Chapitre 4

Analyse vectorielle

4.1 Introduction : Coordonnées de l'espace

Le cadre géométrique de ce chapitre est l'espace usuel orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. L'écriture $M(x, y, z)$ signifie exactement que l'on considère le point M vérifiant : $\vec{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$. Plus simplement, on dit que le triplet (x, y, z) est un système de coordonnées cartésiennes de l'espace.

La notion d'orientation est précisée de la manière suivante : soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une autre base, nous dirons qu'elle est de sens direct si son déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ calculé dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est positif, et de sens indirect sinon.

Concrètement, nous pouvons visualiser l'orientation par la "règle des trois doigts" (pouce, index, majeur).

4.1.1 Coordonnées curvilignes

Pour décrire certains objets géométriques de l'espace (courbes ou surfaces) ou certains domaines de l'espace, nous aurons besoin d'introduire des systèmes de coordonnées plus commodes pour certains calculs, tels que les coordonnées cylindriques ou sphériques. Ces systèmes de coordonnées sont appelés des systèmes de coordonnées curvilignes.

Soit (R) une région de l'espace (sans préciser davantage ce que l'on entend par le mot région). Un système de coordonnées curvilignes sur (R) est la donnée d'une partie ouverte U de $\mathbb{R}^3$ et d'une correspondance biunivoque entre les triplets (u,v,w) de U et les points $M(x, y, z)$ de l'espace. Nous précisons ceci :

Un système de coordonnés curvilignes sur (R) est la donnée d'un couple (U, ϕ) où U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$ et ϕ une application bijective de U sur (R) continûment différentiable, ainsi que sa réciproque ϕ^{-1}. On dit que ϕ est un difféomorphisme de U sur (R) de classe C^1.

$$\phi : (u, v, w) \longmapsto \Big(x = x(u, v, w),\ y = y(u, v, w),\ z = z(u, v, w)\Big)$$

On appelle **ligne de coordonnées** les trois lignes obtenues en traçant respectivement dans l'espace les courbes correspondants à :

$$u \longmapsto \Big(x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)\Big) \quad (v,w) \text{ constants}$$
$$v \longmapsto \Big(x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)\Big) \quad (u,w) \text{ constants}$$
$$w \longmapsto \Big(x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)\Big) \quad (u,v) \text{ constants}$$

Les trois vecteurs e_u, e_v, e_w :

$$e_u = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \qquad e_v = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \qquad e_w = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

sont les vecteurs tangents à chacune des lignes de coordonnées.

4.1.2 Jacobien du changement de coordonnées

On appelle Jacobien du changement de coordonnées, le déterminant j_ϕ des trois vecteurs (e_u, e_v, e_w).

$$j_\phi(u,v,w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Remarque

Le Jacobien d'un changement de coordonnées ne s'annule pas.

$$\forall (u,v,w) \quad J_\phi(u,v,w) \neq 0$$

4.1.3 Coordonnées curvilignes orthogonales

Un système de coordonnés curvilignes est dit orthogonal si les trois vecteurs

$$e_u = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \qquad e_v = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \qquad e_w = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

forment une base ortogonale en tout point (u, v, w).

4.1.4 Exemples

a) Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) on a les relations :

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées sont :

$$e_\rho = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_\theta = \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le Jacobien des coordonnées cylindriques est $J(\rho, \theta, z) = \rho$.

C'est un système de coordonnées orthogonal car

$$\begin{aligned} e_\rho \cdot e_\theta &= -\rho\cos\theta\, \sin\theta + \rho\cos\theta\, \sin\theta = 0 \\ e_\rho \cdot e_z &= \cos\theta \times 0 + \sin\theta \times 0 + 0 \times 1 = 0 \\ e_\theta \cdot e_z &= -\rho\sin\theta \times 0 + \rho\cos\theta \times 0 + 0 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

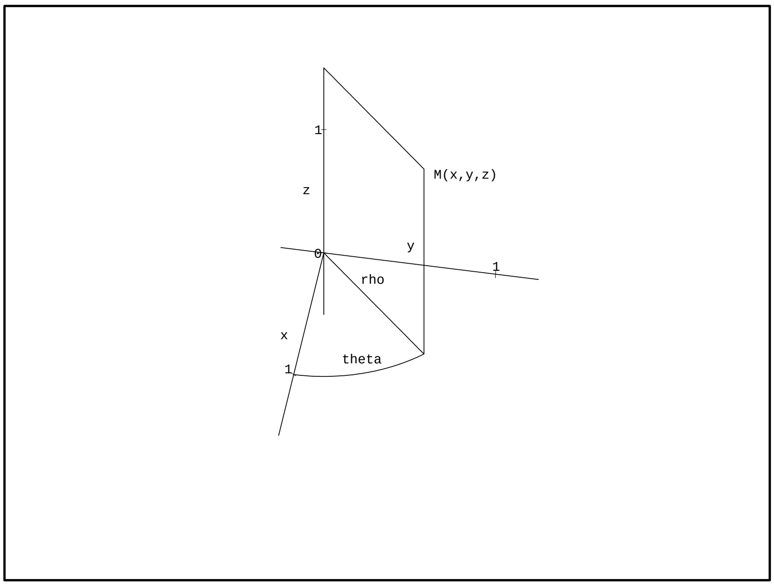


Fig : Coordonnées cylindriques

b) Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques (r, θ, φ), on a les relations :

$$\begin{cases} x = r\,\sin\varphi\,\cos\theta \\ y = r\,\sin\varphi\,\sin\theta \\ z = r\,\cos\varphi \end{cases}$$

Les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées sont :

$$e_r = \begin{pmatrix} \sin\varphi\,\cos\theta \\ \sin\varphi\,\sin\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad e_\theta = \begin{pmatrix} -r\,\sin\varphi\sin\theta \\ r\,\sin\varphi\,\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_\varphi = \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi\,\cos\theta \\ r\,\cos\varphi\,\sin\theta \\ -r\,\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Le Jacobien des coordonnées sphériques est $J(r, \theta, \varphi) = -r^2\,\sin\varphi$.
On peut encore vérifier que c'est un système de coordonnées orthogonales.

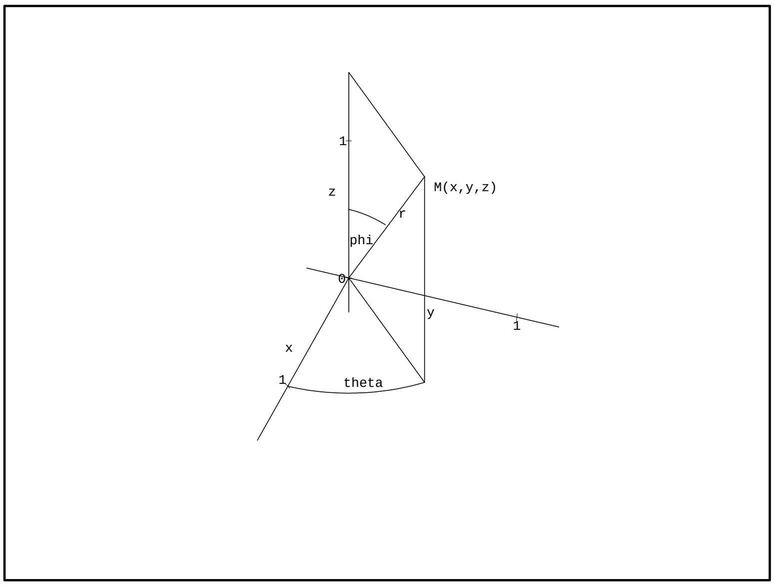


Fig : Coordonnées sphériques

4.2 Champs scalaire et vectoriel - Opérateurs

4.2.1 Champs scalaire et vectoriel

Champ scalaire

On appelle champ scalaire de l'espace $\mathbb{R}^3$ une fonction ϕ de $\mathbb{R}^3$ à valeurs scalaires :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \phi(x,y,z) \end{array}$$

Champ vectoriel

On appelle champ vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^3$ une fonction $\vec{V}$ de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rccl} \vec{V} : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \left(\begin{array}{c} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{array} \right) \end{array}$$

4.2.2 Le gradient d'un champ scalaire

Définition

Le gradient d'un champ scalaire ϕ est un champ vectoriel noté $\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ tel que :

$$D\phi(x,y,z)(\vec{v}) =< \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi, \vec{v} >$$

où $D\phi$ désigne la différentielle de ϕ et $<,>$ le produit scalaire usuel de l'espace.

Inerprétation physique

La valeur absolue du produit scalaire $| < \vec{u}, \vec{v} > |$ est maximum lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc le gradient est un vecteur dirigé dans la direction où l'accroissement (ou la pente) est le plus grand, puisque l'expression $D\phi(x,y,z)(\vec{v})$ sert à calculer l'accroissement de ϕ dans la direction $\vec{v}$.

Expressions analytiques

– En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

– En coordonnées cylindriques, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi(\rho,\theta,z)}{\partial \rho} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\phi(\rho,\theta,z)}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial\phi(\rho,\theta,z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

– En coordonnées sphériques, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi(r,\theta,\varphi)}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r\sin\varphi}\dfrac{\partial\phi(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

4.2.3 Le rotationnel d'un champ vectoriel

Définition

Le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{V}$ est un champ vectoriel noté $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$ tel que :

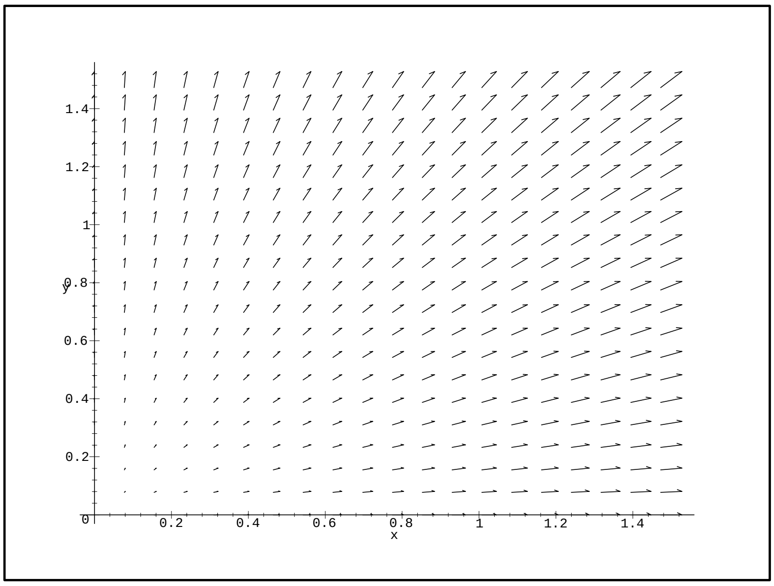
$$D\vec{V}(x,y,z)(\vec{v}) - {}^{t}D\vec{V}(x,y,z)(\vec{v}) = (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}) \wedge \vec{v}$$

où $D\vec{V}$ désigne la différentielle de $\vec{V}$ et ${}^{t}D\vec{V}$ sa transposée.

Interprétation physique

La définition du rotationnel ne permet pas de comprendre très intuitivement ce que le rotationnel mesure. Il nous faut donner quelques exemples à partir de champs de vecteurs :

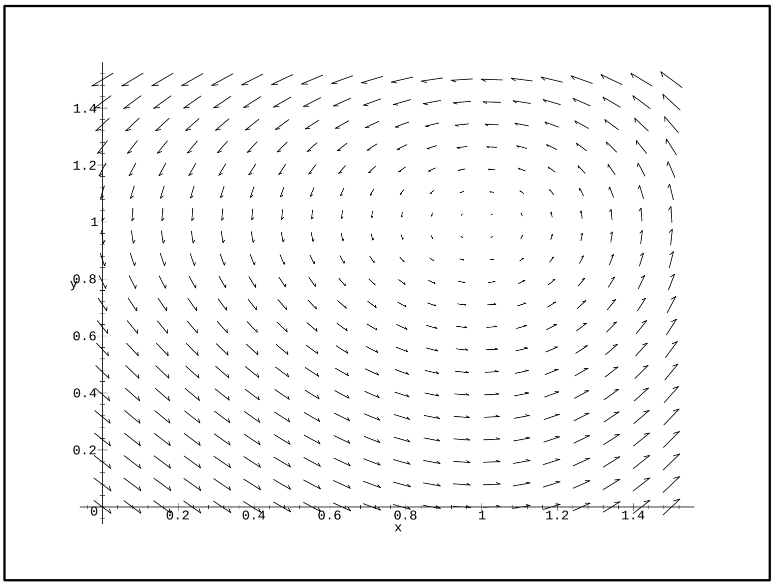
Exemple 1



$$\vec{V} = (x, y, 0)$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = (0, 0, 0)$$

Commentaire : Dans cet exemple, le rotationnel est nul : une petite barre rigide soumise en chacun de ces points au champ de forces représenté ici ne subirait localement qu'un mouvement de translation rectiligne, mais pas de mouvement de rotation.

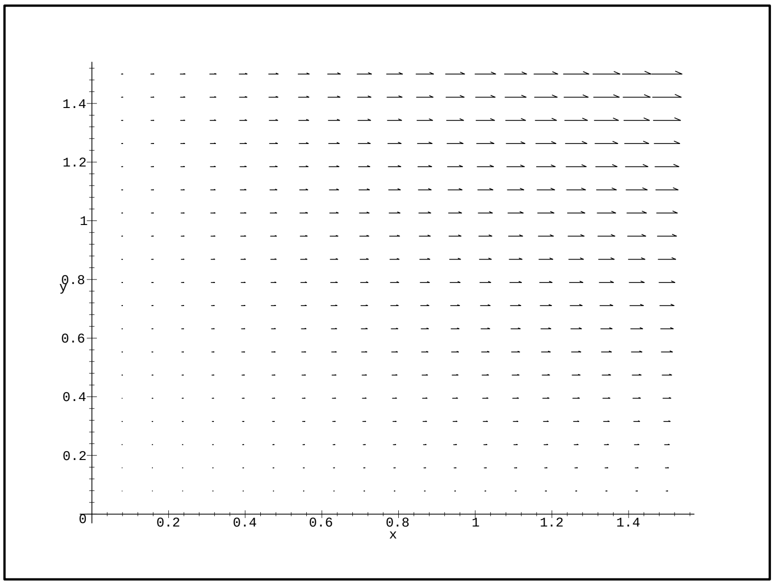
Exemple 2



$$\vec{V} = (1 - y^2, x^2 - 1, 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = (0, 0, 2x + 2y)$$

Commentaire : Dans cet exemple, le rotationnel au point $(1, 1, 0)$ est égal $(0, 0, 4)$. Une petite barre rigide placée en ce point et soumise au champ de forces subirait un mouvement de rotation que l'on imagine bien en voyant la représentation du champ de vecteur. Ce mouvement de rotation est dû au directions différentes du champ de vecteurs au voisinage du point considéré. Le rotationnel est un vecteur orthogonal au plan de la rotation (ici le plan $(0xy)$), et dont le module mesure l'amplitude ou la vitesse de la rotation.

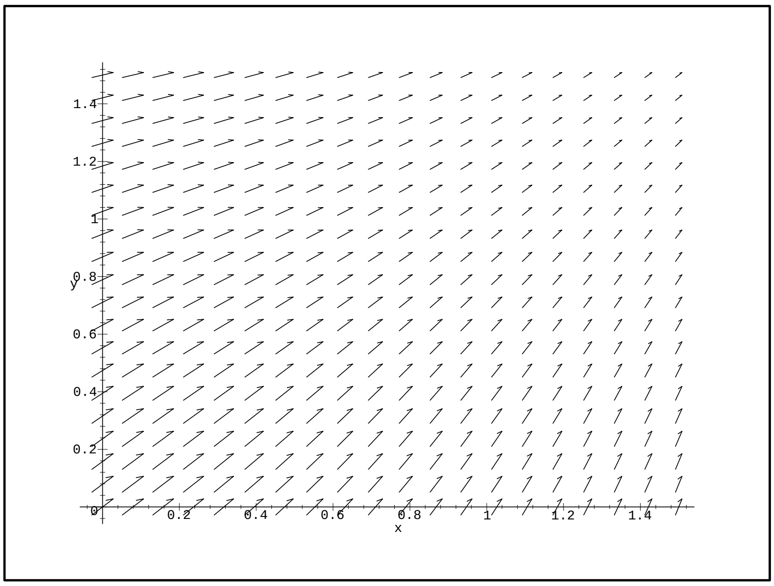
Exemple 3



$$\vec{V} = (xy, 0, 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = (0, 0, -x)$$

Commentaire : Dans cet exemple, le rotationnel est encore non nul : Le mouvement de rotation serait dû ici, non pas à des directions différentes, (tous les vecteurs sont dans la même direction, mais aux normes différentes de deux vecteurs voisins. Si le champ de force soumets les deux extrémités de la barre à des forces d'intensité différentes, mais de même direction, la barre prendra quand même un mouvement de rotation.

Exemple 4



$$\vec{V} = (\tfrac{1}{1+x^2}, \tfrac{1}{1+y^2}, 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = (0,0,0)$$

Commentaire : Dans cet exemple, le rotationnel est à nouveau nul : ici, malgré des vecteurs de normes et de directions différentes, les effets combinés se compensent et il n'y a pas de mouvement local de rotation .

Expressions analytiques

– En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ \\ Q \\ \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

– En coordonnées cylindriques, on a pour

$$\vec{V} = V_\rho\, e_\rho + V_\theta\, e_\theta + V_z\, e_z$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial V_\theta}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial V_\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial \rho} \\[2ex] \dfrac{\partial V_\theta}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho}\left[V_\theta - \dfrac{\partial V_\rho}{\partial \theta}\right] \end{pmatrix}$$

– En coordonnées sphériques, on a pour

$$\vec{V} = V_r\, e_r + V_\theta\, e_\theta + V_\varphi\, e_\varphi$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} + \dfrac{1}{r\sin\varphi}\left[V_\theta \cos\varphi - \dfrac{\partial V_\varphi}{\partial \theta}\right] \\[2ex] \dfrac{1}{r\sin\varphi}\dfrac{\partial V_r}{\partial \theta} - \dfrac{\partial V_\theta}{\partial r} - \dfrac{V_\theta}{r} \\[2ex] \dfrac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left[V_\varphi - \dfrac{\partial V_r}{\partial \varphi}\right] \end{pmatrix}$$

4.2.4 La divergence d'un champ vectoriel

Définition

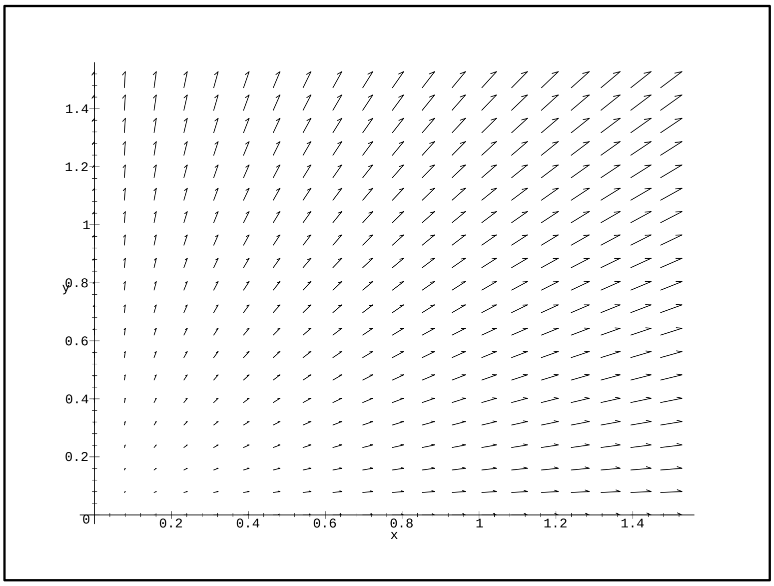
La divergence d'un champ vectoriel $\vec{V}$ est le champ scalaire noté $\mathrm{Div}\,\vec{V}$ défini par :

$$\mathrm{Div}\,\vec{V} = \mathrm{Tr}(D\vec{V})(x, y, z)$$

où $Tr(D\vec{V})$ désigne la trace de la différentielle de $\vec{V}$.

Interprétation physique

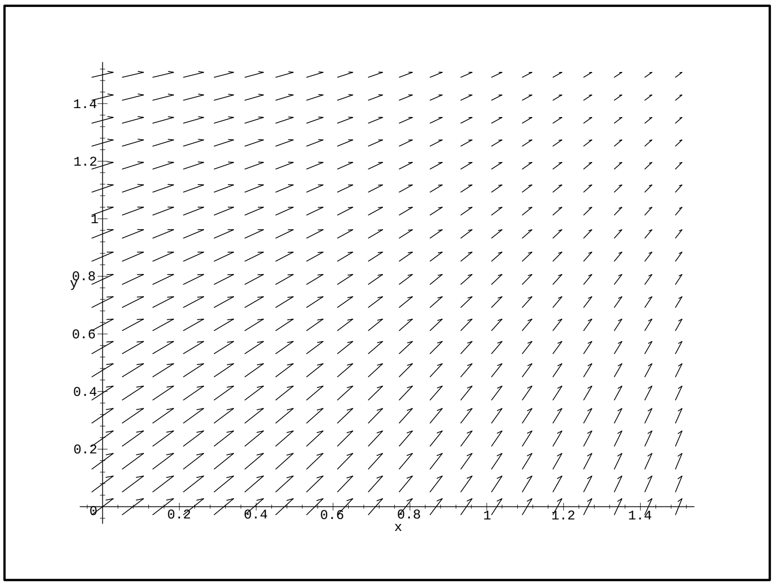
Exemple 1



$$\vec{V} = (x, y, 0)$$
$$\mathrm{Div}\,\vec{V} = 2$$

Commentaire : Interprétons le champ vectoriel ci-dessus comme par exemple le champ des vitesses d'un gaz, alors la divergence peut être interprétée comme une mesure de l'accroissement (positif ou négatif) de la densité de matière en un point donné. Dans l'exemple ci-dessus, la divergence est constante, égale à 2. La quantité de matière concentrée dans un petit volume en un point donné diminue. Les particules du gaz s'échappent dans toutes les directions, à une vitesse de plus en plus grande.

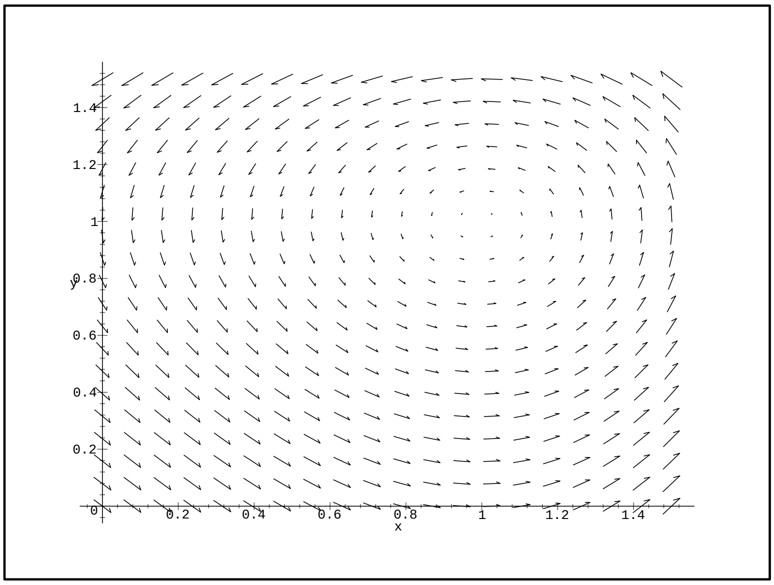
Exemple 2



$$\vec{V} = (\tfrac{1}{1+x^2}, \tfrac{1}{1+y^2}, 0)$$
$$\mathrm{Div}\,\vec{V} = -(\tfrac{2x}{1+x^2} + \tfrac{2y}{1+y^2})$$

Commentaire : Ici la divergence est négative dans le domaine considéré. les vitesses situées près de l'origine ont des modules plus grand que celles plus éloignées. Les particules du gaz vont rattrapper celles qui les précèdent : On aura accumulation des particules. On peut donner une autre image : penser à une autoroute sur laquelle les véhicules qui précèdent vont plus vite que les véhicules qui sont devant : il y aura accumulation.

Exemple 3



$$\vec{V} = (1 - y^2, x^2 - 1, 0)$$
$$\mathrm{Div}\, \vec{V} = 0$$

Commentaire : Dans cet exemple, malgré un champ de vitesses qui semble tourbillonner, la divergence est nulle : la quantité de matière pénétrant dans un petit volume donné est la même que celle qui en sort.

Expressions analytiques

– En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\mathrm{Div}\, \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

– En coordonnées cylindriques, on a pour

$$\vec{V} = V_\rho\, e_\rho + V_\theta\, e_\theta + V_z\, e_z$$

$$\mathrm{Div}\, \vec{V} = \frac{V_\rho}{\rho} + \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

– En coordonnées sphériques, on a pour

$$\vec{V} = V_r\, e_r + V_\theta\, e_\theta + V_\varphi\, e_\varphi$$

$$\mathrm{Div}\,\vec{V} = \frac{2}{r}\,V_r + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\left[V_\varphi \cos\varphi + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right]$$

4.2.5 Formules d'Analyse Vectorielle

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f\,g) = f\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g + g\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \tag{4.1}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\vec{V}) = f\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f) \wedge \vec{V} \tag{4.2}$$

$$\mathrm{Div}(f\,\vec{V}) = f\ \mathrm{Div}\,\vec{V} + < \vec{V}, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f > \tag{4.3}$$

$$\mathrm{Div}(\vec{V} \wedge \vec{W}) = < \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}, \vec{W} > - < \vec{V}, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{W} > \tag{4.4}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi) = \vec{0} \tag{4.5}$$

$$\mathrm{Div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}) = 0 \tag{4.6}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \tag{4.7}$$

$$\mathrm{Div}\,\vec{V} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \tag{4.8}$$