'on déterminera.

On appliquant le principe fondamentale et la loi de comportement rhéologique du ressort, on obtient  $\underline{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

9) Calculer les valeurs propres  $s_{3,1}$  et  $s_{3,2}$  et les vecteurs propres  $\underline{\Phi}_{3,1}$  et  $\underline{\Phi}_{3,2}$  de la matrice  $\underline{A}_2$ .

La valeur propre  $s_{3,1} = -1$  est associée au vecteur propre  $\underline{\Phi}_{3,1} = (1, 1)^T$ . La valeur propre  $s_{3,2} = -3$  est associée au vecteur propre  $\underline{\Phi}_{3,2} = (1, -1)^T$ .

10) Justifier que pour tout vecteur  $\underline{\xi}_3 = (\xi_1, \xi_2)^T$ , il existe  $\zeta_{3,1}$  et  $\zeta_{3,2}$  tels que  $\underline{\xi}_3 = (\xi_1, \xi_2)^T = \zeta_{3,1} \underline{\Phi}_{3,1} + \zeta_{3,2} \underline{\Phi}_{3,2}$ .

Les deux vecteurs  $\underline{\Phi}_{3,1}$  et  $\underline{\Phi}_{3,2}$  sont indépendants. Ils forment la base de diagonalisation de la matrice  $\underline{A}_3$ .

11) En déduire que  $\zeta_{3,1} = A_{3,1} \cos(\omega_{1,3} t + \varphi_{3,1})$  et où  $A_{3,1}$  et  $\varphi_{3,1}$  sont des constantes arbitraires et  $\omega_{3,1}$  est une pulsation que l'on déterminera. Même question pour  $\zeta_{3,2}$  en changeant les indices.

Comme  $\underline{A}_3 \underline{\Phi}_{3,1} = s_{3,1} \underline{\Phi}_{3,1}$  et  $\underline{A}_3 \underline{\Phi}_{3,2} = s_{3,2} \underline{\Phi}_{3,2}$ , l'équation du mouvement s'écrit  $\ddot{\zeta}_{3,1} = -\omega_{3,1}^2 \zeta_{3,1}$  et  $\ddot{\zeta}_{3,2} = -\omega_{3,2}^2 \zeta_{3,2}$  avec  $\omega_{3,1} = (c/\delta a_3) \sqrt{-s_{3,1}}$  et  $\omega_{3,2} = (c/\delta a_3) \sqrt{-s_{3,2}}$ .

12) En déduire les valeurs des pulsations adimensionnées  $\Omega_{3,1} = (L/\pi c) \omega_{3,1}$  et  $\Omega_{3,2} = (L/\pi c) \omega_{3,2}$ .

On trouve  $\Omega_{3,1} = 3/\pi = 0,955$  et  $\Omega_{3,2} = 3\sqrt{3}/\pi = 1,654$ .

13) Décrire et dessiner la forme des oscillations associées aux pulsations adimensionnées  $\Omega_{3,1}$  et  $\Omega_{3,2}$ .

La pulsation  $\Omega_{3,1}$  correspond à une oscillation telle que  $\xi_i = \xi_2$  dans la mesure où elle est associée au vecteur propre  $\underline{\Phi}_{3,1} = (1, 1)^T$ . Les déplacements sont en alors en phase. La pulsation  $\Omega_{3,2}$  correspond à une oscillation telle que  $\xi_i = -\xi_2$  dans la mesure où elle est associée au vecteur propre  $\underline{\Phi}_{3,2} = (1, -1)^T$ . Les déplacements sont en alors en opposition de phase.

### Cas $N = 4$

14) Dessiner la configuration de la chaîne masses-ressorts dans le cas  $N = 3$

Voir figure 8.1.

15) Calculer les valeurs des pulsations adimensionnées  $\Omega_{4,n}$  pour  $n \in \{1, 2, 3\}$ .

On trouve  $\Omega_{4,1} = 0,974$ ,  $\Omega_{4,2} = 1,800$  et  $\Omega_{4,3} = 2,353$ .

### Cas $N$ grand

La figure 8.6 indique les valeurs des pulsations adimensionnées  $\Omega_{N,n}$  pour  $N = 1, 10$  et  $n = 1, N - 1$ .

16) Vers quelles valeurs tendent les pulsations  $\Omega_{N,n}$  quand  $N \rightarrow \infty$  ?

On peut écrire  $\Omega_{N,n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} n$ .