SEMAINE 2 - SERIE 2

OPERATEURS DIFFERENTIELS

CORRIGES

Rachid Ababou, Vladimir Bergez,
Laurent Bletzacker, Louis Randriamihamison

Semaine du 17 novembre 2003

Chapitre 1

Corrigés des exercices de la semaine 2

1.1 Corrigé de l'Exercice 2.2 avec indications

On considère le champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $\vec{V} = \big(x\,f(r), y\,f(r), 2z\,f(r)\big)$ où $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $r \longmapsto f(r)$ est une fonction de r de classe C^1.

1. Déterminer la fonction f vérifiant $f(1) = 1$ pour qu'il existe un champ de vecteurs $\vec{U}$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}$.
2. Déterminer alors le champ de vecteur $\vec{U} = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), 0\big)$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}$.
3. Donner la forme générale des potentiels-vecteurs $\vec{U}$.

Indications et réponses

1. Rappelons que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

Pour que le champ $\vec{V}$ dérive d'un potentiel, on doit avoir $\text{div}\,\vec{V} = 0$, ce qui donne :

$$\frac{\partial x f(r)}{\partial x} + \frac{\partial y f(r)}{\partial y} + 2\frac{\partial z f(r)}{\partial z} = 0$$

$$f(r) + f'(r)\,\frac{x^2}{r} + f(r) + f'(r)\,\frac{y^2}{r} + 2f(r) = 0$$

On obtient l'équation différentielle que doit vérifier la fonction f :

$$4f(r) + rf'(r) = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont la solution générale est :

$$f(r) = C\exp\left(\int \frac{-4}{r}dr\right) = Ce^{-4\ln r} = \frac{C}{r^4}$$

La condition $f(1) = 1$ donne la constante $C = 1$:

$$f(r) = \frac{1}{r^4}$$

Le champ $\vec{V}$ s'ecrit alors :

$$\vec{V} = \left(\frac{x}{r^4}, \frac{y}{r^4}, \frac{2z}{r^4}\right) \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

2. Si le champ $\vec{U} = (P, Q, R)$ vérifie $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$, alors on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{2z}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Ce système système n'est déterminé qu'à un champ de gradient près, cela signifie que ces équations ne déterminent pas une solution unique. On peut donc imposer une condition particulière pour simplifier la résoution : on choisit par exemple de poser $R = 0$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{-x}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{2z}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

On peut donc prendre comme solution particulière :

$$\begin{aligned}
P(x,y,z) &= \frac{yz}{(x^2+y^2)^2}\\
Q(x,y,z) &= \frac{-xz}{(x^2+y^2)^2}\\
R(x,y,z) &= 0
\end{aligned}$$

3. Comme on a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \vec{0}$, la forme générale des potentiels-vecteurs est :

$$\vec{U} = \left(\frac{yz}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-xz}{(x^2+y^2)^2}, 0 \right) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$$