SEMAINE 2 - SERIE 2

OPERATEURS DIFFERENTIELS

CORRIGES

Rachid Ababou, Vladimir Bergez,
Laurent Bletzacker, Louis Randriamihamison

Semaine du 17 novembre 2003

Chapitre 1

Corrigé du devoir de la semaine 2

1.1 Exercice libre

On considère le champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $\vec{V} = \big(x^2 + y^2, -xy, -x\big)$

1. Déterminer une fonction ϕ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\phi(1) = 1$ et telle que $\phi(z)\vec{V}$ soit un champ de rotationnel.
2. Déterminer alors un champ de vecteurs $\vec{U} = (\big(P(x,y,z), Q(x,y,z), 0\big)$ tel que $\phi(z).\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$.

Solution

1.

$$\phi(z)\vec{V} = \big((x^2 + y^2)\phi(z), -xy\phi(z), -x\phi(z)\big)$$

donc l'équation $\mathrm{div}(\phi(z)\vec{V}) = 0$ donne :

$$2x\phi(z) - x\phi(z) - x\phi'(z) = 0$$

On obtient $\phi(z) - \phi'(z) = 0$ donc $\phi(z) = Ce^z$. La condition $\phi(1) = 1$ donne $C = e^{-1}$. Donc

$$\phi(z) = e^{z-1} \text{ et } \phi(z).\vec{V} = \big((x^2 + y^2)e^{z-1}, -xye^{z-1}, -xe^{z-1}\big)$$

2. On obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} &= -xy\, e^{z-1} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= -(x^2 + y^2)\, e^{z-1} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= -xe^{z-1} \end{aligned}$$

On peut donc prendre comme solution particulière :

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= -xy\, e^{z-1} \\ Q(x,y,z) &= -(x^2+y^2)\, e^{z-1} \\ R(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

Pour finir, on peut remarquer que tous les champs de vecteurs de la forme $\vec{U} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$ répondent à la question.