Module Analyse vectorielle : addenda - novembre 2012

Ce document contient des errata sur les documents de cours et d'exercices, ainsi qu'une compilation des questions/réponses extraites des forums.

1 ERRATA

1.1 Semaine 1 - chapitre 4

Exercices

- p6, 1ère formule, lire : $\vec{AM} = \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{bmatrix}$.
- p7, question (c), idem : remplacer $y-a$ et $z-a$ par $y-b$ et $z-c$.
- p9, formule 1ère ligne : il n'y a pas μ_0.
- p9, réponse question 1 de l'exercice 2.2, 1ère ligne : lire "Pour que le champ $\vec{V}$ dérive d'un potentiel *vecteur* (...)".

1.2 Semaine 2 - chapitre 5, chapitre 6, section 1

Cours, chapitre 6

- p49, deux dernières lignes :

$$I = ... = \int_0^{2\pi} \big(... + (\cos t + \sin t)\cos t\big)\ dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} 1.dt = 2\pi\ .$$

Exercices, chapitre 6, séries 1 et 2

- corrigé ex 2.2, p7, 3ème ligne : lire

$$+\int_0^1 [(...)(-2(1-t)) + (...)]\ dt\ .$$

1.3 Semaine 3 - chapitre 6, sections 2-3

Exercices, chapitre 6, série 3

- p19, il apparait dans l'expression de ϕ un vecteur $\vec{B}$: il faut lire $\vec{H}$.

1.4 Semaine 4 - révision

Annales

- examen 2008, question 4, il aurait mieux valu demander de vérifier que div$\boldsymbol{v} = 0$, car, comme $\boldsymbol{v}$ est le gradient d'un scalaire, son rotationnel est automatiquement nul. C'est d'ailleurs la divergence nulle (champ dit solénoïdal) qui fait qu'il existe un potentiel vecteur.
- examen 2008, question 7, dernière ligne : lire

$$\oint_\gamma \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{a} \\ \frac{\cos t}{a} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = ...$$

2 EXTRAITS FORUMS 2008-2012

2.1 Semaine 1

Formule du rotationnel (ex 2.1 question b)

Q : Je ne comprends pas comment on peut trouver la formule du rotationnel de $\vec{F}$ *en partant de la formule du cours p.29 qui nous donne l'expression de* $(\vec{rot}\vec{V}) \wedge \vec{v}$.

R : Il est plus pratique d'utiliser les formules page 32 et 33.

Potentiel scalaire et potentiel vecteur

Q : Dans l'exercice 2.1 on nous dit que pour affirmer que le champ $\vec{F}$ *dérive d'un potentiel scalaire, il faut vérifier que* $rot\vec{F} = 0$*. Dans le second exo, on nous dit que pour que le champ* $\vec{V}$ *dérive d'un potentiel, on doit avoir* $div\vec{V} = 0$*.*

Je n'arrive plus trop à bien saisir. Dans quel cas doit on affirmer soit l'un ou l'autre ?

R : Un champ irrotationnel ($rot(\vec{v}) = 0$) dérive d'un potentiel scalaire ϕ : $\vec{v} = grad(\phi)$. Le potentiel ϕ peut être défini à une constante près : $\phi' = \phi+$cste marche aussi.

Un champ à divergence nul ($div(\vec{v}) = 0$) dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}$: $\vec{v} = rot(\vec{A})$. Le potentiel vecteur est défini à un champ irrotationnel près, ou encore, à un gradient près : $\vec{A'} = \vec{A} + grad(V)$, où V est un champ scalaire quelconque, marche aussi.

Le premier théorème se démontre facilement à partir du théorème de Stokes (semaine 3).

Le second peut se retrouver facilement à partir du téorème de la divergence (semeiane 3) pour les problèmes plans. Par contre, dans le cas général (3D), c'est plus difficile à montrer.

Dérivation d'une fonction de la distance à un point par rapport aux coordonnées cartésiennes

Q : (exo 2.1, opérateurs différentiels, p6 bas de page) je ne comprends pas l'égalité $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho^3} = -3\frac{x-a}{\rho^5}$*, est-ce issue d'une formule générale ?*

R : le mieux est de partir de ρ et de le deriver une fois par rapport à x :

$\partial_x \rho$?

le calcul montre que ca vaut $(x-a)/\rho$.

de ce resultat decoule :

$\partial_x \rho^{-1} = -\rho^{-2}\partial_x \rho = -(x-a)\rho^{-3}$

Opérateurs en coordonnées cylindriques et sphériques

Q : dans les expressions analytiques de la page 28 du cours, pour les coordonnées cylindriques et spheriques, on a des coefficients au niveau des dérivées sur θ et ϕ. Je ne vois pas pourquoi. Pourriez-vous m'expliquer ?

R : Pour le gradient, c'est assez facile, il faut partir de la differentielle de ϕ :

$$d\phi = gr\vec{a}d\phi \cdot d\vec{x}$$

et écrire cette relation dans les differents systemes d'axes qui nous interessent.

Par exemple en cylindrique :

$$d\vec{x} = d\rho\vec{e}_\rho + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

Si on note A_ρ, A_θ et A_z les coordonnees du gradiant de ϕ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, alors on trouve

$$A_\rho d\rho = \frac{d\phi}{d\rho}d\rho A_\theta \rho d\theta = \frac{d\phi}{d\theta}d\theta A_z dz = \frac{d\phi}{dz}dz$$

d'ou les formules du cours ; idem en spherique.

Par contre dans le cas de la divergence et le rotationnel, c'est un peu plus compliqué : il faut partir de leur définition à partir des formules de Stokes-Ampère et Green-Ostrogradski (semaine 3).

Exercice 2.1, question c

Q1 : Lorsqu'on cherche $\phi(x, y, z)$ pourquoi le moins disparait-il après intégration ? On intègre par rapport à x et donc $(-Kmm')$ est une constante.

R : Oui $-Kmm'$ est une constante mais l'intégration de $\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial x}$ donne $-\frac{1}{\rho}$.

Q2 : Dans la correction il est indiqué que l'on "peut par exemple poser" :

$$\frac{\partial Az}{\partial y} = \frac{q}{4\pi}\frac{-yv_z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et

$$\frac{\partial Ay}{\partial z} = \frac{q}{4\pi}\frac{-zv_y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

A priori, si l'on pose l'inverse, à savoir :

$$\frac{\partial Az}{\partial y} = \frac{q}{4\pi}\frac{zv_y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et

$$\frac{\partial Ay}{\partial z} = \frac{q}{4\pi}\frac{yv_z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

le résultat sera différent.

Alors comment faire le bon choix puisque celui-ci semble arbitraire d'après cette correction ? ?

R : La recherche de $\vec{A}$ (potentiel vecteur) conduit à une infinité de solutions, puisque, comme rot(gradϕ)=0, on peut ajouter à une solution un gradient quelconque. Dans le corrigé on vous suggère de chercher "comme vous pouvez" une solution, sans essayer d'avoir une méthode systématique.

En l'occurence, en posant ce qui est suggéré, ça marche. Mais on aurait pu aussi prendre votre solution, sauf que l'intégration est moins commode, puisque vous n'avez pas une dérivée évidente par rapport à y dans le membre de droite. Ainsi, il faut se débrouiller pour trouver le plus simplement possible une solution. Pour cela, il est conseillé de bien analyser les expressions mises en jeu.

Exercice 2.2

Q1 : Je ne comprend pas pourquoi à la question 1, pour déterminer qu'il existe un champs de vecteur $\vec{U}$ tq $\vec{V} = rot\vec{U}$ vous partez de l'hypothèse $div\vec{V} = 0$.

que signifie la phrase "pour que le champ $\vec{V}$ dérive d'un potentiel"

A la question 3 : que signifie la forme générale des potentiels vecteurs $\vec{U}$.

R1 : ce n'est pas une hypothèse :

$\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{A})) = 0$ pour tous les champs vectoriels.

"Forme générale" : l'expression donnée est générale car elle définit une infinité de solutions ($\vec{\text{grad}}\phi$ peut être quelconque car $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}(\phi)) = 0$ pour tout champ scalaire $\phi(x, y, z)$.

R2 : question 1 : détail du calcul.

le calcul de la divergence donne :

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial x f(r)}{\partial x} + \frac{\partial y f(r)}{\partial y} + \frac{\partial 2z f(r)}{\partial z}$$

en développant les produit de dérivées on trouve :

$$x\frac{\partial f(r)}{\partial x} + f(r) + y\frac{\partial f(r)}{\partial y} + f(r) + 2z\frac{\partial f(r)}{\partial z} + 2f(z)$$

Puis on utilise la dérivée d'une fonction composée :

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} f'(r) = \frac{x}{r} f'(r)$$

de même pour y (par contre $\frac{\partial r}{\partial z} = 0$).

On regroupe :

$$\frac{x^2 + y^2}{r} f'(r) + 4f(r) = rf'(r) + 4f(r)$$

Q2 : Question 2 : je ne comprends pas les 3 égalités donnant les dérivées de P et Q.

R : membre de gauche : les composantes de $r\vec{o}t(\vec{U})$.

membre de droite : les composantes de $\vec{V}$.

Exercice 2.3

Q : Je ne comprend pas ce qui est demandé dans l'exercice à rendre.

Quel type d'operation correspond à $\phi(z)\vec{V}$ *?*

$\phi(z)$ *signifie t-il que c'est une fonction de* R *dans* R *ou de* R^3 *dans* R *?*

Qu'appelez vous un champ de rotationnel ? Je vois bien le rotationnel d'un champ mais pas un champ vectoriel de rotationnel.

R : $\phi(z)$ est une fonction d'une variable (z) à valeurs dans R.

$\phi(z)\vec{V}(x,y,z)$ est donc simplement le champ vectoriel $\vec{V}$ multiplié par le scalaire ϕ : on peut appeler ce nouveau champ $\vec{A}(x,y,z)$ par exemple.

Dire que $\vec{A}$ est un champ de rotationnel revient à dire qu'il existe un vecteur $\vec{W}$ tel que $rot\vec{W} = \vec{A}$.

Ecrivez cette relation pour les 3 composantes... et trouver par intégration $\vec{W}$.

2.2 Semaine 2

Changement de variables

Q : La transformée en coordonnées cylindriques de dxdy donne apparemment $\rho d\rho d\theta$. Je ne suis pas arrivé a retomber sur ce résultat.

R : Vous trouverez les formules de changement de variables pour l'intégration p 20 et p22 du cours (chapitre 3, Intégrales multiples).

Exercice 1.1 question 2

Q : Dans le résultat de $\Phi(x, y, z)$, question 2, est ce correcte de ne pas ajouter une constante K ? K étant un réel.

R : Effectivement, les potentiels sont toujours donnés à une constante près. On l'oublie souvent, puisque cette constante est arbitraire.

Exercice 1.2

Q : La solution de cet exercice nous dit que l'on doit avoir $dQ/dx = dP/dy$. Je suppose qu'il s'agit d'une condition nécessaire ($rot\vec{V} = 0$) pour avoir $\vec{V} = grad\phi$.

R : en fait il suffit de voir que si $\vec{V}$ est égal au gradient de ϕ, on a :

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

cela donne bien $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

c'est en effet un rotationnel nul, à condition de rajouter une composante selon z (nulle car le champ est contenu dans le plan (x, y) ; dans ce cas, les composantes du rotationnel sont bien

$$\vec{rot}(\vec{V}) = 0\vec{i} + 0\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

et pour que $\vec{V}$ dérive d'un gradient, il suffit que ce rotationnel soit nul.

Il faut donc bien raisonner dans R^3 pour le rotationnel.

Exercice 2.1 et 2.2 : solutions particulières

Q : Lorsqu'on détermine un champ vectoriel tel que $\vec{H} = rot\vec{A}$, on obtient une solution particulière ; quel est le critère pour dire qu'elle est particulière ? Dans quel cas n'est elle pas particulière ?

Pourquoi le gradient que l'on ajoute au champ vectoriel lorsq'on a la solution particulière doit etre le gradient d'un champ scalaire C^2 ?

R : On appelle solution particulière, une solution parmi toutes les solutions.

On appelle solution générale, une forme de solution à laquelle satisfont toutes les solutions.

Les hypothèses de régularité sont souvent peu utilisées dans la pratique : soit elles sont acquises (en règle générale les champs utilisés en physique sont réguliers et indéfiniment dérivables), soit le champ est singulier et on le sait, et alors on utilise des méthodes adaptées.

Ici, le champ est C^2 : en fait il suffit qu'il soit dérivable 2 fois : 1 fois pour calculer son gradient, une seconde fois pour calculer le rotationnel du gradient. Je ne suis pas sur que la continuité de la dérivée seconde soit nécessaire, alors je reste prudent en la supposant.

Arcs paramétrés

Q1 : Dans l'exercice 2.1 (Green-Riemann) page 9 à 12 :

Serait-il possible d'avoir une explication pour la 2ième partie "calculer l'aire balayée par le vecteur $\vec{OM}(t)$ lorsque t varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Notamment pour le dernier arc rectiligne γ_3. Je ne comprends pas comment on trouve $\gamma_3 : t \mapsto ((1-t)\sqrt{a^2-b^2}, (1-t)b)$ avec $t \in [0,1]$.

R1 : il faut commencer par faire un dessin (voir cours) : on cherche l'aire de la surface limitee par les trois arcs OA, AB et BO. Pour utiliser Green-Riemann, on choisit de calculer la circulation du vecteur $\vec{V}(-y,0)$; il faut parametrer les arcs : OA et OB sont rectilignes : le plus simple est d'introduire une variable t qui varie linérairement sur l'arc et vaut 0 a une extrémité et 1 à l'autre ; cela donne sur l'arc OA : $\vec{OM} = t\vec{OA}$ ou encore pour les coordonnées :

$$x(M) = x(t) = t(x(A) - x(0))$$
$$y(M) = y(t) = t(y(A) - y(0)$$

c'est ce que vous avez dans l'énoncé en prenant les valeurs de $x(A)$ et $y(A)$. dans le cas de l'arc BO, c'est la meme chose : $\vec{BM} = t\vec{BO}$ ce qui donne

$$x(M) - x(B) = -tx(B)$$
$$y(M) - y(B) = -ty(B)$$

ou encore

$$x(M) = x(t) = (1-t)x(B)$$
$$y(M) = y(t) = (1-t)y(B)$$

c'est a nouveau ce que vous avez dans le corrige en prenant les valeurs de $x(B)$ et $y(B)$.

R2 : Parametrer un segment de droite :

soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ les deux points extrémités du segment.

un point intermédiaire $M(x, y, z)$ est tel qu'il existe t dans $[0, 1]$ tq

$\vec{AM} = t\vec{AB}$ (1)

vous avez la paramétrisation : c'est-à-dire que tout pt du segment est l'image d'une valeur de t : $t \to M(t)$.

en écrivant l'équation vectoriel (1) pour chaque composante, vous avez les coordonnées de $M(t)$:

$$x(t) = x_A + t(x_B - x_A)$$
$$y(t) = ...$$
$$z(t) = ...$$

Q2 : Ou pourrait-je trouver un formulaire regroupant les differentes paramétrisation possibles pour les différentes formes classiques ?

R : Je n'ai pas de référence particulière à vous donner, mais ce sont des choses que l'on trouve dans beaucoup de livres d'analyse (chapitre courbes et surfaces). En ce qui nous concerne, vous pouvez vous restreindre aux cas vus dans le cours :

- un segment de droite
- un cercle
- une sphère
- une ellipsoïde

– un cône

– une courbe y=f(x) (voir le cas de parabole dans AV2 exo 2.2)

dans les autres cas, la paramétrisation vous sera donnée. ce qu'il faut savoir faire, c'est utiliser une paramétrisation quelconque pour calculer une circulation ou un flux.

Q3 (exo 2.2, question 1) : je bloque sur le paramétrage des courbes. J'essaie de le faire par analogie avec l'exo 1.

R : - pour parametrer un segment de droite AB, il suffit d'utiliser la relation vectorielle $\vec{AM} = t\vec{AB}$, soit $x(t) = x(A) + t(x(B) - x(A)$ avec t variant de 0 à 1 pour parcourir le segemnt de A à B.

- pour parametrer la parabole 2 de l'exo 2.2, il s'agit de partir de l'equation de la parabole $x = y^2$; un paramétrage naturel est alors : $y = s$ et $x = s^2$. Si l'on souhaite partir du point (1,1) pour aller au point (0,0) s doit varier de 1 à 0 ; cela peut être plus commode de prendre $t = 1 - s$ pour avoir un paramétrage de 0 à 1.

Exercice 2.2

Q : je ne comprend pas comment appliquer la formule de Green-Riemann dans le corrigé de la question 2.

comment derterminez-vous le domaine D et la condition sur y notamment ?

je ne comprend pas comment vous déterminer les bornes.

R : le domaine D est le domaine compris entre les 2 arcs de paraboles, c'est-à-dire la surface interieure au circuit de la question 1.

équation courbe du dessous $C_1 : y = x^2$ équation courbe du dessus $C_2 : y = \sqrt{x}$

domaine D : domaine entre les deux courbes donc $y \geq x^2$ (au-dessus de C_1) ET $y \leq \sqrt{x}$ (au-dessous de C_1).

Vous pouvez vous référer au cours chapitre 3, Intégrales multiples, pour revoir ces questions d'intégration (pp 17-19).

Exercice 2.3

Q : Quel et la démarche pour l'étude du vecteur défini par $x(t) = a(t - sint), y(t) = a(1 - cost)$.

comment trouver les points caractéristiques ?

Je ne sais pas comment m'y prendre pour représenter cette courbe.

R : il s'agit de representer cette courbe point par point : prendre différentes valeurs de t entre 0 et 2π, et reporter sur le graphe les points (x, y) correspondants.

Pour les tangentes, il faut calculer le vecteur $(x'(t), y'(t))$.

2.3 Semaine 3

Calcul d'aires

Q : Cours p52 : aire du tronc de cône : pourquoi le champ scalaire de l'espace ϕ (voir p51, définition intégrale de surface) n'apparaît-il pas dans la formule de calcul ?

R : pour le calcul de l'aire, on fait un "pavage" de la surface (on la découpe en petit carré aussi petit que l'on veut) et on somme les aires de ces pavés :

$$\sum_i \Delta A_i$$

où les ΔA_i sont les aires des pavés. Lorsque les pavés deviennent infiniment petit, les ΔA_i "deviennent" des dA et la somme sur les i devient une "somme infinie" ou encore une intégrale :

$$A = \iint_\Sigma dA$$

Dans le cours on appelle $d\sigma$ les éléments d'aire dA.

Cela revient à intégrer $f(x, y, z) = 1$ sur le domaine Σ, et cela s'interprète comme une densité surfacique unité (= chaque pavé à un poids égal à sa surface).

Comment connaître l'orientation d'une surface ?

Q1 : Sur la correction détaillé de cet exercice (p 11 du chapitre 3 troisieme serie) Il est écrit que le vecteur $\begin{pmatrix} -bc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est dirigé vers l'intérieur de l'ellipsoïde. Comment détermine t-on cela est plus généralement comment déterminer le sens de la normale par rapport a la surface étudiée, et savoir quelle est la direction que l'on doit choisir.*

R : Pour le calcul d'un flux à travers la frontière d'un domaine fermé (ici l'ellipsoïde, mais ça peut être une sphère, une forme patatoïde,etc.), la question de l'orientation de la normale à la surface est la suivante : si c'est le flux sortant que l'on veut, il faut orienter le vecteur normal vers l'extérieur du domaine, si par contre c'est un flux entrant, c'est vers l'intérieur du domaine qu'on oriente la surface. La formule p52, ch6 ("Formules Intégrales") du cours, qui vous permet de calculer un vecteur normal "surface", ne donne pas nécessairement la bonne orientation. Après l'avoir calculer il faut donc vérifier qu'il est dirigé dans le bon sens. Dans l'exercice que vous faites, on regarde le vecteur normal en un point "facile", on regarde s'il est dirigé vers l'extérieur ou l'intérieur, on en déduit s'il faut ou non changer son orientation, puis on dit c'est pareil en tout autre point de la surface (la formule p52, donne une orientation constante sur toute la surface, c'est-à-dire l'orientation ne change pas brusquement en un point de la surface).

Il existe une autre méthode pour calculer directement le vecteur normal extérieur sans corriger le signe. Je la donne, mais pour vous ce n'est pas dans le programme : soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface, tel que $f < 0$ à l'intérieur et $f > 0$ à l'extérieur. Le vecteur grad$f$ est alors normal dirigé vers l'extérieur.

Q2 : Je reviens sur la notion du sens du champ sortant, j'ai qq difficultés sur ce point. Pour la dernière question (exo 3.2, question 2), peut-on utiliser la règle du pouce pour savoir si l'on tourne dans le sens trigo, à savoir l'index donnant le sens trigo et le pouce le sens du vecteur champ sortant : de cette façon je vois que mon flux sortant doit être positif. Si mon résultat final est négatif, j'en déduis qu'il faut prendre en compte le sens trigo en compte car mon vecteur normal n'est pas dans le bon sens (cas d une integrale double) ou que mon champ vectoriel ne tourne pas dans le bons sens sur le bord désiré (cas d une integrale simple). Est-ce correct de raisonner ainsi ?

R : Oui, la règle du pouce (main droite) convient. Toutefois, je ne suis pas sur qu'il n'y ait pas confusion de votre part dans votre raisonnement sur le signe du résultat. Lorsque vous orientez votre contour à partir du vecteur normal (le cas ici), ou que vous orientez le vecteur normal à partir du sens de parcours du contour, il faut faire totalement abstraction du champ vectoriel dont vous calculer la circulation ou le flux.

Sinon, la règle est la suivante :

– j'ai choisi une orientation du vecteur normal : c'est mon pouce ; je le positionne donc comme le vecteur normal et je regarde dans quel sens tourne ma main (pouce vers le haut, pouce vers le bas = deux sens de parcours opposés).
– j'ai choisi le sens de parcours du contou**R :** c'est mon index ; je le positionne le long du contour dans le sens choisi et le pouce me donne l'orientation du vecteur normal.

Exercice 3.1, question 3 : calcul du vecteur normal

Q : Je ne comprend pas le calcul du vecteur normal associé à la sphere. Pourquoi le vecteur normal ne dépend que des vecteurs dérivés de ϕ et θ ? Que veut dire "tangents aux lignes de coordonnées" ?

R : il faut se reporter au cours page 43 pour le calcul d'un vecteur normal.

dans cet exercice, on paramètre la sphère par ϕ et θ. à partir de là, on peut calculer le vecteur normal en faisant le produit vectoriel des deux vecteurs obtenus en dérivant la paramétrisation de la sphère par rapport aux deux paramètres (vecteurs $\vec{v}_\phi$ et $\vec{v}_\theta$).

Une ligne de coordonnée est une ligne sur la sphère obtenue en prenant l'un des deux paramètres constant et en faisant varier l'autre :

- ligne de coordonnée θ : on fixe ϕ =cste et on fait varier θ :

$$x = A\cos\theta$$
$$y = A\sin\theta$$
$$z = B$$

avec $A = R\sin\phi$ et $B = R\cos\phi$, tous deux constants. on voit donc qu'une ligne de coordonnée θ est une courbe dans le plan $z = B$ et c'est un cercle de rayon A.

- ligne de coordonnée ϕ :... (je vous laisse faire)

Enfin, les vecteurs $\vec{v}_\phi$ et $\vec{v}_\theta$ sont tangents aux lignes de coordonnées :

en effet, si vous fixer ϕ, dans ce cas, un petit déplacement sur la ligne de coordonnée θ corrrespond à un incrément $d\theta$; on peut alors calculer le vecteur qui correspond à ce petit déplacement, il a pour composantes :

$$x(\theta + d\theta) - x(\theta)$$
$$y(\theta + d\theta) - y(\theta)$$
$$z(\theta + d\theta) - z(\theta)$$

(toujours à ϕ constant). Un développement limité donne alors au premier ordre :

$$x(\theta + d\theta) - x(\theta) = \frac{\partial x}{\partial\theta} d\theta$$

idem pour y et z. Ainsi le petit vecteur déplacement est colinéaire au vecteur de composantes

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial y}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

qui n'est autre que $\vec{v}_\theta$ qui est donc tangent à la ligne de coordonnée θ.

Vecteur normal

Q1 : Je n'arrive pas à me représenter sur un schema ce qu'est un vecteur normal pour des formes type ellipsoide ou paraboloide.

Comment puis-je faire et comment représenter un vecteur normal dans ces formes ?

R : bien dessiner dans l'espace ! ! ! !

ou alors construire en vrai une surface et utilier une allumette pour représenter le vecteur normal...

ou bien, bien se représenter mentalement les surfaces...

je ne pense pas que le concept de vecteur normal vous pose pbe ? (par définition c'est une vecteur perpendiculaire au plan tangent à la surface ; le plan tangent est assez simple conceptuellement (mais pas toujours dans la pratique - par exemple quand la surface présente un col) : considérez un point de la surface ; en ce point posez un plan sans "couper" la surface en ce point : c'est votre plan tangent).

(NB : vous trouverez plein d'images de vecteurs normaux sur google.)

Q2 : lors du calcul du vecteur normal $\vec{N}$ page 52 du cours, on effectue le produit vectoriel du vecteur gradient par rapport à r par le vecteur gradient par rapport à t (r et t étant les 2 variables dans notre paramétrisation => jusque là je suis OK).

Page53 : on effectue un nouveau calcul d'un vecteur normal, mais cette fois-ci le produit vectoriel n'est pas dans le même sens (contradictoire ?). N'ayant pas fait le calcul dans le même sens je trouve le même résultat avec un moins devant, ce qui est normal puisque le produit vectoriel est ansymétrique.

Du coup je ne sais pas dans quel sens il faut effectuer le produit vectoriel pour le calcul d'un vecteur normal ? ?

R : Tout d'abord, un vecteur normal à une surface en un point est défini comme un vecteur orthogonal au plan tangent à cette surface en ce point, et donc peut être orienté dans deux sens opposés.

P52 : il s'agit de calculer l'élément de surface. Dans ce cas, la paramétrisation étant choisi, on peut trouver un vecteur normal par produit vectoriel de deux vecteurs tangents aux lignes de coordonnées : $(\partial x/\partial r, \partial y/\partial r, \partial z/\partial r)$ est tangent à la ligne $t = cste$ et vice versa pour l'autre vecteur. Puisque seulement la norme de ce vecteur nous intéresse, peu importe le sens choisi, ie l'ordre du produit vectoriel.

p53 : cette fois l'orientation importe. le flux d'un vecteur est une quantité algébrique (>0,=0,<0), et change de signe si on change le sens du vecteur normal. Il faut donc cette fois contrôlé le sens choisi, et être capable de dire sur un schéma, en fonction de l'ordre du produit vectoriel, si c'est dans un sens ou l'autre. Méthode : sur la ligne iso-t, le vecteur $(\partial x/\partial r, \partial y/\partial r, \partial z/\partial r)$ est par définition orienté dans le sens des r croissants ; idem pour l'autre vecteur. On a donc la réponse par une simple construction graphique du produit vectoriel de ces deux vecteurs.

p53 suite : cette fois l'orientation importe (bis). Le théorème de Stokes nécessite d'orienté le bord de la surface Σ et d'en déduire par la règle du pouce (ou du bonhomme d'Ampère, ou des trois doigts) l'orientation de la normale au contour. Il faut donc s'assurer dans ce cas que le produit vectoriel pour obtenir le vecteur normal est fait dans le bon ordre.

Q3 (exercice 3.1 question 3) : Je n'arrive pas à comprendre la méthode pour déterminer la bonne orientation du vecteur Normale (question 3).

comment peut-on voir que c'est un vecteur sortant de la sphère ?

quel est l'utilité de prendre $\phi = \theta = 0$?

R : L'idée est de regarder l'orientation du vecteur normal construit en un point (facile en $\theta = \phi = 0$).

Attention toutfois : : il faut considérer en ce point le vecteur normal unitaire de manière à ne pas avoir $\vec{N} = 0$. Vous pouvez vérifier que la norme du vecteur normal calculé comme le produit vectoriel de $\vec{v}_\varphi$ et $\vec{v}_\theta$ est égal $R^2 \sin\phi$.

Calcul d'un flux

Q1 : Dans l'exercice 3.1, question 3 :

Une fois que nous avons calculé $\vec{N}$, je n'arrive pas à comprendre ce qu'il faut faire pour calculer le flux.

Dans la correction (page 19), je ne vois pas comment on trouve :

$$\vec{H} = \frac{q}{4\pi}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}$$

Pour la question 4, je ne comprends plus rien...

R : Le flux d'un vecteur à travers une surface est par définition l'integrale sur cette surface de la composante normale de ce vecteur (la composante normale est le produit scalaire du vecteuré par la normale unitaire – il y a donc une notion d'orientation), ou encore la somme des flux élémentaires sur toute la surface, le flux élémentaire étant le produit de la composante normale du vecteur avec l'élément de surface.

(Dans la correction apparait un vecteur $\vec{B}$: c'est un bug, il faut lire $\vec{H}$.)

La formule de $\vec{H}$ dont vous ne voyez pas l'origine est seulement la formule générale calculée dans la question 1 où l'on a fait $v_x = v_y = 0$ et $v_z = 1$ (hypothese de la question).

Question 4 : tout d'abord noter que le vecteur $\vec{A}$ va jouer le role de $\vec{V}$ dans la formule de Stokes du cours, puisque $rot\vec{A} = \vec{H}$.

la solution est plutot astucieuse.

En effet, le theoreme de Stokes-Ampere ne s'applique a priori qu'a des surfaces s'appuyant sur des contours simplement connexes, c'est-à-dire que l'on peut tracer sans lever la plume (un cercle par exemple). Dans notre cas, le cylindre ouvert possede deux bords (contour doublement connexe). Il faut donc trouver un moyen pour se ramener à la condition du théorème de Stokes...

Un moyen est de ramener notre domaine à bord non connexe à un domaine à bord connexe. Ici, il suffit de fermer une des extrémités du cylindre par un surface (passer de la boite de conserve ouverte des deux côtés à une boite ouverte seulement d'un côté). Choisissons de fermer en $y = 1$: on obtient alors une surface Σ' de contour γ_1 qui est la somme de la surface qui nous intéresse Σ est d'une surface Σ_2 qui est le disque de contour γ_2. On peut donc écrire que le flux à travers Σ' est égal à la somme du flux à travers Σ et du flux à travers Σ_2 :

$$\iint_{\Sigma'} = \iint_{\Sigma} + \iint_{\Sigma_2}$$

Pour l'intégrale de gauche, on peut utiliser le théorème de Stokes : c'est la circulation de $\vec{A}$ selon γ_1 ; idem pour la deuxième intégrale du membre de droite qui est égale à la circulation de $\vec{A}$ le long de γ_2. On en déduit donc que le flux à travers Σ est la différence des circulations sur γ_1 et γ_2 (faire attention aux orientations).

Q2 :Je bloque sur le calcul du flux de H sur la portion de cylindre.

Sur la figure 3.1 quels sont les axes x,y et z ?

Je ne vois pas de quelle orientation il s'agit ?

Pourquoi est-ce inscrit page 21 "le vecteur $\vec{N} \wedge \vec{\gamma}'$ " ?

R : le domaine est le cylindre s'axe y limité par les plans $y = \pm 1$ et de rayon R. essayer de le dessiner et après seulement regarder le corrigé. les axes devraient être évidents.

la surface est donc un tronçon de tube ouvert.

quand on demande le flux sortant, c'est qu'on considère qu'il y a un interieur et un extérieur. ici la surface est ouverte, donc dans l'absolu, il n'y a pas d'intérieur et d'extérieur. c'est le bon sens qui vous indique l'orientation : sortant = de l'intérieur du tube vers l'extérieur...

votre dernière question : l'expression $\vec{N} \wedge \vec{\gamma}'$ correspond à la règle d'orientation directe pour appliquer le théorème de Stokes ; une autre façon de dire les choses est d'utiliser la règle du pouce, ou la règle des trois doigts, ou bien la règle du bonhomme d'Ampère : j'oriente la circulation de manière à ce que la tête du bonhomme soit dans la direction de la normale à la surface et l'intérieur du circuit soit à sa gauche lorsqu'il se déplace le long du circuit (c'est peut-être plus clair ?).

Q3 : dans cette exercice je ne comprends pas 1 comment on vérifie que le vecteur obtenu est un vecteur sortant, 2 ce qu'est un bord vide. Pourriez vous m'éclairer la dessus ?

R : 1. c'est indiqué dans la corrigé. - une manière de voir est de tracer le vecteur pour un point particulier et regarder son orientation : vers le centre de la sphère (entrant), ou vers l'infini (sortant). - autre méthode : par construction les vecteurs $\vec{v}_\phi$ et $\vec{v}_\theta$ sont orientés respectivement selon les ϕ et les θ croissants (rappel : ces vecteurs sont aussi tangents aux lignes de coordonnées : en faisant leur produit scalaire, on trouve l'orientation de $\vec{N}$...)

2. formulation un peu sybilline : pour appliquer Stokes-Ampère, il faut une surface ouverte ; or la sphère est fermée ; mais on peut considérer une sphère avec un trou : pour cette sphère trouer, le flux de $\vec{H}$ est égal au flux de $\vec{rot}\vec{A}$, soit à la circulation de $\vec{A}$ sur le contour du trou ; ensuite pour obtenir le flux à travers la sphère, on fait tendre le trou vers un point : le contour tend vers 0 et la circulation aussi (Stokes-Ampère pour un "bord vide").

Autre façon de voir que je préfère pour montrer que le flux d'un rotationnel à travers une surface fermée est nulle : vous couper le surface en 2 (virtuellement) et vous appliquer Stokes-Ampère pour les 2 demi-surfaces ; comme elles sont même bord, mais parcouru en sens inverses, les flux du rotationnel à travers les 2 demi-surfaces sont opposés –> le flux total du rotationnel a travers la surface fermée est nul.

Q4 (question 3 exo 3.1) : Comment, en lisant la question, doit-on comprendre qu'il nous faut calculer un vecteur normal ?

Qu'est-ce exactement ce vecteur normal ?

Dans le cours S1 p.26, il y a 3 vecteurs tangents aux lignes de coordonnées ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\phi$). Pourquoi nous n'en utilisons que 2 ici ?

R :

- Par définition, le flux d'un vecteur à travers une surface est égal à l'intégrale sur la surface du produit scalaire par le vecteur normal : d'où la nécessité de calculer le vecteur normal à la surface considérée.
- un vecteur normal en un point, est un vecteur orthogonal au plan tangent à la surface en ce point. Pour le construire, il "suffit" de deux vecteurs tangents à la surface et linéairement indépendants : un vecteur normal est alors un vecteur orthogonal à ces deux vecteurs, donc un vecteur colinéaire au produit vectoriel de ces deux vecteurs. Il faut donc trouver deux vecteurs tangents.

Pour cela on utilise la paramétrisation choisi : on appelle ligne de coordonnée, les lignes obtenues en faisant varier un paramètre et en gardant l'autre fixe. Par exemple, sur la sphère, il y a les lignes à θ constant (latitudes) et les lignes à ϕ constant (méridiens). Le vecteur tangent à une ligne de coordonnée est nécessairement tangent à la surface : c'est $\vec{v}_\theta$ pour "ligne θ" ($\phi = cste$ et θ varie) ; de même $\vec{v}_\phi$ est tangent à une ligne ϕ.
On obtient donc un vecteur normal en faisant le produit $\vec{v}_\theta \wedge \vec{v}_\phi$.
Noter que ce vecteur est orienté de telle manière que $(\vec{v}_\theta, \vec{v}_\phi, \vec{N})$ est direct. En changeant l'ordre du produit vous changer l'orientation de $\vec{N}$.

– Dans le cas de surface de la sphère, $r = cste$: cela signifie que seules ϕ et θ varient sur la sphère et donc que sur la sphère, il n'y a que des lignes de coordonnées ϕ et θ.
Dans le cas du volume de la sphère ("boule"), il y a 3 paramètres pour repérer un point : r, θ et ϕ ; on peut construire des lignes de coordonnées r, θ ou ϕ.
Noter qu'une surface est paramétrisée par deux coordonnées indépendantes, une courbe par un paramètre, et un volume par 3 paramètres.

Q5 (exo 3.1, question 3) : Je n'arrive pas à comprendre dans la question 3 comment a été réalisé le bornage de l'intégrale double de calcul du flux.

R : Par définition, lorsqu'on a choisi un système de paramétrisation (ici (θ, ϕ) pour la surface de la sphère), l'élément de surface orienté $\vec{dS}$ est égal au produit $\vec{v}_\phi \wedge \vec{v}_\theta \, d\theta \, d\phi$. Il faut ensuite faire varier θ et ϕ pour couvrir toute la sphère : ϕ est l'angle zenithal ou colatitude et varie de 0 (pôle nord) à π (pôle sud), et ϕ est l'angle longitudinal et varie de 0 à 2π. Ainsi le domaine d'intégration est l'ensemble des valeurs de ϕ et θ couvertes, soit $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

"Je sèche sur Stokes-Ampère"

Q : Je sèche sur Stockes-Ampère

Dans l'exo 3.1, en 2, comment doit-on comprendre ou mieux, comment peut-on s'imager le fait que $\vec{H} = \vec{rot}\vec{A}$?

En gros, qu'est-ce que cela signifie CONCRETEMENT ? ? Que le champ magnétique est un champ de rotationnel ? Qu'il créé une force tournant autour de O ? ... ?

Pas faciles du tout ces notions...

R : Ce concept (difficile) de potentiel vecteur est issu de l'électromagnétisme (EM). Puis il est devenu un concept général d'analyse vectorielle appliqué à d'autres disciplines (mécanique des fluides, par exemple).

En EM, le potentiel vecteur du champ magnétique est lié à la loi d'Ampère qui dit que les sources du champ magnétiques sont les courants électriques : une boucle de courant génère un champ magnétique, d'où l'idée de rotationel ; le potentiel vecteur s'exprime alors en fonction du vecteur courant électrique, et le champ magnétique correspond à la "micro-circulation" de ce vecteur. Je crois (à vérifier car ce sont des souvenirs assez lointains) que c'était la théorie d'Ampère qui voyait les milieux magnétiques comme des milieux constitué d'un assemblage de micro-boucles de courant (théorie des feuillets magnétiques).

En MKF, un champ de vitesse incompressible dérive aussi d'un potentiel vecteur. Cette fois, on peut relier le potentiel vecteur à la vorticité de l'écoulement qui est le rotationnel de la vitesse. L'idée est alors de décrire l'écoulement par une superposition dans l'espace de micro-vortex ou encore des micro-tourbillons. Ainsi le le tourbillon est mathématiquement l'équivalent de la boucle de courant pour le champ magnétique, et comme lui figure plutôt une description mathématique d'un champ qu'une réalité physique (par exemple, un écoulement parallèle peut être rotationnel).

2.4 Semaine 4

Examen 2007

Q1 :je me pose la question suivante : comment fait-on pour déterminer le vecteur normal d'une surface définie dans le plan $(0, x, y)$ *par :*

$$x^2 + y^2 = 1etz = 0$$

Je n'arrive pas à voir comment appliquer la définition du cours p52.

Q2 : Après quelques recherches, pouvez vous me dire s'il est juste d'écrire ceci :

si on recherche le vecteur normale au disque dans le plan (Oxy) *de contour définit par :*

$$x^2 + y^2 = 1etz = 0$$

on peut paramètriser le disque par :

$$x = \rho cos\theta \qquad y = \rho sin\theta$$

on a donc

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta \\ sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\rho sin\theta \\ \rho cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{k}$$

car dans notre cas, on a $\rho = constante = 1$

de plus le vecteur normal est bien orienté vers le haut si l'on décrit le disque dans le sens trigonométrique(avec la régle du tire bouchon).

R : oui, votre raisonnement est exact. toutefois, un simple schéma vous aurait aider : en dessinant un disque dans le plan, le vecteur normal ne peut être qu'un vecteur orthogonal au plan... pour l'orientation, la règle du tire-bouchon donne le resultat. tout cela sans calcul...

Question d'ordre général *Q : une question d'ordre general : certains calculs d integrale sont vraiment très longs et compliqués, j'avoue ne pas m'en sortir... doit on détailler le calcul de chaque intégrale dans le devoir à rendre ou peut-on se servir des résultats obtenus à la calculatrice ?*

Je me pose la même question pour l'examen car les calculs risquent de prendre un temps fou, et forcément des erreurs sont vite arrivées !

R : Il est important de faire les calculs sans l'aide du calculateur de poche. Cela peut paraître fastidieux, mais l'entrainement vaut la peine pour la suite. L'idée est qu'en acquérant certains automatismes, on peut se concentrer sur le principal qui est souvent la compréhension et l'analyse d'un système, le choix d'une stratégie, l'esprit critique sur un résultat...