

Olivier Thual

---

Livret d'enseignement  
du cours  
“Hydraulique à surface libre”



Apprentissage par Problèmes et Projets (APP)

Toulouse INP - ENSEEIHT

Département “Mécanique des Fluides, Énergétique et Environnement” (MFEE)

Année 2019-2020, 4 mars 2020



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Organisation générale</b>	<b>5</b>
1	Syllabus . . . . .	5
2	Déroulement du cours . . . . .	6
3	Modalités d'évaluation . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Devoirs Maison</b>	<b>7</b>
1	DM 1 : Ressauts hydrauliques dans un canal . . . . .	7
2	DM 2 : Tuyère hydraulique de Laval . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Projet expérimental</b>	<b>17</b>
1	Expériences sur les ressauts hydrauliques . . . . .	17
2	Expériences avec la tuyère de Laval hydraulique . . . . .	20
3	Expériences avec le seuil épais . . . . .	21
4	Expériences avec la vanne de fond . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Formulaire</b>	<b>25</b>
1	Chapitre 4 : Hydraulique à surface libre . . . . .	25
2	Chapitre 5 : Ondes de crues . . . . .	27
3	Chapitre 6 : Intumescences et ressauts . . . . .	28



# Chapitre 1

## Organisation générale

### 1 Syllabus

#### HYDRAULIQUE À SURFACE LIBRE

CM : 5 x 1h45, TD : 5 x 1h45, Amphis inversés : 2 x 1h45, 2 DM (15%), Projet TP : 3 x 4h  
Soutenances : 2 x 1h45 (35%), Examen écrit : 1h45 (50%)

**Mots-Clés** : hydraulique à surface libre ; courbes de remous ; ressaut hydraulique ; équations de Saint Venant ; méthode des caractéristiques.

**Bibliographie** : [1] O. Thual, Hydrodynamique de l'environnement, Éditions de l'École Polytechnique, 2010. [2] O. Thual, Hydraulique pour l'ingénieur généraliste, Cépaduès-Éditions, 2018. [3] O. Thual, Hydraulique pour l'ingénieur généraliste, *Éd. Ress. Pédago. Ouv. INP 0714* (2018) 16h, <http://pedagogtech.inp-toulouse.fr/180714> [4] <http://moodle-N7.enseeiht.fr>

#### Objectifs :

À l'issue du chapitre "Hydraulique à surface libre", les étudiants sauront expliquer la forme des lignes d'eau en présence d'un écoulement stationnaire en s'appuyant sur les concepts suivants : charge hydraulique, énergie spécifique, impulsion, loi de frottement et courbes de remous.

À l'issue du chapitre "Ondes de crues", les étudiants sauront identifier la nature des différents termes des équations de Saint Venant et appliquer la méthode des caractéristiques sur l'exemple de l'approximation des ondes de crues.

À l'issue du chapitre "Intumescences et ressauts", les étudiants sauront employer avec succès la méthode des caractéristiques pour calculer les solutions des équations de Saint Venant dans les cas d'ondes de détente ou de chocs centrés.

À l'issue du projet expérimental, les élèves sauront imaginer, planifier et mettre en oeuvre des expériences illustrant les notions principales du cours.

#### Programme :

Les chapitres suivants du livre de référence "Hydrodynamique de l'environnement" sont abordés :

- Chapitre 4. Hydraulique à surface libre
- Chapitre 5. Ondes de crues
- Chapitre 6. Intumescences et ressauts

Le contenu de ces chapitres est développé lors de trois présentations orales suivies de trois

séances de travaux dirigés. Un projet expérimental de groupe fait une place importante à la créativité et à l'initiative pour illustrer les concepts du cours. Deux amphis inversés permettent des échanges sur le cours et son illustration à travers les projets. Les travaux réalisés lors de ces projets expérimentaux font l'objet d'une présentation orale par groupe. La moitié du poids de l'évaluation repose sur un examen écrit.

### Enseignants :

Olivier THUAL, Léo GUIOT et Aurélie LOUIS-NAPOLEON

## 2 Déroulement du cours (version du 4 mars 2020)

CM 0	Présentation générale ... (22 février)
CM 0	...et survol des chapitres 4 à 6 (22 février) Deux Devoirs Maison (DM) à remettre le 1er avril
CM 1	④ Hydraulique à surface libre (7 février)
CM 2	⑤ Ondes de crues (14 février)
CM 3	⑥ Intumescences et ressauts (21 février)
TD 3	⑥ Intumescences et ressauts (4 mars)
TD	Amphi inversé spécial projets (Léo, 6 mars)
TD 1	④ Hydraulique à surface libre (18 mars)
TD	TD sur les devoirs maison (18 mars)
TD 2	⑤ Ondes de crues (25 mars)
TD	TD sur les devoirs maison (25 mars)
TD	Amphi inversé pour les projets (30 mars)
AI	Amphi inversé pour l'examen écrit (1er avril) <b>Remise des deux Devoirs Maison (DM)</b>
<b>Examen</b>	Seul document autorisé : livret de cours <b>Vendredi 3 avril 2020</b>
<b>Oral</b>	Soutenances des projets expérimentaux <b>Lundi 11 mai 2020</b>
TP1	Découverte des installations
TP2	Maturation du projet expérimental
TP3	Finalisation du projet expérimental

## 3 Modalités d'évaluation

### DEVOIRS MAISON (15%) :

- Ressauts hydrauliques dans un canal
- Tuyère de Laval hydraulique

### PROJET EXPÉRIMENTAL (35%) :

- Illustration des notions du cours avec trois créneaux de TP de 4h
- Rapport de groupe de 15 pages et soutenance orale

### EXAMEN ÉCRIT (50%) :

- Devoir écrit en temps limité (1h45)
- Évaluation par contrat de confiance (TD, DM, annales...)
- Seul document autorisé : le livret d'enseignement. Calculatrices autorisées.

## Chapitre 2

# Devoirs Maison

### 1 DM 1 : Ressauts hydrauliques dans un canal

On considère un canal vitré, de largeur  $L = 25$  cm, compris entre deux vannes situées en  $x = 0$  et  $x = d$  avec  $d = 12$  m. Le canal possède une légère pente  $I$  qui permet d'éviter que l'eau ne stagne après une vidange complète. On note  $Q$  le débit d'eau circulant dans le canal dans le sens des  $x$  positifs et l'on suppose que le régime de la pompe qui l'alimente est réglé pour obtenir un débit  $Q$  pouvant aller jusqu'à environ  $Q_{max} = 30 \text{ l s}^{-1}$ . On suppose que la hauteur  $h$  et la vitesse moyenne  $U$  dans le canal obéissent aux équations de Saint Venant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hU) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} = gI - \frac{1}{2} C_f \frac{U|U|}{h} \quad \text{avec} \quad C_f = \frac{2g}{K_s^2 h^{1/3}}, \quad (2.1)$$

où  $g$  est la gravité,  $I = \sin \gamma$  la pente,  $g' = g \cos \gamma$  et  $K_s$  est le nombre de Strickler supposé constant dans le canal. On note  $q = Uh$  le débit linéique. On pourra approximer  $g'$  par  $g$  et prendre  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$  pour simplifier les calculs.

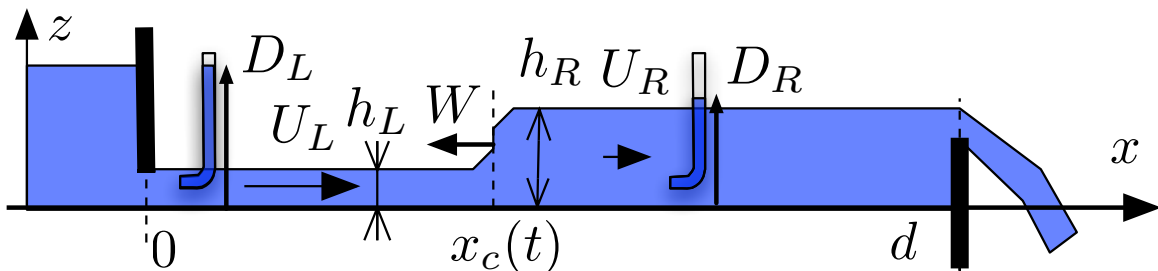


FIGURE 2.1 – Ressaut instationnaire observé dans un canal vitré.

En actionnant les vannes amont et aval, on suppose que l'on est capable de générer un ressaut stationnaire ou instationnaire en un point respectivement fixe  $x_c \in ]0, d[$  ou mobile  $x_c(t) \in ]0, d[$  (figure 2.1) du canal vitré. On note  $h_L$  et  $h_R$  les hauteurs d'eau respectivement mesurées à gauche et à droite du ressaut et l'on suppose  $h_R > h_L$ . On note  $U_L \geq 0$  et  $U_R \geq 0$  les vitesses de la couche fluide respectivement à gauche et à droite du ressaut et  $W = \dot{x}_c(t)$  la vitesse du ressaut lorsqu'il est mobile. Des tubes de Pitot, petits tuyaux ouverts dont une extrémité fait face à l'écoulement (figure 2.1), permettent de mesurer les hauteurs  $D_L$  et  $D_R$  et donc la perte de charge singulière  $\Delta H = D_L - D_R$  à travers le ressaut.

### Caractéristiques sans pente ni frottement

Dans un premier temps, on néglige la pente et le frottement.

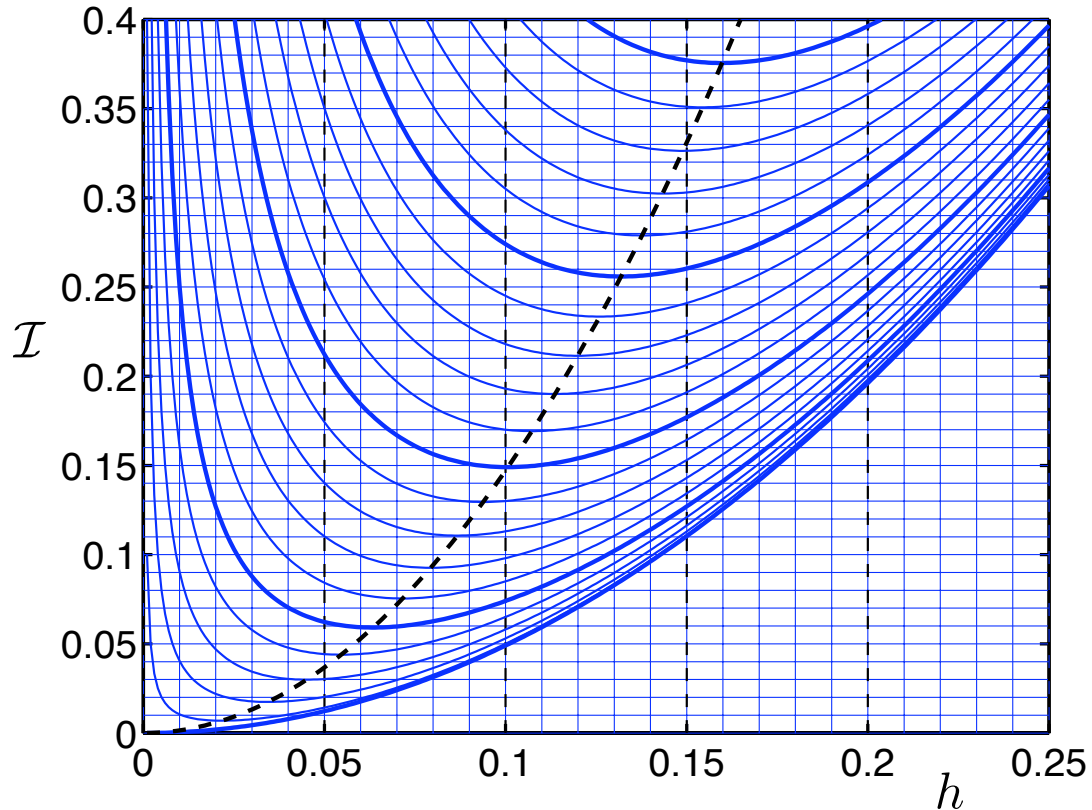


FIGURE 2.2 – Tracé de la fonction  $\mathcal{I}(q, h) = q^2/h + gh^2/2$  (en m<sup>3</sup> s<sup>-2</sup>) en fonction de  $h$  (en m) pour  $q$  variable par pas de .01 m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>.

- 1) Écrire les relations de saut traduisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement à travers le ressaut.
- 2) Montrer que dans le cas particulier  $W = 0$ , on a  $\mathcal{I}(q, h_L) = \mathcal{I}(q, h_R)$  où  $\mathcal{I}$  est la fonction impulsion  $\mathcal{I}(q, h) = q^2/h + gh^2/2$ .
- 3) On mesure  $h_L = 5$  cm et  $h_R = 10$  cm pour un ressaut immobile. En déduire le débit  $Q$  en l/s et les vitesses  $U_L$  et  $U_R$  en m/s. On pourra se servir de la figure 2.2.
- 4) Tracer, dans le plan  $(x, t)$ , les caractéristiques des équations de Saint Venant de part et d'autre de ce choc immobile. Indiquer dans un tableau les valeurs numériques des inverses des pentes (en m/s) de chacune des familles des caractéristiques dessinées.
- 5) Dans le cas où  $W \neq 0$ , on définit  $q_W = h(U - W)$ . Montrer que l'on a  $\mathcal{I}(q_W, h_L) = \mathcal{I}(q_W, h_R)$ .
- 6) On baisse complètement la vanne aval et on observe, après un transitoire, un écoulement stationnaire de hauteur  $h_L = 10$  cm à sa gauche. On ferme alors brusquement la vanne et on observe un ressaut mobile de vitesse  $W$  négative tel que  $h_R = 17$  cm. En déduire les valeurs de  $q_W$ , puis de  $W$  et enfin de  $q$  à l'aide de l'abaque de la figure 2.2.
- 7) Tracer, dans le plan  $(x, t)$ , les caractéristiques des équations de Saint Venant de part et d'autre de ce choc mobile. Indiquer dans un tableau les valeurs numériques des inverses des



pentés (en m/s) de chacune des familles des caractéristiques dessinées.

### Mise en mouvement d'un ressaut immobile

On suppose que l'on est en présence d'un ressaut immobile situé en  $x_c = 6$  m tel que  $Q = 15$  l/s et  $h_L = 5$  cm.

- 8) Déterminer graphiquement  $h_R$ .
- 9) A  $t = 0$ , on abaisse la vanne aval pour faire passer brusquement la hauteur d'eau de la valeur  $h_R$  à la valeur  $h_f = 8$  cm. Calculer le temps  $T$  au bout duquel le ressaut devient mobile en négligeant les termes de pente et de frottement.
- 10) Dessiner schématiquement dans ce cas les caractéristiques dans un plan  $(x, t)$  pour  $t \leq T$ .
- 11) Calculer la vitesse  $U_f$  à gauche de la vanne aval dans les premiers instants qui suivent l'abaissement de la vanne.

### Perte de charge pour un ressaut stationnaire

On s'intéresse ici à la famille des ressauts stationnaires ( $W = 0$ ) obtenus pour des débits et des réglages de vannes différents. On mesure alors sa position  $x = x_c$ , les hauteurs  $h_L$  et  $h_R$  ainsi que la perte de charge  $\Delta H = D_L - D_R$  à l'aide de tubes de Pitot (voir figure 2.1).

- 12) En utilisant les abaques graphiques de la figure 2.4, indiquer les valeurs manquantes du tableau 2.1, pour  $i = 1, 2, \dots, 20$ .

Expérience :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Q$ (l/s)	7.5	7.5	7.5	10	10	.....7	.....10	.....13	20	.....18
$q$ ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )	.03	.03	.03	.04	.04	.....8	.....11	.....14	.....16	.08
$x_c$ (m)	1.5	2	5	2.5	4	7.5	0	3	6	11.5
$h_L$ (cm)	1.5	2	3	.....3	.....5	4	3	.....15	5	7
$h_R$ (cm)	10.3	.....1	6.5	11.8	.....6	7.2	19.4	16.2	.....17	.....19
$\mathcal{I}$ ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ )	.061	.047	.....2	.....4	.067	.....9	.....12	.168	.14	.....20

TABLE 2.1 – Tableau "ressauts stationnaires" à compléter avec les valeurs ..... $i$  pour  $i = 1, 2, \dots, 20$ .

Expérience :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h_c$ (cm)	4.5	.....	.....	.....	.....	.....	8.7	.....	.....	.....
$D_L$ (cm)	21.9	.....	.....	.....	.....	.....	39.2	.....	.....	.....
$D_R$ (cm)	10.8	.....	.....	.....	.....	.....	20.3	.....	.....	.....
$\Delta H$ (cm)	11.1	.....	.....	.....	.....	.....	19	.....	.....	.....
$h_L$ (cm)	1.5	2	3	.....3	.....5	4	3	.....15	5	7
$h_R$ (cm)	10.3	.....1	6.5	11.8	.....6	7.2	19.4	16.2	.....17	.....19
$\frac{(h_R - h_L)^3}{4h_R h_L}$ (cm)	11.0	.....	.....	.....	.....	.....	18.9	.....	.....	.....

TABLE 2.2 – Tableau "perte de charge des ressauts stationnaires" à compléter.

- 13) On définit la hauteur critique par la relation  $h_c = q^{2/3} g^{-1/3}$ . À partir des abaques de la figure 2.4, compléter les valeurs de  $h_c$  dans le tableau 2.2.

- 14) On mesure la charge hydraulique avant et après le ressaut à partir de la hauteur du fluide dans des tubes de Pitot. Indiquer les hauteurs  $D_L$  et  $D_R$  mesurées dans le tableau 2.2.
- 15) En déduire les pertes de charge  $\Delta H$  pour les dix expériences du tableau 2.2.
- 16) Vérifier, pour les dix cas du tableau, que l'on a  $\Delta H = (h_R - h_L)^3 / (4h_R h_L)$ .

### Position du ressaut stationnaire dans le canal

On s'intéresse ici aux profils stationnaires  $h(x)$  et  $U(x)$ , solutions de l'équation (2.1), de part et d'autre du ressaut stationnaire. On suppose que  $U \geq 0$  dans tout le canal.

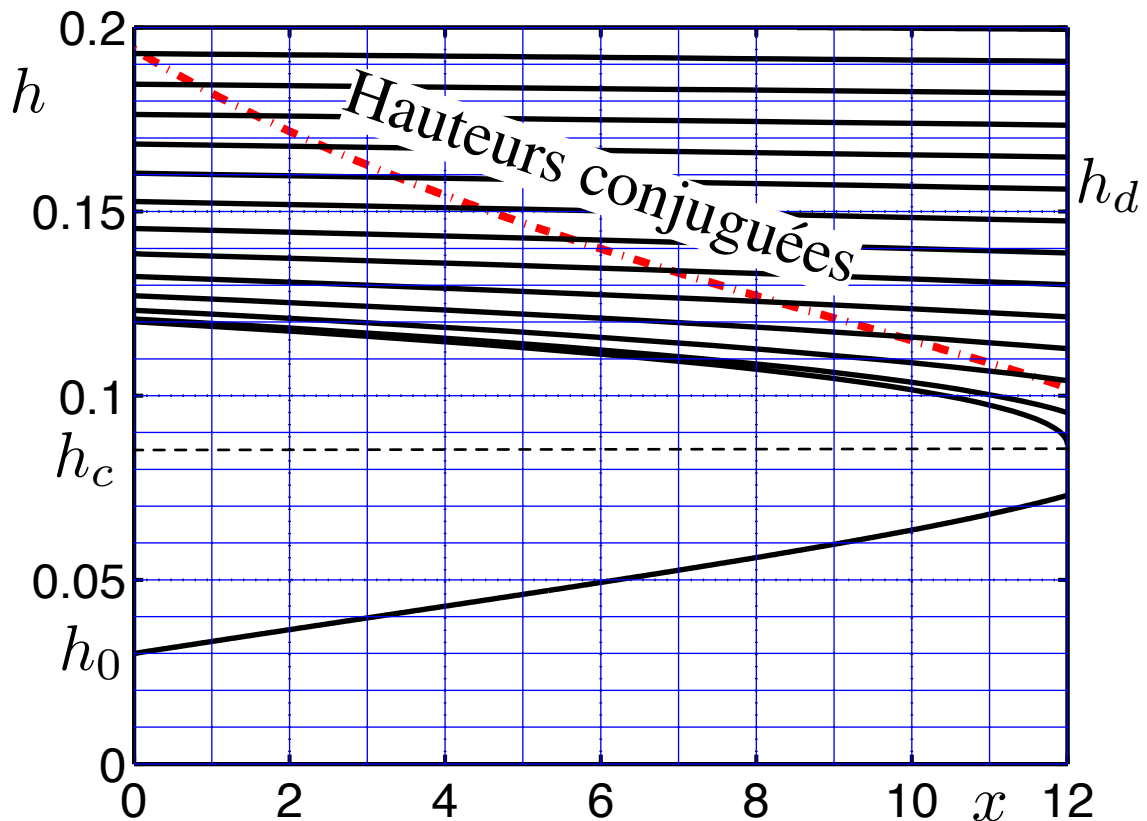


FIGURE 2.3 – Solutions de  $G[h(x)/h_c] = A(x - x_0)$  pour  $q = 0.08 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $K_s = 100 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$  dans un canal de longueur  $d = 12 \text{ m}$ . Courbe telle que  $h(0) = h_0 = 3 \text{ cm}$  ainsi que la courbe de ses hauteurs conjuguées pour l'impulsion (tiretée). Courbes telles que  $h(d) = h_d$  avec  $h_d \geq h_c$  et  $h_c = 8.7 \text{ cm}$ .

- 17) Justifier que le débit linéique  $q = U h$  est constant. Exprimer le nombre de Froude  $Fr(x) = U(x) / \sqrt{g h(x)}$  sous la forme  $Fr = P(h/h_c)$  où  $P(H)$  est une fonction que l'on explicitera.
- 18) Montrer que  $h(x)$  est solution de l'équation  $\frac{dh}{dx} = -J / (1 - Fr^2)$  avec  $J = q^2 K_s^{-2} h^{-\alpha_1}$  où  $\alpha_1$  est un coefficient que l'on précisera.
- 19) En déduire que  $\frac{dh}{dx} = \mathcal{F}(h)$  avec  $\mathcal{F}(h)/h_c = A F(h/h_c)$  où  $F(H) = H^{-10/3} / (H^{-3} - 1)$  et  $A = q^{-8/9} K_s^{\alpha_2} g^{\alpha_3}$  où  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont des constantes que l'on précisera.
- 20) Tracer schématiquement le graphe de la fonction  $F(H)$ . En déduire l'existence de courbes de remous  $h(x)$  croissantes avec  $x$ , que l'on appellera "courbes de type  $H_3$ ", ainsi que des

"courbes de type  $H_2$ " décroissantes. Tracer schématiquement l'allure des courbes de remous  $H_3$  et  $H_2$  sur un même graphe.

- 21) Montrer que les solutions de l'équation  $H'(X) = F[H(X)]$  vérifient l'équation implicite  $G[H(X)] = X - X_0$  où  $X_0$  est une constante et  $G(H) = \frac{3}{4} H^{\alpha_4} - \frac{3}{13} H^{\alpha_5}$  où  $\alpha_4$  et  $\alpha_5$  sont des constantes que l'on précisera.
- 22) Tracer schématiquement le graphe de la fonction  $X = G(H)$  dans le demi-plan  $(X, H)$  pour  $X \in [-2, 1]$  et  $H \in [0, 2]$ .
- 23) Montrer que les solutions stationnaires sont de la forme  $h(x) = h_c H[A(x - x_0)]$  où  $H(X)$  est une solution de l'équation différentielle  $H'(X) = F[H(X)]$ . En déduire un tracé plus précis des courbes de remous de types  $H_3$  et  $H_2$ .
- 24) La figure 2.3 représente des courbes  $h(x)$  solutions de l'équation  $G[h(x)/h_c] = A(x - x_0)$ , d'une part pour  $h(0) = h_0 = 3$  cm, d'autre part pour  $h(d) = h_d$  variable avec  $h_d \geq h_c$ , le débit étant fixé à  $q = 0.08 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . La courbe tiretée représente les hauteurs conjuguées de la courbe issue de  $h(0) = h_0 = 3$  cm. À partir de ces tracés, donner les valeurs des positions  $x_c$  du ressaut pour les valeurs de  $h_d$  suivantes :  $h_d = 19,4$ cm (exp. 7),  $h_d = 16,2$ cm (exp. 8),  $h_d = 13,9$ cm (exp. 9) et  $h_d = 10,6$ cm (exp. 10). Tracer l'allure de la ligne d'eau de part et d'autre du ressaut stationnaire. On négligera les perturbations des courbes de remous dues à la forme de cette vanne.

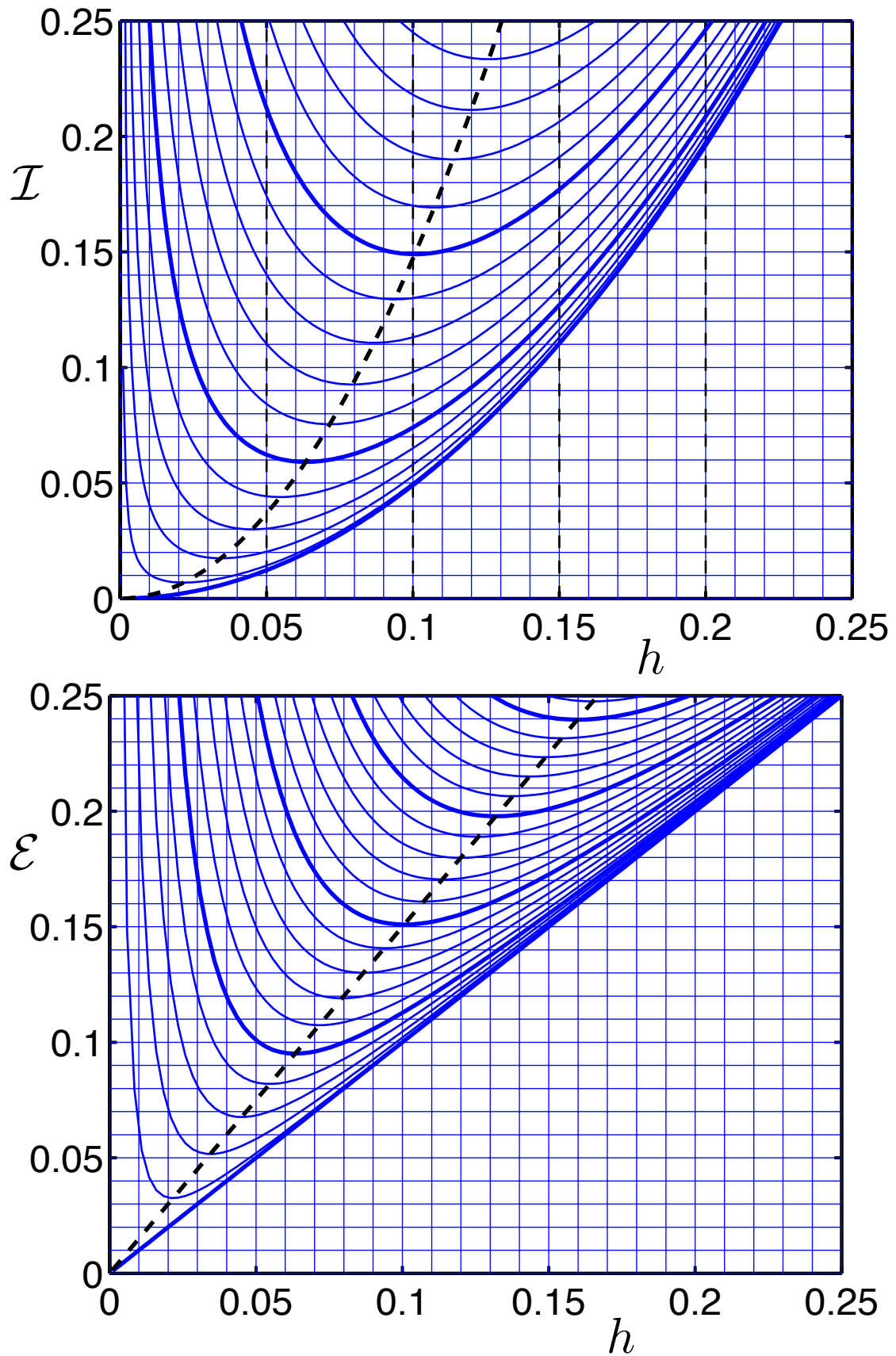


FIGURE 2.4 – Tracé en fonction de  $h$  (en m), pour  $q$  variable par pas de  $.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , des fonctions : a)  $\mathcal{I}(q, h) = q^2/h + gh^2/2$  (en  $\text{m}^3 \text{ s}^{-2}$ ) et b)  $\mathcal{E}(q, h) = h + q^2/(2gh^2)$  (en m).

## 2 DM 2 : Tuyère hydraulique de Laval

On dispose d'un canal à fond plat horizontal dont la largeur variable s'écrit  $L(x) = L_a - r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$  avec  $r = 3$  cm,  $\sigma = 50$  cm et  $L_a = 25$  cm. On note  $L_r = L_a - r = 22$  cm la largeur de la tuyère au col. On suppose que la hauteur  $h(x)$  et la vitesse  $U(x)$  de la couche d'eau sont stationnaires. On dispose, "loin" à l'amont de la tuyère en  $x = x_a$ , une vanne de fond dont l'ouverture réglable est notée  $e$  (figure 2.5). On cherche à décrire les régimes d'écoulements stationnaires obtenus pour les différentes valeurs de  $e$  en négligeant toutes les pertes de charges.

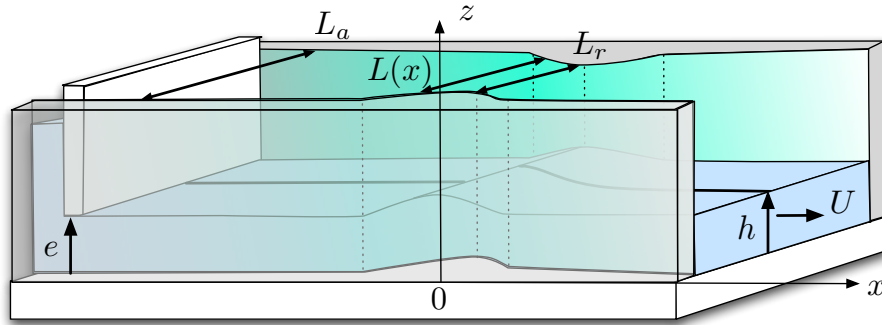


FIGURE 2.5 – Géométrie de la tuyère de Laval hydraulique.

- 25) Montrer que les grandeurs  $Q = h(x) U(x) L(x)$  et  $E = h(x) + U^2(x)/(2g)$  sont indépendantes de  $x$  pour les régimes stationnaires. Que représentent ces grandeurs? Quelles sont leurs unités. Indiquer comment on peut faire varier leurs valeurs de manière indépendante.
- 26) On note  $h_c(x) = g^{-1/3} L^{-2/3}(x) Q^{2/3}$ . Que représente cette hauteur en un point  $x$  donné. On note  $h_{ca} = h_c(x_a) = g^{-1/3} L_a^{-2/3} Q^{2/3}$ ,  $h_{cr} = h_c(0)$  et  $\Lambda(x) = L_a/L(x)$ . On suppose que  $h_{ca} = 5$  cm. À quel débit  $Q$  correspond ce cas? On pourra utiliser l'abaque de la figure 2.9 qui trace  $q(h) = g^{1/2} h^{3/2}$  en fonction de  $h$ . Montrer que  $h_c(x) = h_{ca} \Lambda^{2/3}(x)$ . En déduire que  $h_{cr} = 5.44$  cm. Tracer l'allure de  $h_c(x)$ .
- 27) Montrer que la ligne d'eau  $h(x)$  est solution de l'équation  $\mathcal{H}[E, h(x)] = h_c(x)$  avec  $\mathcal{H}(E, h) = 2^{1/3} h^{2/3} (E - h)^{1/3}$ . Tracer  $\mathcal{H}(E, h)$  en fonction de  $h \in [0, 20]$  cm pour différentes valeurs de  $E \in [0, 20]$  cm. Montrer que le maximum  $2E/3$  de ces courbes est atteint pour  $h = 2E/3$ . En déduire le tracé de la droite qui relie ces maxima.

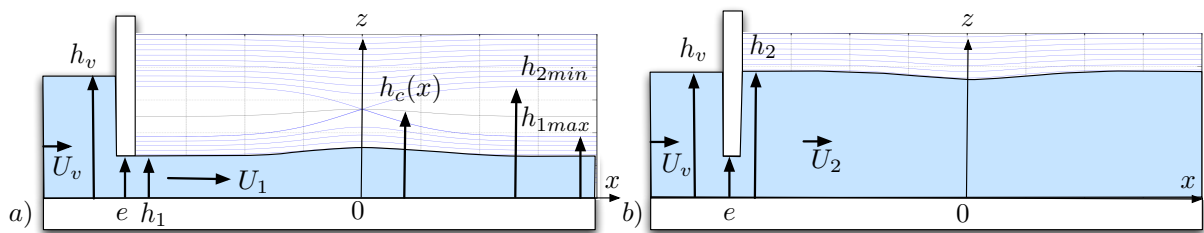


FIGURE 2.6 – Deux états observés pour le même débit et la même ouverture de vanne.

- 28) Pour  $e = 2.5$  cm, on observe deux régimes tels que la hauteur  $h_v$  de la couche d'eau en amont de la vanne soit commune (voir figure 2.6). À l'aval de cette vanne, cette hauteur est  $h_1 = e$  pour le premier régime et  $h_2$  pour le second. Déterminer, à l'aide des abaques de la figure 2.11, la charge spécifique commune aux deux régimes ainsi que  $h_v$  et  $h_2$ .
- 29) Montrer que  $h_{cr} \sim 5.4$  cm. Tracer les droites  $\mathcal{H} = h_{ca}$  et  $\mathcal{H} = h_{cr}$  sur les abaques de la figure 2.11. Montrer que  $h_c(x) \in [h_{ca}, h_{cr}]$ . En utilisant la relation  $h_c(x) = \mathcal{H}(E, h)$ ,

dessiner l'allure des deux lignes d'eau stationnaires pour le cas  $e = 2.5$  cm. Tracer ces lignes pour de nouvelles valeurs de  $e$ . Montrer qu'il existe une valeur maximale  $h_{1max}$  de  $h_1$ , conjuguée vis-à-vis de l'énergie spécifique  $\mathcal{E}$  avec une valeur minimale  $h_{2max}$  de  $h_2$ . Déterminer graphiquement ces valeurs.

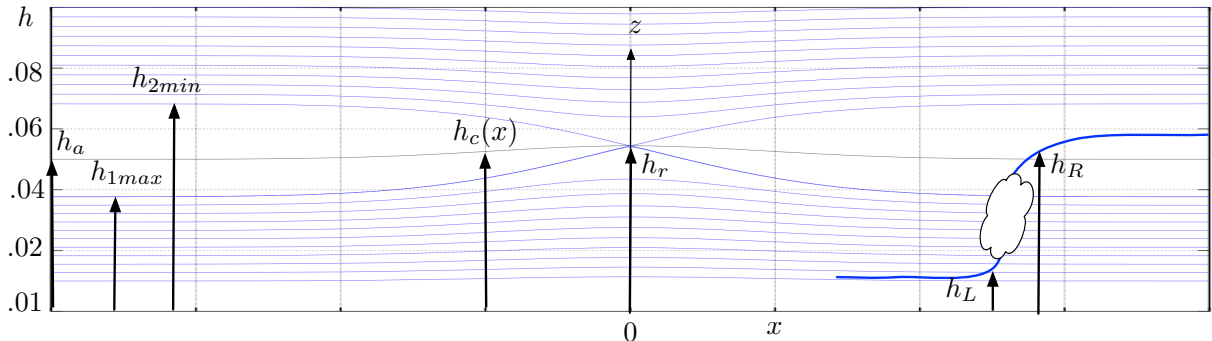


FIGURE 2.7 – Trajectoires possibles pour un débit  $Q$  donné.

- 30) Que se passe-t-il si  $e \geq h_{1max}$ ? Calculer dans ce cas la hauteur d'eau  $h$  au voisinage de la vanne et déterminer les régions sous-critiques et supercritiques de l'écoulement. Que vaut  $h(0)$ ?

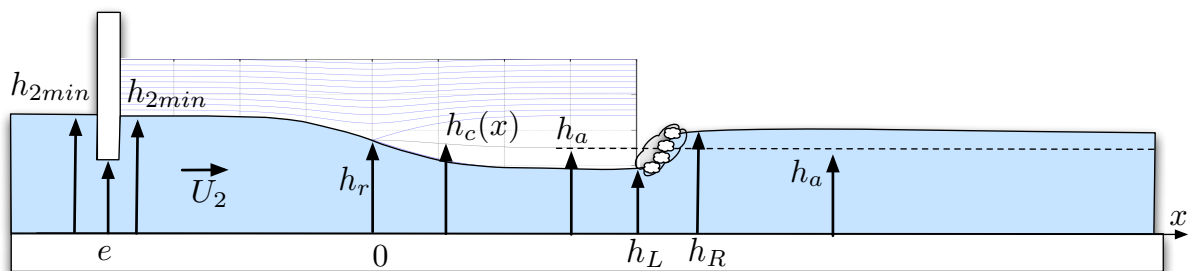


FIGURE 2.8 – Passage critique suivi d'un ressaut hydraulique.

- 31) On veut se servir de ce dispositif pour mesurer le débit  $Q$ . Décrire la méthode dans le cas où l'on sait mesurer la hauteur au col. Exprimer  $Q$  en fonction de  $h_{cr}$  en supposant connu  $L_r$ . Que vaut  $Q$  si  $h_{cr} = 5.5$  cm et  $L_r = 22$  cm.
- 32) On suppose que l'on connaît  $\Lambda_r = L_a/L_r$  mais que l'on ne sait mesurer  $h = h_{2min}$  qu'à l'amont de la tuyère. Justifier qu'en amorçant la tuyère cette mesure est celle de  $h_{2min}$ . En utilisant la relation  $Q = \sqrt{g} L_a h_{ca}^{3/2}$  pour relier  $Q$  à la hauteur critique  $h_{ca}$  en aval, montrer que la détermination du débit à partir de la mesure de  $h$  revient à résoudre l'équation

$$\frac{3}{2} \Lambda_r^{2/3} = \xi + \frac{1}{2} \xi^{-2} \quad (2.2)$$

avec  $\xi = h_{2min}/h_{ca}$ . Résoudre graphiquement cette équation dans le cas où  $h_{2min} = 14$  cm,  $L_a = 25$  cm et  $L_r = 14$  cm en utilisant les abaques de la figure 2.10 et en vérifiant les résultats sur les abaques de la figure 2.11. En déduire la valeur du débit  $Q$ .

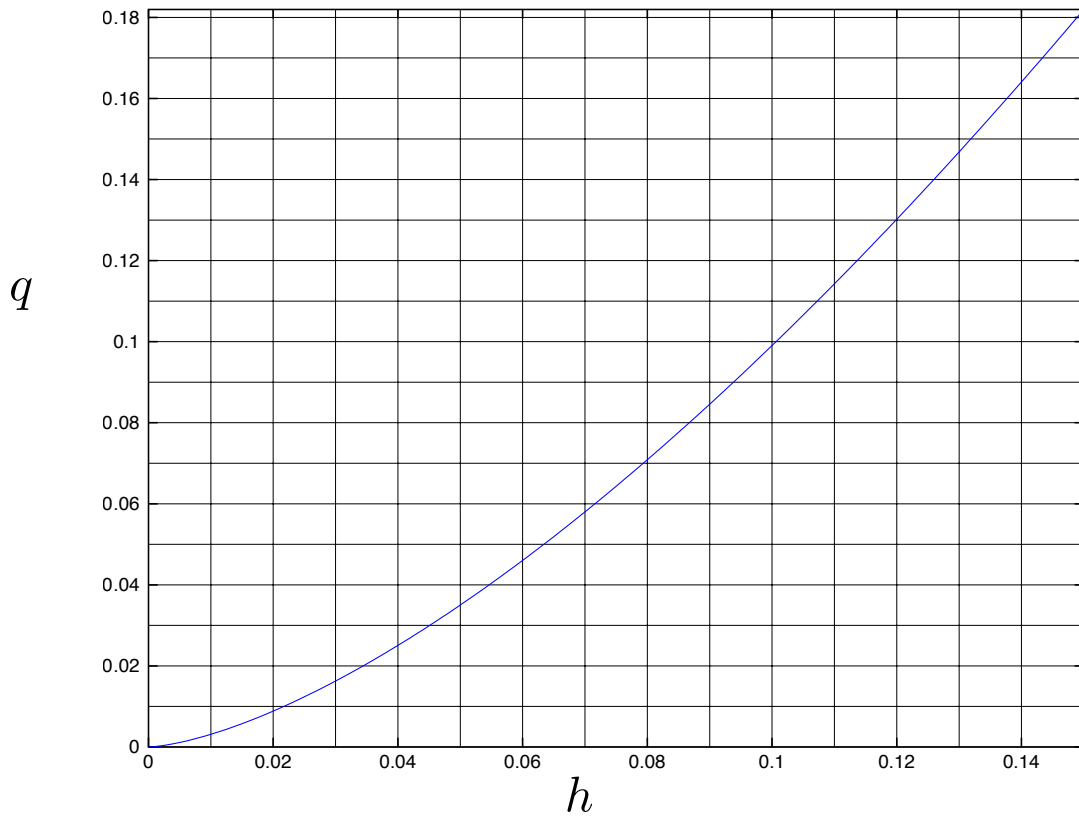


FIGURE 2.9 – Fonction  $q(h) = g^{1/2} h^{3/2}$  pour  $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ .

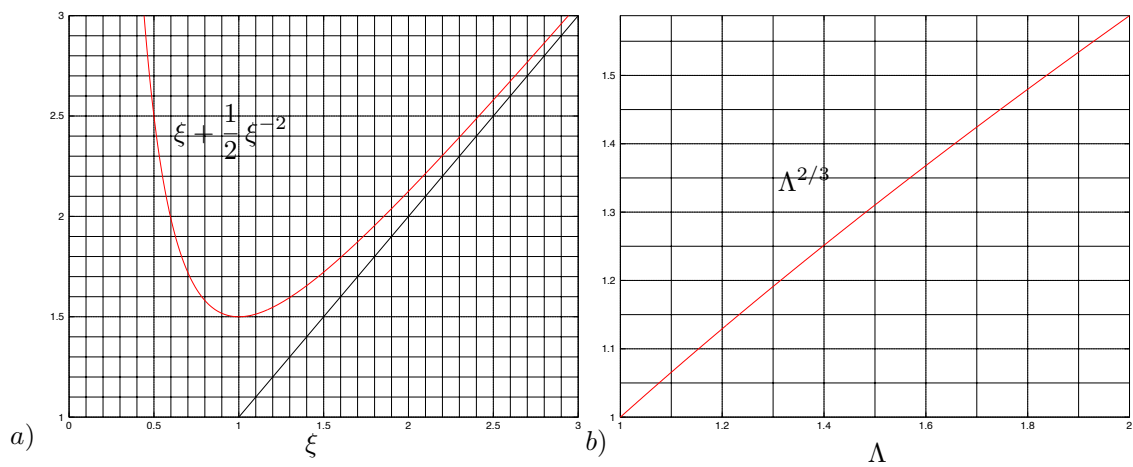


FIGURE 2.10 – a) Fonction  $f(\xi) = \xi + \frac{1}{2}\xi^{-2}$ . b) Fonction  $f(\Lambda) = \Lambda^{2/3}$ .

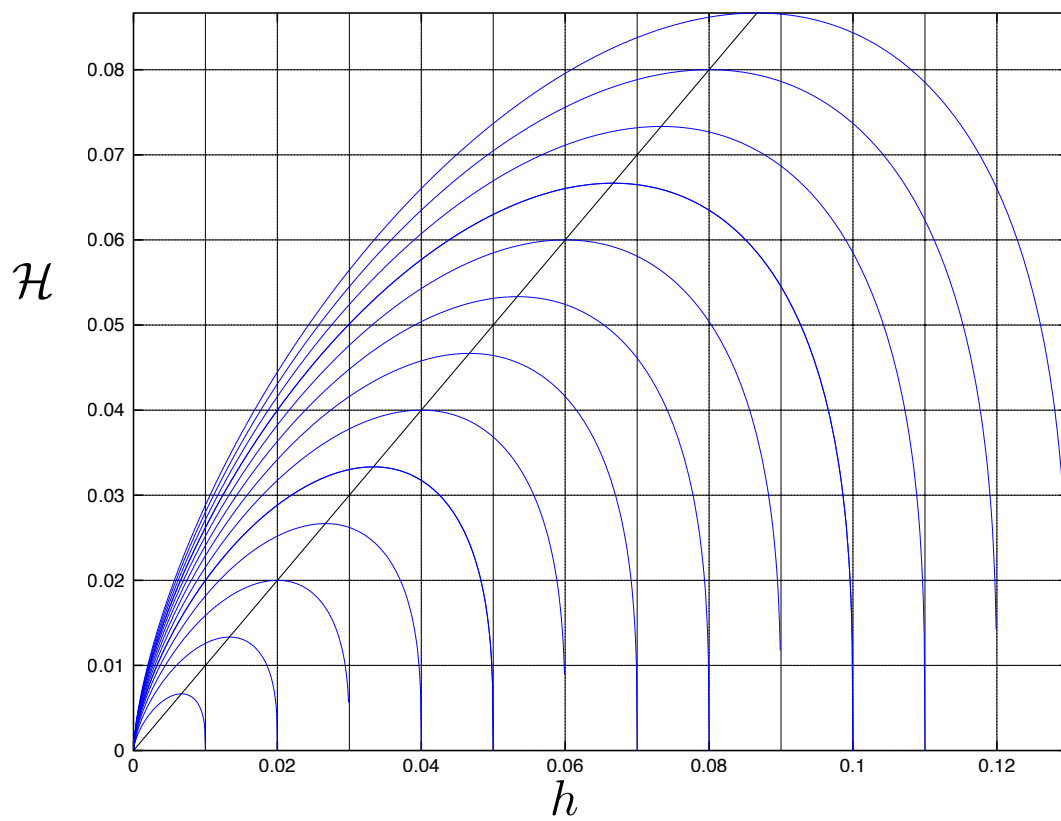
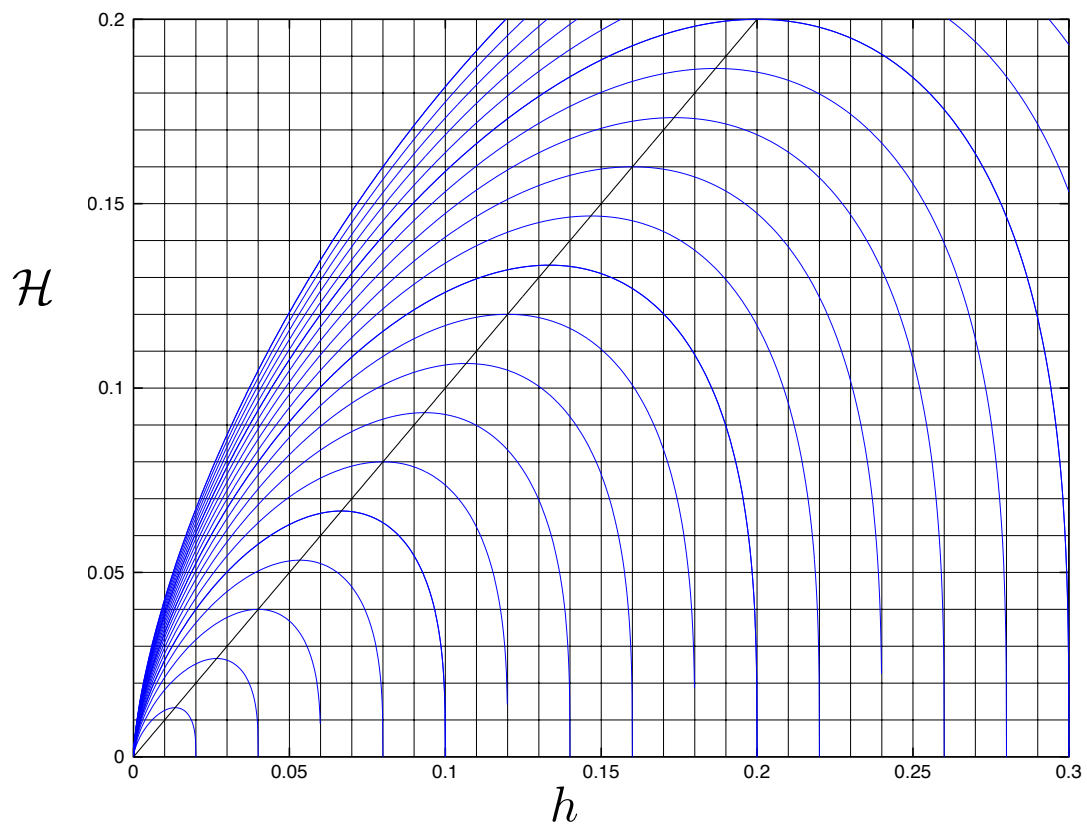


FIGURE 2.11 – Fonction  $\mathcal{H}(E, h) = 2^{1/3} h^{2/3} (E - h)^{1/3}$ .



## Chapitre 3

# Projet expérimental

Chaque groupe de TP devra concevoir une série d'expériences permettant d'illustrer les notions abordées dans le cours. Une première séance permet de se familiariser avec les installations. Les deux séances suivantes débouchent sur un rapport écrit d'une quinzaine de pages et une soutenance au cours de laquelle les orateurs seront tirés au sort. Les protocoles expérimentaux décrits ci-dessous sont donnés à titre d'exemple ou de point de départ. Les groupes devront faire appel à leur créativité et pourront demander des conseils aux enseignants.

### 1 Expériences sur les ressauts hydrauliques

Le canal vitré côté fenêtre de la salle B005 est équipé d'un circuit hydraulique avec une pompe qui alimente un débit allant jusqu'à 25 l/s. Deux vannes, une en amont, l'autre en aval du canal, peuvent être actionnées à distance à partir d'un PC. L'objectif de cette expérience est d'étudier les ressauts stationnaires ou mobiles (voir figure 3.2) obtenus en réglant la hauteur des vannes et le débit de la pompe.

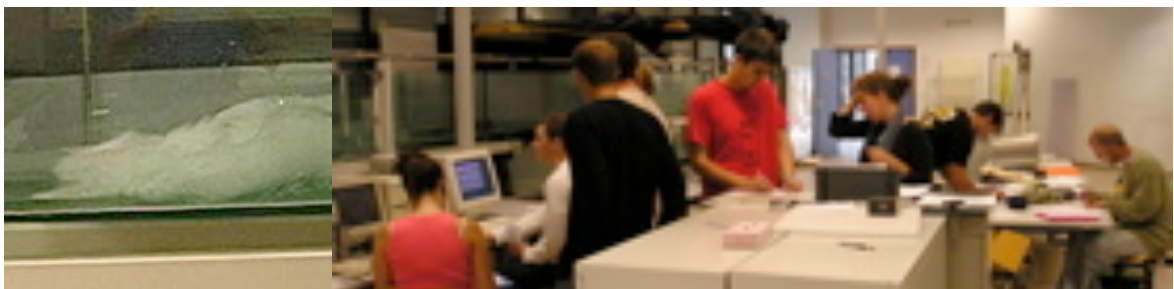


FIGURE 3.1 – Grand canal vitré de la salle B005. Contrôle d'un ressaut hydraulique.

Le travail expérimental repose sur le problème "Ressauts hydrauliques dans un canal". Les étudiants pourront prendre des initiatives pour acquérir des données expérimentales susceptibles d'illustrer ou de confirmer les résultats théoriques développés dans le problème.

## 1.1 Exemple de protocole expérimental

La largeur du canal hydraulique est  $L_a = 25$  cm. Le débit  $Q$  est réglable jusqu'à 25 l/s. La vanne de fond amont est réglable de la position  $P_f = 0$  (haute) à  $P_f = 100$  (fermée). La vanne de seuil aval est réglable de la position  $P_s = 0$  (fermée) à  $P_s = 100$ , ouverte.

1. On débute l'expérience en réglant la valeur sur le débit  $Q = 15$  l/s. En actionnant les vannes aval et amont, stabiliser un ressaut stationnaire juste devant le PC de contrôle.
2. Mesurer  $h_L$  et  $h_R$  et vérifier, à l'aide des abaques, que l'impulsion  $\mathcal{I}$  est bien conservée.
3. En actionnant les vannes, stabiliser le ressauts aux positions  $x \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$  m. Pour chaque position, mesurer le couple  $(h_L, h_R)$  et déterminer l'impulsion correspondante à l'aide des abaques.
4. On ouvre maintenant complètement les vannes amont et aval ( $P_f = 0$  et  $P_s = 100$ ). À l'instant  $t = 0$ , on ferme brusquement la vanne aval. Mesure la hauteur  $h_R$  et la vitesse  $W$  du ressaut. En déduire le débit linéique  $q$  en amont du canal. Vérifier que les deux mesures conduisent à la même valeur de débit.
5. Déterminer expérimentalement le nombre de Strickler du canal à l'aide de mesures de courbes de remous.
6. Vérifier que les positions des ressauts stationnaires sont compatibles avec cette valeur du nombre de Strickler.
7. Recommencer les expériences avec un autre débit, par exemple  $Q = 20$  l/s.

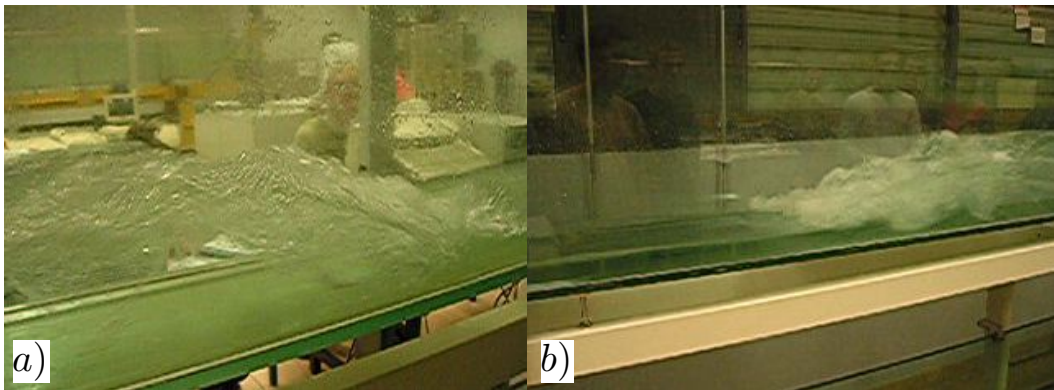


FIGURE 3.2 – Ressauts hydrauliques a) stationnaire, b) mobile.

## 1.2 Formulaire

On rappelle ici que les relations de sauts

$$\begin{aligned}
 h_L(U_L - W) &= h_R(U_R - W) \\
 h_L U_L(U_L - W) + \frac{1}{2}g' h_L^2 &= h_R U_R(U_R - W) + \frac{1}{2}g' h_R^2 \\
 (h_L U_L^2 + g' h_L^2)(U_L - W) + g' h_L^2 U_L &> (h_R U_R^2 + g' h_R^2)(U_R - W) + g' h_R^2 U_R
 \end{aligned}$$

entraînent  $\mathcal{I}(q, h_L) = \mathcal{I}(q, h_R)$  avec  $q = h_L U_L = h_R U_R$  et  $\mathcal{I}(q, h) = q^2/h + \frac{1}{2}g' h^2$  dans le cas d'un ressaut stationnaire ( $W = 0$ ) et  $\mathcal{I}(q_W; h_L) = \mathcal{I}(q_W; h_R)$  avec  $q_W = h_L(U_L - W) = h_R(U_R - W)$  dans le cas d'un ressaut instationnaire. Le tracé des courbes  $\mathcal{I}(q, h)$  en fonction de  $h$  est représenté sur les abaques de la figure 3.3 pour plusieurs valeurs de  $q$ .

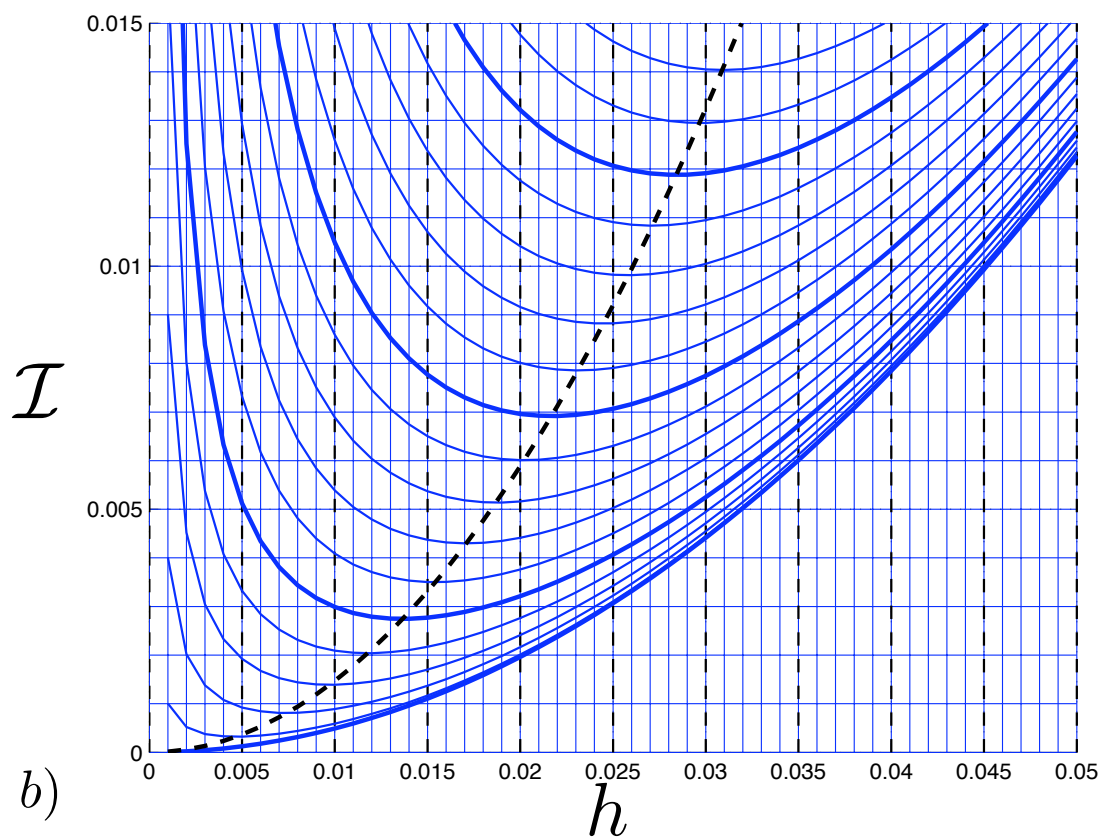
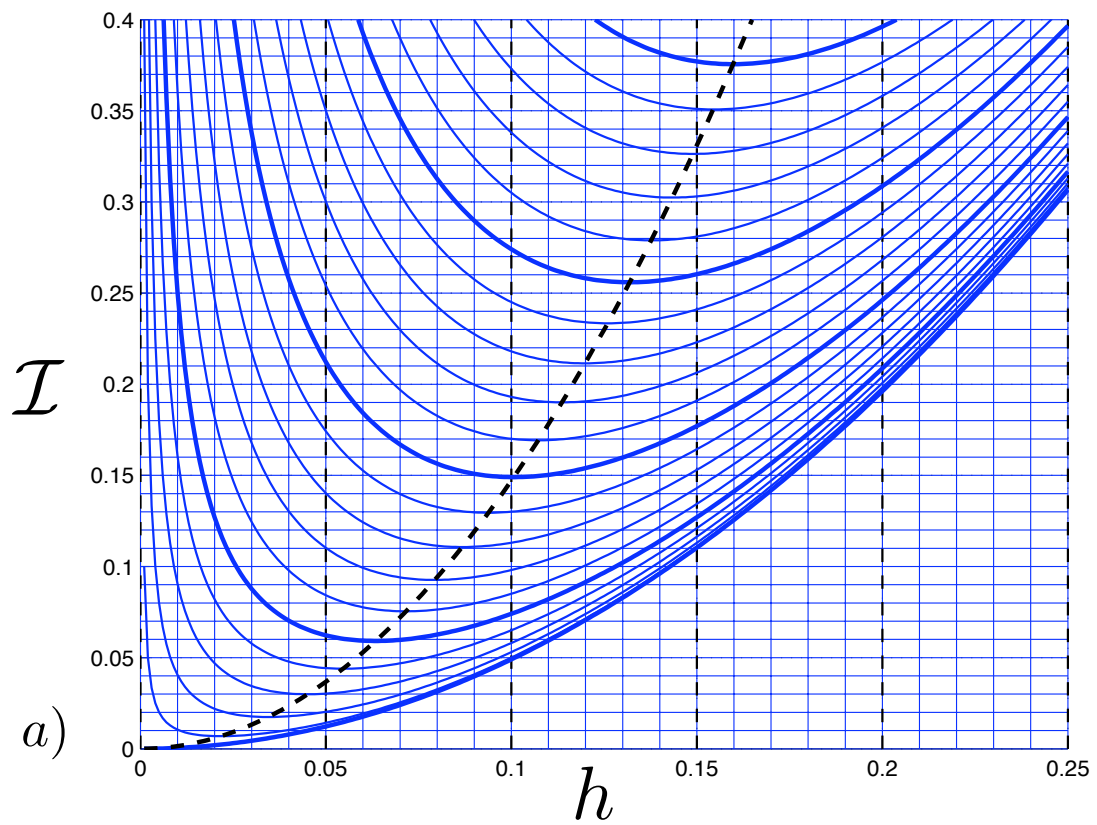


FIGURE 3.3 – Courbes  $\mathcal{I}(q, h) = q^2/h + \frac{1}{2} g h^2$  pour  $q$  variable par pas de a)  $.01\text{m}^2\text{s}^{-1}$  b)  $.001\text{m}^2\text{s}^{-1}$ .

## 2 Expériences avec la tuyère de Laval hydraulique

Le canal vitré côté fenêtre de la salle B005 est équipé d'un circuit hydraulique avec une pompe qui alimente un débit allant jusqu'à 25 l/s. Deux vannes, une en amont, l'autre en aval du canal, peuvent être actionnées à distance à partir d'un PC. Ce canal peut être équipé d'un "venturi hydraulique" constitué d'un rétrécissement de section en forme de deux demi-lunes.

L'objectif de cette expérience est d'étudier les régimes stationnaires d'écoulements à travers ce venturi et de comprendre comment le passage critique au col de cette "tuyère hydraulique" constitue un dispositif permettant de déterminer le débit à partir d'une simple mesure de hauteur d'eau. Ce type de canal jaugeur, appelé "venturi hydraulique" sur fond plat ou "Parshall flume" lorsque le rétrécissement s'accompagne d'une rupture de pente, est souvent utilisé pour des applications pratiques (figure 3.4).



FIGURE 3.4 – Exemple de venturi ou "Parshall flume"

Le travail expérimental repose sur le problème "Tuyère de Laval hydraulique". Les étudiants pourront prendre des initiatives pour acquérir des données expérimentales susceptibles d'illustrer ou de confirmer les résultats théoriques développés dans le problème.

### 2.1 Exemple de protocole expérimental

La largeur du canal hydraulique est  $L_a = 25$  cm. Le débit  $Q$  est réglable jusqu'à 25 l/s. La vanne de fond amont est réglable de la position  $P_f = 0$  (haute) à  $P_f = 100$  (fermée). La vanne de seuil aval est réglable de la position  $P_s = 0$  (ouverte) à  $P_s = 100$  (fermée). On positionnera la tuyère près de la vanne amont.

1. Mesurer précisément la largeur minimale  $L_r$  au col de la tuyère ( $L_r \sim 10$  cm).
2. On débutera l'expérience en fixant  $P_f$  proche de la fermeture et  $Q$  à la limite du débordement du trop-plein (typiquement  $P_f \sim 96$  et  $Q \sim 8.3$  l/s). Mesurer alors le profil  $h(x)$  dans le cas partout torrentiel ( $P_s = 0$ ) ou partout fluvial ( $P_s$  suffisamment grand), en précisant hauteurs  $h_f$  et  $h_s$  en amont et en aval. Tracer le profil de nombre de Froude  $Fr(x)$  dans les deux cas.
3. En fonction des positions des vannes, le débit peut changer pour une même vitesse de rotation de la pompe. Justifier cette variation. Veiller à garder un débit constant pour la suite de l'expérience.

4. À partir du régime partout torrentiel ( $P_s = 0$ ), répéter cette mesure pour des valeurs décroissantes de  $P_f$  (par exemple  $P_f \in \{94, 92, 90, 88, \dots\}$ ). Pour quelle valeur de  $h_f$  la tuyère devient-elle "amorcée" (passage fluvial vers torrentiel au col).
5. On considère maintenant le débit  $Q = 25$  l/s et on retire la vanne amont ( $P_f = 0$ ). Modifier progressivement la vanne aval pour amener un ressaut stationnaire à différentes positions, en particulier dans la tuyère.
6. Dans le cas où la tuyère est amorcée, calculer le débit  $Q$  à partir de la mesure de  $h_r$  au col de la tuyère. Comparer avec le débit mesuré par le débitmètre.
7. Tracer la ligne d'eau dans une abaque ( $h, \mathcal{H}$ ) avec  $\mathcal{H}(E, h) = 2^{1/3} h^{2/3} (E - h)^{1/3}$  où  $E$  est la charge spécifique.
8. Faire varier le débit  $Q$  et le déterminer à partir de la mesure de  $h_f$ , de  $h_r$  puis de  $h_s$  en se servant de l'abaque.
9. Indiquer les mécanismes qui déterminent la position du ressaut.
10. Expliquer comment les fusées décollent.

### 3 Expériences avec le seuil épais

Le canal vitré, situé côté mur de la salle B005, est équipé d'un circuit hydraulique avec une pompe qui alimente un débit allant jusqu'à 25 l/s. Une vanne manuelle permet de régler ce débit, dont la valeur est donnée par un débitmètre. La vanne aval de type seuil mince peut être actionnée à la main. Une pointe de mesure mobile permet de relever la ligne d'eau en différents points de l'écoulement. Deux seuils peuvent être vissés sur le fond du canal :

- Un seuil épais de grande taille ayant la forme d'un triangle rectangle
- Un obstacle de taille moyenne ayant la forme d'un triangle isocèle

L'objectif de cette expérience est d'étudier les lignes d'eau de l'écoulement stationnaire observé par franchissement de l'obstacle.

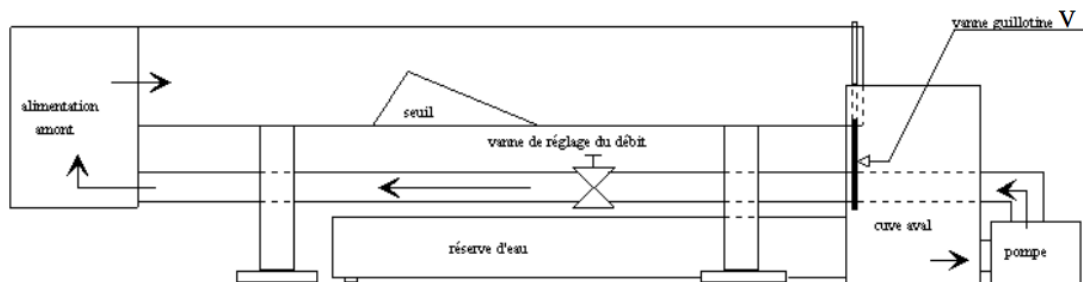


FIGURE 3.5 – Petit canal muni du seuil épais de grande taille.

#### 3.1 Exemple de protocole expérimental

La largeur du canal hydraulique est  $L = 25$  cm. On pourra reporter les mesures sur le tableau 3.6.

1. Régler le débit aux alentours de 20 l/s.
2. En agissant sur la vanne aval, positionner un ressaut hydraulique entre le seuil et la vanne.
3. Relever le profil de la ligne d'eau à l'aide de la pointe de mesure.

## SEUIL EPAIS

## ECOULEMENT A VEINE DENOYEE

Q=		q=		q²=		Hc=					
POINTS	Hauteur lue (cm)	Hauteur réelle (cm)	Tirant d'eau H (m)	$q^2/gH$ (m²)	$q^2/2gH^2$ (m)	$H^2/2$ (m²)	Énergie spécifique Es (m)	Charge totale $H_T$ (m)	Fonction impulsion F (m²)	$Fr^2$	Froude Fr
A											
B											
C											
D											
E											
F											
G											
H											
I											
J											
K											

FIGURE 3.6 – Tableau de mesures

4. Tracer, sur du papier millimétré ou numériquement les profils des grandeurs suivantes : la cote de la surface libre, la charge hydraulique. Tracer, sur un autre figure les profils suivants : profondeur, énergie spécifique, impulsion et nombre de Froude.
5. Tracer l'énergie spécifique en fonction de la profondeur, puis l'impulsion en fonction de la profondeur. Confirmer les valeurs obtenues pour les minima.
6. Comparer les impulsions en amont et en aval du ressaut.
7. Vérifier que la hauteur d'eau en amont du ressaut reste insensible aux variations de la hauteur de la vanne aval tant que le seuil est dénoyé.
8. Établir la loi de seuil de la vanne aval pour une large gamme de profondeur.

## 4 Expériences avec la vanne de fond

Le canal vitré, situé côté fenêtre de la salle B005 est alimentée par une pompe équipée d'un variateur de fréquence (de 30 à 50 Hz) qui permet d'en modifier la vitesse de rotation et donc le débit, dont la valeur, allant jusqu'à 25 l/s, est donnée par un débitmètre. Une cuve munie d'un convergent permet d'injecter un écoulement à surface libre uniforme dans le canal, de la large  $B = 25$  cm. Une vanne guillotine, située en amont, permet un écoulement de vanne de fond. Une vanne montante, à l'extrémité du canal, agit comme un seuil mince. Les deux vannes sont motorisées et commandées par un PC disposant d'un programme de pilotage. Une pointe de mesure mobile permet de relever la ligne d'eau en différents points de l'écoulement.

L'objectif de cette expérience est d'étudier l'écoulement au voisinage de la vanne de fond dans le régime dénoyé.

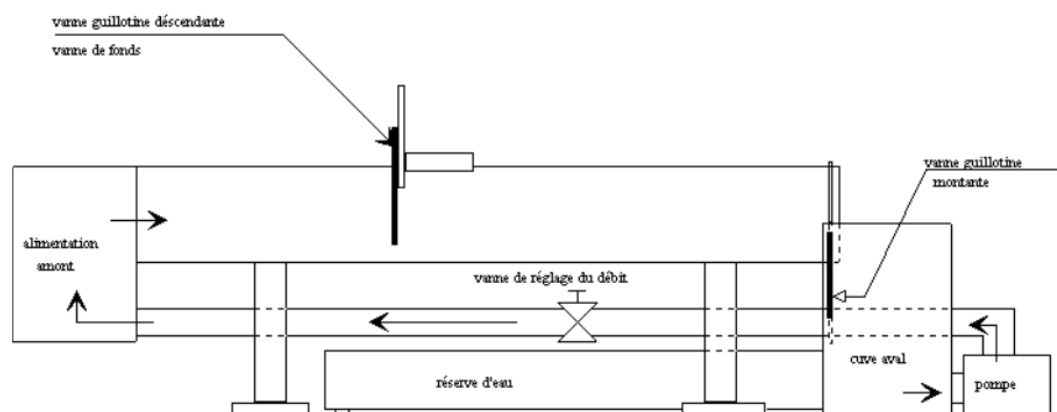


FIGURE 3.7 – Grand canal avec vanne de fond en amont.

### 4.1 Exemple de protocole expérimental

La largeur du canal hydraulique est  $L = 25$  cm. On pourra reporter les mesures sur le tableau 3.8.

1. Régler le débit à une valeur moyenne. Positionner la vanne amont pour obtenir un écoulement par vanne de fond. Agir sur la vanne aval pour que la vanne de fond soit dénoyée.
2. Mesurer la profondeur en quelques points en amont et en aval de la vanne de fond pour tracer les profils des grandeurs suivantes : profondeur, énergie spécifique et nombre de Froude.
3. Tracer le débit en fonction de la charge mesurée en amont de la vanne. Interpréter cette fonction.
4. Mêmes questions dans le cas où la vanne est noyée.
5. Répéter les expériences avec plusieurs valeurs du débit.

**VANNE DE FOND****ÉCOULEMENT A VEINE DENOYEE**

Q=		q=		q <sup>2</sup> =		H <sub>C</sub> =		A=	
	Tirant d'eau H (m)	q <sup>2</sup> /gH (m <sup>2</sup> )	q <sup>2</sup> /2gH <sup>2</sup> (m)	H <sup>2</sup> /2 (m <sup>2</sup> )	Énergie spécifique Es (m)	Charge totale H <sub>T</sub> (m)	Fonction impulsion F (m <sup>2</sup> )	Fr <sup>2</sup>	Froude Fr
amont									
aval									

Q (L/s)	q (m <sup>2</sup> /s)	H <sub>1</sub> (cm)	H' (cm)	A (cm)	m <sub>exp</sub>	m <sub>th</sub>

**ÉCOULEMENT A VEINE NOYEE**

A=

Q (L/s)	q (m <sup>2</sup> /s)	H <sub>1</sub> (cm)	H <sub>2</sub> (cm)	H <sub>C</sub> (cm)	m	Es <sub>amont</sub>	Es <sub>aval</sub>

FIGURE 3.8 – Tableau de mesures



# Chapitre 4

## Formulaire

### 1 Chapitre 4 : Hydraulique à surface libre

#### Charge hydraulique

Charge locale :

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g}U^2 .$$

Paramètres géométriques :

$$R_H = \frac{A}{P} , \quad D_H = 4 R_H , \quad h_H = \frac{A}{L} .$$

Charge moyenne :

$$H(s) = \frac{p_a}{\rho g} + h(s) + Z_f(s) + \alpha(s) \frac{U^2(s)}{2g} .$$

#### Charge spécifique et impulsion

Perte de charge linéique :

$$\frac{dH}{ds} = -J , \quad H = \frac{p_a}{\rho g} + h + Z_f + \frac{U^2}{2g} .$$

Équation d'équilibre :

$$q = U h , \quad \frac{dh}{ds} = \frac{I - J}{1 - Fr^2} , \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gh}} .$$

Charge spécifique :

$$\mathcal{E}(q, h) = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{1}{2} \frac{h_c^3}{h^2} \quad , \quad h_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} .$$

Ressaut stationnaire :

$$U_L h_L = U_R h_R = q \quad , \quad h_L U_L^2 + \frac{1}{2} g h_L^2 = h_R U_R^2 + \frac{1}{2} g h_R^2 .$$

Fonction impulsion :

$$\mathcal{I}(q, h_L) = \mathcal{I}(q, h_R) \quad \text{avec} \quad \mathcal{I}(q, h) = h U^2 + \frac{1}{2} g h^2 = \frac{g}{h} \left( h_c^3 + \frac{1}{2} h^3 \right) .$$

### Courbes de remous

Frottements :

$$J = -\frac{1}{A} \iint_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho g} \operatorname{div}(\underline{\tau}) \cdot \underline{e}_s \, da \quad , \quad \tau_* = -\frac{1}{P} \int_{\mathcal{P}} \underline{e}_s \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{n} \, dl .$$

Coefficient  $\lambda$  :

$$\tau_* = \frac{1}{8} \lambda(Re, Ru) \rho U^2 \quad , \quad Re = \frac{U D_H}{\nu} \quad , \quad Ru = \frac{k_s}{D_H} .$$

Perte de charge :

$$\tau_* = \rho g R_H J \quad \implies \quad J = \lambda(Re, Ru) \frac{U^2}{2g D_H} .$$

Coefficient de Strickler :

$$U = K_s R_H^{\frac{2}{3}} J^{\frac{1}{2}} .$$

Courbes de remous :

$$\frac{dh}{ds} = \mathcal{F}(h) = I \frac{1 - (h/h_n)^{-10/3}}{1 - (h/h_c)^{-3}} \quad , \quad h_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad , \quad h_n = \left( \frac{q^2}{I K_s^2} \right)^{3/10} .$$

## 2 Chapitre 5 : Ondes de crues

### Équations de Navier-Stokes à surface libre

Avec viscosité turbulente :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p_t + \underline{g} + \operatorname{div} [(\nu + \nu_t) \underline{d}]. \end{aligned}$$

Conditions aux limites :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w, \quad \underline{\sigma}_t \cdot \underline{n} = -p_a \underline{n} \quad / \quad z = h(x, t).$$

Nombres sans dimension :

$$\epsilon = \frac{h_0}{L_0}, \quad Fr = \frac{U_0}{\sqrt{g' h_0}}, \quad Rt = \frac{h_0 U_0}{\nu_t} \quad \text{et} \quad \tan \gamma.$$

### Dérivation des équations de Saint-Venant

Pression hydrostatique :

$$p_t(x, z, t) = p_a - \rho g' [z - h(x, t)].$$

Quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g I + \nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Cisaillement au fond :

$$\tau_* = \frac{1}{2} C_f(h, U) \rho U |U|.$$

Équations de Saint-Venant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} &= -h \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} &= g I - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}. \end{aligned}$$

Parmétrisation de Manning-Strickler :

$$C_f = \frac{2g}{K_s^2 h^{1/3}} \implies \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} = g \left( I - \frac{U|U|}{K_s^2 h^{4/3}} \right).$$

### Dynamique des ondes de crues

Ondes de crues diffusantes :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U h) = 0 \quad \text{et} \quad 0 = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g I - \frac{1}{2} C_f \frac{U |U|}{h} .$$

Ondes de crues :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad , \quad \lambda(h) = \frac{5}{3} U(h) \quad , \quad U(h) = K_s I^{1/2} h^{2/3} .$$

Caractéristiques :

$$\left( \frac{dh}{dt} \right)_c = 0 \quad , \quad \left( \frac{d}{dt} \right)_c = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_c(t) \frac{\partial}{\partial x} .$$

Relations de saut :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h dx + [q(h)]_{x_1}^{x_2} = 0 \quad \implies \quad \dot{x}_c(t) = W(t) = \llbracket q(h) \rrbracket / \llbracket h \rrbracket .$$

## 3 Chapitre 6 : Intumescences et ressauts

### Résolution des équations de Saint-Venant

Saint-Venant linéaire :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = -h_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} .$$

Solution linéaire :

$$\tilde{h}(x, t) = \frac{1}{2} \tilde{H}_+ [x - (U_n + c_n)t] + \frac{1}{2} \tilde{H}_- [x - (U_n - c_n)t] .$$

Saint-Venant complet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 , \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} &= g I - \frac{C_f}{2} \frac{U |U|}{h} . \end{aligned}$$

Méthode des caractéristiques :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) J_1 = N(J_1, J_2) \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) J_2 = N(J_1, J_2)$$

avec  $(\lambda_1, \lambda_2) = (U + c, U - c)$  et  $(J_1, J_2) = (U + 2c, U - 2c)$  .

Systèmes admettant des invariants de Riemman :

- La frontière entre une région uniforme et une onde simple est une droite caractéristique.
- Dans l'onde simple, les caractéristiques du même type que cette frontière sont aussi des droites.

### Ressauts hydrauliques

Relations de saut :

$$[[h(U - W)]] = 0 \quad , \quad \left[ \left[ hU(U - W) + \frac{1}{2}g'h^2 \right] \right] = 0 .$$

Inégalité de saut :

$$\left[ \left[ \left( \frac{1}{2}hU^2 + \frac{1}{2}g'h^2 \right) (U - W) + \frac{1}{2}g'h^2U \right] \right] = -D_0 < 0 .$$