INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

MATHS Rappels
Suites, Fonctions, Développements limités

Pascal Floquet
Xuân Meyer
Jean-Claude Satge

Première Année à Distance

Septembre 2006

Table des matières

Chapitre 1

Nombres Réels - Suites numériques

1.1 Notations - Règles logiques

Pour faciliter l'exposé et la compréhension, nous allons rappeler dans cette section quelques notations et règles logiques fondamentales.

1.1.1 Indices et sommation

Nous utiliserons souvent des notations avec des indices, ceci permet de noter différents éléments d'un même ensemble. Nous noterons par exemple $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ onze nombres réels.

Ces indices permettent aussi d'écrire des sommes et des produits de nombres. On écrira notamment

$$\sum_{k=1}^{n} x_k$$

pour la somme $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ et

$$\prod_{k=1}^{n} x_k$$

pour le produit $x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$.

Dans ces notations l'indice k joue un rôle opératoire. On l'appelle l'indice de sommation.

Lorsque le contexte est suffisamment clair on écrit simplement :

$$\sum_{k} x_k \quad \text{et} \quad \prod_{k} x_k$$

et même parfois

$$\sum x_k \quad \text{et} \quad \prod x_k$$

Remarque 1.1.1 *Le produit des deux sommes* $\sum_{k=1}^{n} x_k$ *et* $\sum_{l=1}^{p} y_l$ *est une somme de* np *termes. En effet nous avons :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{l=1}^{p} y_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} x_k y_l \tag{E1}$$

car

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + \cdots + y_p) = x_1(y_1 + \cdots + y_p) + x_2(y_1 + \cdots + y_p) + \cdots + x_n(y_1 + \cdots + y_p)$$

Remarque 1.1.2 *Dans l'expression de gauche de la formule (E1) nous aurions pu prendre la même lettre pour les indices* k *et* l*, mais nous ne pouvons pas le faire dans l'expression de droite.*

Remarque 1.1.3 *On peut intervertir l'ordre des sommes :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} x_k y_l &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{p} x_k y_l\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(x_k y_1 + \cdots + x_k y_p) \\
&= (x_1 y_1 + \cdots + x_1 y_p) + (x_2 y_1 + \cdots + x_2 y_p) + \cdots + (x_n y_1 + \cdots + x_n y_p) \\
&= \sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_l\right) \\
&= \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} x_k y_l
\end{aligned}$$

Remarque 1.1.4 *Nous avons :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} x_k x_l = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{k<l} x_k x_l$$

Nous venons de voir le cas où il n'y a qu'un seul indice, mais souvent dans la pratique nous avons besoin de plusieurs indices. Nous noterons par exemple

$$(x_{ij})_{i=1,\ldots,n\ ;\ j=1\ldots,p}$$

les nombres $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1p}, x_{21}, \ldots, x_{np}$. La notation

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_{ij}$$

signifie $x_{11} + \cdots + x_{np}$. On note parfois cette somme double :

$$\sum_{i,j} x_{ij}$$

Remarque 1.1.5 *La formule*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

signifie en général

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_n x^n$$

où

$$x^k = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\text{k fois}}$$

Définition 1.1.1 (Symbole de Kronecker) *On appelle symbole de Kronecker les nombres δ_{ij} définis par :*

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= 1 \text{ si } i = j \\
\delta_{ij} &= 0 \text{ si } i \neq j
\end{aligned}$$

1.1.2 Notations

Définition 1.1.2 (Implication) *Une propriété P implique une propriété Q si tout élément ayant la propriété P possède la propriété Q. On note ceci de la façon suivante :*

$$P \Longrightarrow Q$$

Définition 1.1.3 (Equivalence) *Une propriété P est équivalente à une propriété Q, et on note $P \Longleftrightarrow Q$ si et seulement si P implique Q et Q implique P.*

Proposition 1.1.1 *Si P implique Q et Q implique R alors P implique R.*

Nous utiliserons souvent dans la suite les quantificateurs "quel que soit" ($\forall$) et "il existe" ($\exists$). La proposition

$$\forall x \in A \quad , \quad xP$$

signifie que la proposition P est vraie pour tout x élément de A et se lit : Quel que soit x appartenant à l'ensemble A, x vérifie P. Tandis que l'expression

$$\exists x \in A \quad , \quad xP$$

signifie que la proposition P est vraie pour au moins un x élément de A et se lit : Il existe x appartenant à l'ensemble A tel que x vérifie P

1.1.3 Raisonnements

1.1.3.1 Raisonnement par négation

Nous serons amenés parfois à démontrer l'implication non $Q \Longrightarrow$non P plutôt que $P \Longrightarrow Q$. Ces deux assertions sont en effet équivalentes.

1.1.3.2 Raisonnement par l'absurde

Afin de démontrer que la proposition P est vraie nous ferons parfois un raisonnement par l'absurde. Ce raisonnement consiste à supposer que non P est vraie et à montrer que l'on aboutit alors à une contradiction.

1.1.3.3 Raisonnement par récurrence

On appelle P_n une propriété concernant l'entier naturel n.

Exemple 1.1.1

$$0+1+2+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (A)$$

$$3 \ \ divise \ \ 4^n-1 \qquad (B)$$

$$2^n \geq (n+2)^2 \qquad (C)$$

Principe de démonstration par récurrence *: en trois phases*

1. On vérifie que la propriété P_{n_0} est vraie
2. On démontre que pour $n \geq n_0,\ P_n \Rightarrow P_{n+1}$
   *Pour cela on suppose que la propriété est vraie à l'indice n et on démontre qu'alors elle est vraie à l'indice $n+1$. Autrement dit on démontre le **caractère héréditaire** de cette propriété.*
3. On conclut que la propriété est vraie pour tous les entiers supérieurs à n_0

Les exemples (A) et (B) sont vrais pour tout n, (C) à partir de $n=6$.
Démonstration du (B)

- On vérifie P_0 : 3 divise 0, en effet $0 = 3\times 0$
- Supposons P_n : 3 divise 4^n-1,
  On a : $4^{n+1}-1=4^n\times 4-1$
  Donc $4^{n+1}-1=4^n\times(3+1)-1$
  Soit : $4^{n+1}-1=4^n\times 3+(4^n-1)$
  3 divise $4^n\times 3$ et 3 divise (4^n-1) d'après l'hypothèse de récurrence.
  Donc 3 divise la somme de ces deux nombres et donc 3 divise $4^{n+1}-1$. Donc P_{n+1} est vraie.
- La propriété est donc vraie pour tout n entier naturel

1.2 Nombres réels

1.2.1 Existence et unicité de $\mathbb{R}$

Nous admettrons l'existence et l'unicité d'un ensemble $\mathbb{R}$, dont les éléments sont appelés les nombres réels, et qui est muni de deux lois internes $+$ et $\times$, et d'une relation $\leq$, tel que

1. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif
2. $\leq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$
3. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

Définition 1.2.1 (Ensemble borné) *Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que E est borné si et seulement si E est majorée et minorée*

Définition 1.2.2 (Plus grand élément, plus petit élément) *Soit $E \subset \mathbb{R}$*

1. *On dit que E admet **un plus grand élément** M si et seulement si :*

$$M \in E, \text{et } M \text{ est un majorant de } E$$

   On note $M = Max(E)$

2. *On dit que E admet **un plus petit élément** m si et seulement si :*

$$m \in E, \text{et } m \text{ est un minorant de } E$$

   On note $m = Min(E)$

Définition 1.2.3 (Borne supérieure, borne inférieure) *Soit $E \subset \mathbb{R}$*

1. *On appelle **borne supérieure** le plus petit des majorants de E dans $\mathbb{R}$, s'il existe. On le note $Sup(E)$*
2. *On appelle **borne inférieure** le plus grand des minorants de E dans $\mathbb{R}$, s'il existe. On le note $Inf(E)$*

Définition 1.2.4 (Intervalle de $\mathbb{R}$) *Soient a, b deux réels tels que $a \leq b$*

1. *On appelle intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b l'ensemble noté $[a, b]$ des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq x \leq b$.*
2. *On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b l'ensemble noté $]a, b[$ des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < b$.*
3. *On appelle intervalle fermé à gauche, ouvert à droite de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b l'ensemble noté $[a, b[$ des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq x < b$.*
4. *On appelle intervalle ouvert à gauche, fermé à droite de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b l'ensemble noté $]a, b]$ des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x \leq b$.*
5. *On appelle intervalle semi-ouvert un intervalle fermé à gauche et ouvert à droite ou un intervalle ouvert à gauche et fermé à droite.*

Définition 1.2.5 (Voisinage d'un point)

1. *Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage de a tout sous ensemble V de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle ouvert contenant a :*

$$V \text{ est un voisinage de } a \Longleftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \;\; \alpha > 0, \; \beta > 0 \;\; / \;\;]a - \alpha, a + \beta[\subset V$$

2. *Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. On appelle voisinage de a tout sous ensemble V de $\mathbb{R}^2$ qui contient un sous ensemble du type $]a_1 - \alpha_1, a_1 + \beta_1[\times]a_2 - \alpha_2, a_2 + \beta_2[$ où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont 4 réels strictement positifs.*
3. *Soit $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle voisinage de a tout sous ensemble V de $\mathbb{R}^n$ qui contient un sous ensemble du type*

$$]a_1 - \alpha_1, a_1 + \beta_1[\times]a_2 - \alpha_2, a_2 + \beta_2[\cdots\times]a_n - \alpha_n, a_n + \beta_n[$$

   où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sont des réels strictement positifs.

Remarque 1.2.1 *Dire que V est un voisinage du point a signifie en fait que les points les "plus proches" de a sont dans V.*

Exemple 1.2.1 *Nous donnons ci-dessous deux exemples correspondant aux deux premiers cas de la définition*

1. $]2;5[$ *est un voisinage de 2,1. Il suffit en effet de prendre* $\alpha = 0,05$ *et* $\beta = 1$.
   $]2;5]$ *n'est pas un voisinage de 5 car si* $\beta > 0$ *nous avons toujours* $\beta + 5 > 5$.
2. *L'ensemble* $V = [1;3] \times [1,5;2,5]$ *représenté ci-dessous est un voisinage du point* $a = (1,5;2)$.

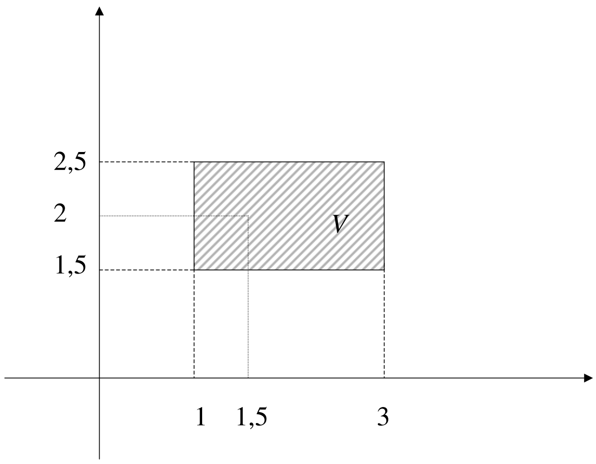


FIG. 1.1 – V est voisinage du point $a = (1,5;2)$

1.2.2 Propriétés élémentaires des nombres réels

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$
2. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x < y \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, x \leq y \Leftrightarrow x^n \leq y^n$
4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tous réels $x_1, \ldots, x_n$: $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
5. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tous réels $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$:
   - $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \leq y_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$
   - $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, 0 \leq x_i \leq y_i \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \leq \prod_{i=1}^{n} y_i$
   - $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \leq y_i$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \Rightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i = y_i)$

Théorème 1.2.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tous réels $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$:*
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

1.3 Suites numériques

1.3.1 Définitions

Définition 1.3.1 *Une suite numérique est une fonction u de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$. L'image $u(n)$ de l'entier n est notée u_n. u_n est appelé le terme général, ou le terme d'indice n, de la suite.*
La suite est notée (u_n)

Exemple 1.3.1
- *soit (u_n) définie par : $u_n = n^2 + n$*

On a : $u_0 = 0$; $u_1 = 2$; $u_2 = 6$; $u_3 = 12$; ... ; $u_{10} = 110$; ... ; $u_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1)$
- *soit (v_n) définie par : $v_n = (-1)^n(n^2 + n)$*

On a : $v_0 = 0$; $v_1 = -2$; $v_2 = 6$; $v_3 = -12$; ... ; $v_{10} = 110$
- *soit (w_n) la suite définie par : $w_0 = 3$ et $w_{n+1} = 2w_n$*

On a : $w_0 = 3$; $w_1 = 6$; $w_2 = 12$; $w_3 = 24$; ....

(u_n) et (v_n) sont définies par des ***formules explicites*** qui permettent de calculer chaque terme de la suite à partir de n.
(u_n) est définie à partir de la fonction $f : x \mapsto x^2 + x$. On a : $u_n = f(n)$
(w_n) est définie ***par récurrence*** par la donnée du premier terme w_0 et de la ***relation de récurrence*** : $w_{n+1} = f(w_n)$. Pour connaître le terme de rang n, il faut connaître celui de rang $(n-1)$

1.3.2 Suites croissantes, suites décroissantes

Définition 1.3.2 *Une suite (u_n) est **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq u_{n+1}$.*
*Une suite (u_n) est **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq u_{n+1}$*

On dit que (u_n) est ***monotone*** si elle est croissante, ou si elle est décroissante.
Pour étudier la monotonie des suites on utilise essentiellement les méthodes suivantes :

1. *Technique algébrique* : Elle consiste :
   - soit à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
   - soit à comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, si l'on sait que u_n est strictement positif pour tout n.

   Exemple : soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n^2 + n$
   On a : $u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - (n^2 + n) = 2n + 2$
   Pour tout n entier naturel, $2n + 2 > 0$,
   et donc $u_{n+1} - u_n > 0$ ou encore : $u_n < u_{n+1}$.
   Donc (u_n) est croissante.
2. *Technique fonctionnelle* :
   Elle s'applique aux suites de la forme $u_n = f(n)$. On utilise le sens de variation de la fonction f .
   Exemple : soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n^2 + n$
   (u_n) est définie à partir de la fonction $f : x \mapsto x^2 + x$. f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   Donc (u_n) est croissante.
3. *Technique par récurrence* :
   Elle s'applique aux suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

   Exemple 1.3.2 *Prouver que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ est strictement croissante.*

   - La propriété est vraie pour $n = 0$, en effet $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6}$, donc $u_1 > u_0$
   - Supposons la propriété vraie au rang n, c'est à dire : $u_n > u_{n-1}$

   On a : $u_n + 6 > u_{n-1} + 6$
   Donc $\sqrt{u_n + 6} > \sqrt{u_{n-1} + 6}$, car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante
   Donc $u_{n+1} > u_n$
   - la suite (u_n) est donc strictement croissante.

1.3.3 Suites majorées, minorées

Définition 1.3.3 *Soit (u_n) une suite numérique.*
La suite (u_n) est majorée si et seulement s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$, pour tout entier naturel n.
La suite (u_n) est minorée si et seulement s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$, pour tout entier naturel n.

Note : Si (u_n) est, à la fois, majorée et minorée, on dit qu'elle est ***bornée***.
Pour prouver qu'une suite est majorée ou minorée on utilise essentiellement les méthodes suivantes :

Exemple 1.3.3 *Prouver que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$ est telle que : $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{e}$*

Le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ montre que cette fonction est croissante sur $]0\,;\mathrm{e}]$, passe par un maximum égal à $\dfrac{1}{e}$, et décroît vers 0.

De plus $f(1) = 0$. On peut donc affirmer que pour n entier supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{e}$

Exemple 1.3.4 *Prouver que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ est telle que $0 \leq u_n \leq 3$.*

On raisonne par récurrence
- La propriété est vraie pour $n = 0$, en effet $u_0 = 0$ et $0 \leq u_0 \leq 3$
- Supposons la propriété vraie au rang n, c'est à dire : $0 \leq u_n \leq 3$

On a : $6 \leq u_n + 6 \leq 9$
Donc $\sqrt{6} \leq \sqrt{u_n + 6} \leq \sqrt{9}$, car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante
Donc $\sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq 3$, et donc $0 \leq u_{n+1} \leq 3$.
- la suite (u_n) est donc telle que $0 \leq u_n \leq 3$.

1.3.4 Suites arithmétiques et géométriques

Définition 1.3.4
- *Une suite (u_n) est* ***arithmétique*** *si chacun de ses termes se déduit du précédent en lui ajoutant une constante r appelée raison. (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et par : $u_{n+1} = u_n + r$*
- *Une suite (u_n) est* ***géométrique*** *si chacun de ses termes se déduit du précédent en le multipliant par une constante q appelée raison. (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et par : $u_{n+1} = u_n \times q$*

Principaux résultats

	Suite arithmétique	***Suite géométrique***
Calcul de u_n	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$
Relation entre u_n et u_p	$u_n - u_p = (n-p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
$S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p$	$S_n = \dfrac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$	Si $q \neq 1$, $S_n = \dfrac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q}$

Exemple 1.3.5 *Calculer les sommes : $S = 11 + 13 + 15 + \ldots + 47 + 49$ et $S' = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + ... + \dfrac{1}{16384}$*

- S est la somme de 20 termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2. $(20 = \dfrac{49-11}{2} + 1)$.
  $S = \dfrac{11+49}{2} \times 20 = 600$
- S' est la somme de 13 termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $\dfrac{1}{4}$ et de raison $\dfrac{1}{2}$ En effet : $\dfrac{1}{16384} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2^{12}}$.
  Donc $S = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{13}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{2^{13} - 1}{2^{14}} = \dfrac{8191}{16384}$

1.3.5 Limite d'une suite

Définition 1.3.5 *Soit (u_n) une suite numérique et l un réel. On dit que (u_n) converge vers l (ou a pour limite l) si tout intervalle ouvert contenant l, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*

Autrement dit : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq n_0, \ |u_n - l| \leq \varepsilon$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *ou encore* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$

Si la suite (u_n) ne converge pas, on dit qu'elle est divergente.

Remarque 1.3.1 $|u_n - l| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < u_n - l < \varepsilon \Longleftrightarrow u_n \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$

Exemple 1.3.6 *Soit* $x_n = \dfrac{1}{n}$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

En effet $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 = \dfrac{1}{\varepsilon} \ / \ \forall n > n_0, \quad 0 < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

Et donc $-\varepsilon < \dfrac{1}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow |x_n - 0| \leq \varepsilon$

Plus généralement

Les suites définies, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par : $\dfrac{1}{n^\alpha}, (\alpha > 0)$ ont pour limite 0

Remarque 1.3.2 *Si une suite est convergente, sa limite est unique.*

Définition 1.3.6 *Soit (u_n) une suite numérique et A un réel positif choisi aussi grand qu'on le veut. On dit que (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*
Autrement dit : $\forall A > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \quad n \geq n_0 \quad \Longrightarrow u_n > A$
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *ou encore* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
De même :
(u_n) *admet pour limite* $-\infty \Longleftrightarrow \forall A < 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \quad n \geq n_0 \quad \Longrightarrow u_n < A$.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *ou encore* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Lorsque la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ [respectivement $-\infty$], on dit qu'elle diverge vers $+\infty$ [respectivement $-\infty$]. Mais attention, une suite peut être divergente pour deux raisons :

- soit sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$
- soit elle n'a pas de limite : par exemple la suite (u_n) définie par : $u_n = (-1)^n$ est une suite alternée, chaque terme est égal à 1 si n est pair ou (-1) si n est impair ; elle n'a pas de limite, on dit qu'elle diverge.

En particulier :
Les suites définies, pour $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = n^\alpha, (\alpha > 0)$ ont pour limite $+\infty$

1.3.6 Opérations sur les limites

Théorème 1.3.7 *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites numériques qui convergent respectivement vers l et l' alors*

1. *La suite (w_n) définie par $w_n = u_n + v_n$ converge vers $l + l'$*
2. *La suite (w_n) définie par $w_n = ku_n$ (k réel fixé) converge vers kl*
3. *La suite (w_n) définie par $w_n = u_n v_n$ converge vers ll'*
4. *La suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$ si $l' \neq 0$*

Théorème 1.3.8 *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors*

1. *La suite (w_n) définie par $w_n = u_n + v_n$ est telle que : $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$*
2. *La suite (w_n) définie par $w_n = ku_n$ (k réel fixé est telle que :*
   $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *si* $k > 0$ *et* $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *si* $k < 0$

3. *La suite* (w_n) *définie par* $w_n = u_n v_n$ *est telle que :* $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

On obtient des résultats analogues lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Théorème 1.3.9 *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ *alors*

1. *La suite* (w_n) *définie par* $w_n = u_n + v_n$ *est telle que :* $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
2. *La suite* (w_n) *définie par* $w_n = u_n v_n$ *est telle que :* $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *si* $l > 0$ *et* $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *si* $l < 0$

Théorème 1.3.10

1. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$*, alors la suite* (w_n) *définie par* $w_n = \dfrac{1}{u_n}$ *est telle que :* $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
2. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et si* $u_n > 0$ *à partir d'un certain rang, alors la suite* (w_n) *définie par* $w_n = \dfrac{1}{u_n}$ *est telle que :* $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Remarque 1.3.3 *Il existe plusieurs cas, appelés formes indéterminées :*

1. *Si* $u_n \to +\infty$ *et* $v_n \to -\infty$*, on ne peut pas conclure immédiatement pour la suite* (w_n) *définie par* $w_n = u_n + v_n$
2. *Si* $u_n \to +\infty$ *(ou* $-\infty$*) et* $v_n \to 0$*, on ne peut pas conclure immédiatement pour la suite* (w_n) *définie par* $w_n = u_n v_n$
3. *Si* $u_n \to +\infty$ *(ou* $-\infty$*) et* $v_n \to +\infty$ *(ou* $-\infty$*), on ne peut pas conclure immédiatement pour la suite* (w_n) *définie par* $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$
4. *Si* $u_n \to 0$ *et* $v_n \to 0$*, on ne peut pas conclure immédiatement pour la suite* (w_n) *définie par* $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$

Exemple 1.3.7 *Soit* $u_n = \ln n$ *et* $v_n = n$
$w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ *est une forme indéterminée,*
$z_n = u_n - v_n$ *est une forme indéterminée.*

- $w_n = \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ln n}{n}$ donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- $z_n = u_n - v_n = \ln n - n = n\left(\dfrac{\ln n}{n} - 1\right)$
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-n)$ et donc $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

1.3.7 Théorèmes de comparaison

Théorème 1.3.11 *Si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Théorème 1.3.12 *Soient* u_n*,* v_n *et* w_n *trois suites telles que :*
Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ *alors* (v_n) *converge et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Exemple 1.3.8 *Soit la suite* (u_n) *définie par :* $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$

On a $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sin n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$

1.3.8 Comportement des suites monotones

Théorème 1.3.13 (dit de la convergence monotone)

1. *Toute suite croissante et majorée est convergente*
2. *Toute suite décroissante et minorée est convergente*

Exemple 1.3.9 *Soit la suite* (u_n) *définie de la façon suivante :* $u_0 = 0$; $u_1 = 0,1$; $u_2 = 0,12$; $u_3 = 0,123$; .... ; $u_{11} = 0,1234567891011$; u_n *est le nombre obtenu en juxtaposant successivement tous les entiers* $1, 2, 3, \ldots, n$ *après la virgule.*

Il est facile de montrer que (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc (u_n) converge.

Théorème 1.3.14

1. *Toute suite croissante et non majorée tend vers* $+\infty$
2. *Toute suite décroissante et non minorée tend vers* $-\infty$

On en déduit :

Théorème 1.3.15 *q est un réel.*

1. *Si* $q > 1$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
2. *Si* $|q| < 1$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

Note : si $q = 1$, on a $q^n = 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$

Remarque 1.3.4 *Si* $q < -1$, q^n *n'a pas de limite.* q^n *prend des valeurs infiniment grandes en valeur absolue, positives si* n *est pair et négatives si* n *est impair.*

1.3.9 Suites de Cauchy

Définition 1.3.16 *On dit qu'une suite numérique est de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall p \geq n_0,\ \forall q \geq n_0\,,\ |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

Théorème 1.3.17 *Soit* (u_n)*une suite numérique, les propositions suivantes sont équivalentes*

1. (u_n)*est une suite de Cauchy*
2. (u_n) *est convergente*

1.3.10 Suites adjacentes

Définition 1.3.18 *On dit que les deux suites numériques* (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes lorsque la suite* (u_n) *est croissante, la suite* (v_n) *est décroissante et* $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème 1.3.19 *Si deux suites numériques* (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes et telles que la suite* (u_n) *est croissante et la suite* (v_n) *est décroissante, alors elles convergent vers la même limite* l, *et, pour tout* n *on a :* $u_n \leq l \leq v_n$

Démonstration : Soit $w_n = v_n - u_n$
On a : $w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - u_{n+1} - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1})$
Or la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante
donc$(v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1})$ est la somme de deux termes négatifs
et donc $w_{n+1} - w_n \leq 0$.

La suite (w_n) est donc décroissante et converge vers 0, ce qui permet de dire que tous les termes de la suite (w_n) sont positifs.

On en déduit que $v_n - u_n \geq 0$, soit $u_n \leq v_n$
Or (v_n) est décroissante, donc, pour tout n,$v_n \leq v_0$ et donc $u_n \leq v_0$
(u_n) est donc une suite croissante et majorée (par v_0).
(u_n) est donc convergente vers l.

On montre de même que (v_n) est décroissante et minorée (par u_0). (v_n) est donc convergente vers l'

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = l' - l$

Or $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

Donc $l' = l$

Exemple 1.3.10 *Soient les suites (u_n) et (v_n) définie par :*
$u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ *et* $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

On a :

- $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$
- La suite (u_n) est croissante (évident)
- La suite (v_n) est décroissante

En effet : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)!} - \left(u_n + \dfrac{1}{n!}\right)$

soit $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$

C'est à dire : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$

Enfin $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1-n}{(n+1)!}$. Et ce nombre est négatif pour $n \geq 1$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes, elles convergent vers la même limite l, et, pour tout n on a : $u_n \leq l \leq v_n$

Chapitre 2

Fonctions numériques de la variable réelle

Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$, on appelle fonction réelle de la variable réelle toute fonction de E dans $\mathbb{R}$.

2.1 Limite

f est une fonction numérique a et l sont deux réels. I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point

2.1.1 Limite réelle (finie) en a.

Définition 2.1.1 *f est une fonction définie sur I sauf peut-être au point a. Dire que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a signifie que tout voisinage de l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez voisin de a.*
On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *ou* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$
Autrement dit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 / \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Note : si f est définie en a et si la limite de f existe alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

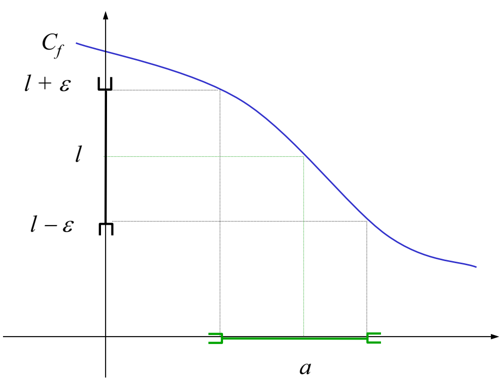


Fig. 2.1 – limite réelle en a

Exemple 2.1.1 *Chercher la limite en $a = 1$ de $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ définie sur $D =]-\infty\ ; 1[\cup]1\ ; +\infty[$*

On a : $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$
donc, pour $x \neq 1$, on a : $f(x) = x + 2$ et $|f(x) - 3| = |x - 1|$
donc $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta\ (= \varepsilon)/\forall x \in D,\ |x-1| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - 3| = |x - 1| \leq \varepsilon$
on en déduit : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$

Exemple 2.1.2 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :* $\begin{cases} f(x) = 2 & \text{pour} \quad x < 1 \\ f(x) = 3 & \text{pour} \quad x \geq 1 \end{cases}$

$f(1) = 3$, mais 3 n'est pas la limite de f en 1, en effet l'intervalle $J =]2,5; 3,5[$, contenant 3 ne contient pas toutes les valeurs de $f(x)$ pour x voisin de 1 : $f(0{,}99) = 2$ et $2 \notin J$

2.1.2 Limite infinie en a. Asymptote verticale.

Définition 2.1.2 *f est une fonction définie sur I sauf peut-être au point a, M est un réel positif, dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a signifie que tout intervalle de la forme $[M; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez voisin de a. On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$*
Autrement dit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0,\ \exists\eta > 0/\forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M$$

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si et seulement si $-f$ admet $+\infty$ pour limite en a.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ la droite d'équation $x = a$ est asymptote (verticale) à la courbe.

Exemple 2.1.3 *f est définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{2}{(x-2)^2}$.*

Dès que $|x - 2| \leq 0,01$, on a : $f(x) \geq 2 \times 10^4$
On comprend que tout intervalle de la forme [M ; $+\infty$[contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez voisin de 2
On a : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$.
La droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe.

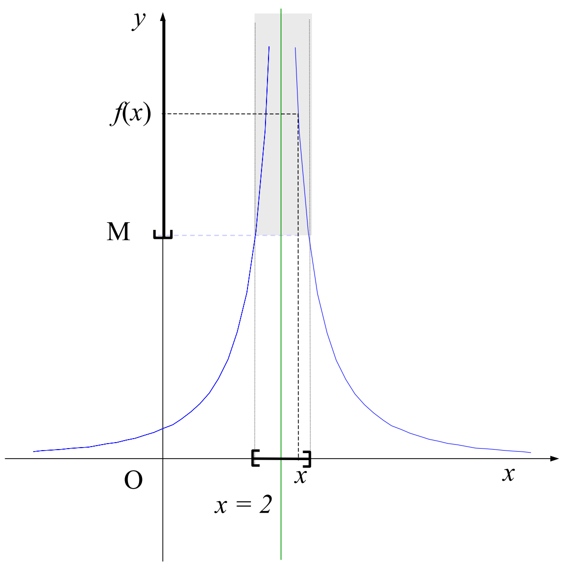


Fig. 2.2 – Limite infinie au point 2

2.1.3 Limite à gauche. Limite à droite.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{2}{1-x}$.
Au voisinage du point 1, f prend des valeurs très grandes en valeur absolue, positives pour $x<1$ et négatives pour $x>1$. f n'a donc pas de limite en 1.

Cependant la fonction f_1 définie sur $I=]1;+\infty[$ par : $f_1(x)=\dfrac{2}{1-x}$, qui est la restriction de f à I (ou à droite), tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 1. On dit que $-\infty$ est la ***limite à droite*** en 1 de la fonction f .

On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=-\infty$ ou encore $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$

On peut donc dire que la droite d'équation $x=1$ est asymptote à la courbe.

On définit de même la ***limite à gauche*** en 1 :

On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty$ ou encore $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$

De même, la droite d'équation $x=1$ est asymptote à la courbe.

Définition 2.1.3 *α désigne un réel fixé, $+\infty$ ou $-\infty$. On dit que α est la limite à gauche [respectivement à droite] de f au point a si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0/\ \ -\eta\leq x-a\leq 0\ \Rightarrow |f(x)-l|\leq\varepsilon$$

[respectivement : $\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0/\ \ 0\leq x-a\leq\eta\ \Rightarrow |f(x)-l|\leq\varepsilon$]
On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$ la limite à gauche
Et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ la limite à droite.

Théorème 2.1.4 *Si une fonction f admet au point a une limite à gauche l_g et une limite à droite l_d telles que $l_g=l_d=l$, alors $f$admet une limite (l) en a*

Contre-exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=2 & \text{pour} \quad x<1\\ f(x)=3 & \text{pour} \quad x\geq 1\end{cases}$

f n'a pas la limite de en 1 (Voir exemple 2.1.2).

On peut écrire cependant : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$

2.1.4 Limite réelle (finie) en $+\infty$ (ou $-\infty$).

Définition 2.1.5 *Dire que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que tout voisinage de l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x appartenant à un intervalle de la forme $[A\ ;+\infty[$. On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ ou $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$*
Autrement dit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists A>0/x\geq A\Rightarrow|f(x)-l|\leq\varepsilon$$

On définit de manière analogue :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists B<0/x\leq B\Rightarrow|f(x)-l|\leq\varepsilon$$

2.1.5 Limite infinie en $+\infty$ (ou $-\infty$)

Définition 2.1.6 *Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $[M\ ;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x appartenant à un intervalle de la forme $[A\ ;+\infty[$. On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ou $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$*
Autrement dit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\ \exists A>0/x\geq A\Rightarrow f(x)\geq M$$

On définit de manière analogue :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\ \exists B<0/x\leq B\Rightarrow f(x)\geq M$$

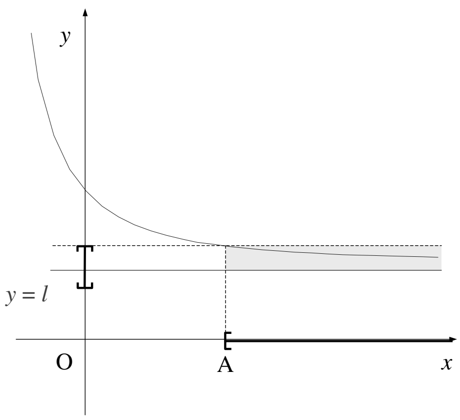


FIG. 2.3 – Limite finie en $+\infty$

2.1.6 Opérations sur les limites

α désigne un réel fini, $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème 2.1.7 *Soient f et g deux fonctions qui admettent respectivement l et l' (finies) lorsque x tend vers α, alors*

1. $\lim_{x\to\alpha} f(x) + g(x) = l + l'$
2. $\lim_{x\to\alpha} kf(x) = kl$, *que que soit k réel*
3. $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = ll'$
4. $\lim_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$ *si* $l' \neq 0$

Théorème 2.1.8 *Si* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$ *alors :*

1. $\lim_{x\to\alpha} f(x) + g(x) = +\infty$
2. $\lim_{x\to\alpha} kf(x) = +\infty$, *si* $k > 0$ *et* $\lim_{x\to\alpha} kf(x) = -\infty$, *si* $k < 0$
3. $\lim_{x\to+\alpha} f(x)g(x) = +\infty$

Théorème 2.1.9 *Si* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ *(l réel fini) et* $\lim_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$ *alors :*

1. $\lim_{x\to\alpha} f(x) + g(x) = +\infty$
2. $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = +\infty$, *si* $l > 0$ *et* $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = -\infty$, *si* $l < 0$
3. $\lim_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, *si* $l \neq 0$

Théorème 2.1.10 *l est un réel fini,*

1. *Si* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ *et* $\lim_{x\to\alpha} g(x) = 0^+$ *alors* $\lim_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ *(signe de l)*∞
2. *Si* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ *et* $\lim_{x\to\alpha} g(x) = 0^-$ *alors* $\lim_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ *(signe de $-l$)*∞

Remarque 2.1.1 *Il existe plusieurs cas, appelés formes indéterminées :*

1. *Si* $f(x) \to +\infty$ *et* $g(x) \to -\infty$, *on ne peut pas conclure immédiatement pour la limite de* $f(x) + g(x)$
2. *Si* $f(x) \to +\infty$ *(ou $-\infty$) et* $g(x) \to 0$, *on ne peut pas conclure immédiatement pour la la limite de* $f(x)g(x)$

3. *Si $f(x) \to +\infty$ (ou $-\infty$) et $g(x) \to +\infty$ (ou $-\infty$), on ne peut pas conclure immédiatement pour la limite de* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
4. *Si $f(x) \to 0$ et $g(x) \to 0$, on ne peut pas conclure immédiatement pour pour la limite de* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Exemple 2.1.4 *Soit $f(x) = \ln x$ et $g(x) = x$. Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x)$

On ne peut conclure directement, on est en présence d'une forme indéterminée $\infty - \infty$.
On écrit : $f(x) - g(x) = \ln x - x = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right)$
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x)$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - x = -\infty$

2.1.7 Théorèmes de comparaison

Théorème 2.1.11 *α désigne un réel fini, $+\infty$ ou $-\infty$,*
1. *Si pour x voisin de α, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$*
2. *Si pour x voisin de α, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$*
3. *Si pour x voisin de α, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = l$ alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$*

Exemple 2.1.5 *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2}$

On a $-\dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{\cos x}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2} = 0$

2.2 Continuité

2.2.1 Continuité en un point, sur un intervalle.

Définition 2.2.1 (fonction continue au point a) *f est une fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant a. On dit que f est continue en a si et seulement si : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*
Autrement dit :

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0/\forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Théorème 2.2.2 *Soient f et g deux fonctions continues en a, alors $f + g$, kf et fg sont continues en a. De plus, si $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.*

Définition 2.2.3 *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. On note :*

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Théorème 2.2.4 *Soient f une fonction continue en a et g une fonction continue en $y = f(a)$, alors la fonction $h = g \circ f$ est continue en a.*

Définition 2.2.5 (Continuité sur un intervalle)
- *On dit que f est continue sur l'intervalle $I =]a; b[$ si et seulement si f est continue en tout point de I.*
- *On dit que f est continue sur l'intervalle $J = [a; b]$ si et seulement si f est continue sur$I =]a; b[$, continue àdroite en a et continue à gauche en b.*

Remarque : Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I correspond au fait que l'on peut tracer la représentation graphique de f sur I **d'un trait de crayon continu**.)

Contre exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2 & \text{pour } x < 1 \\ f(x) = 3 & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$
f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, car $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 2$, f n'a donc pas de limite en 1, et donc f n'est pas continue au point 1.

2.2.2 Prolongement par continuité

Définition 2.2.6 (Prolongement continu) *Si f est une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a, sauf en a, et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ la fonction g définie par :* $\begin{cases} g(x) = f(x) & \textit{pour } x \neq a \\ g(a) = l \end{cases}$ *s'appelle prolongement continu de f.*

Exemple 2.2.1 *Soit g définie par :* $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sin x}{x} & \textit{pour } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

g est le prolongement continu de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

2.2.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2.2.7 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux points de I tels que $a < b$ et $f(a) \leq f(b)$.*
Alors

$$\forall y \in [f(a); f(b)], \exists c \in [a; b] / y = f(c)$$

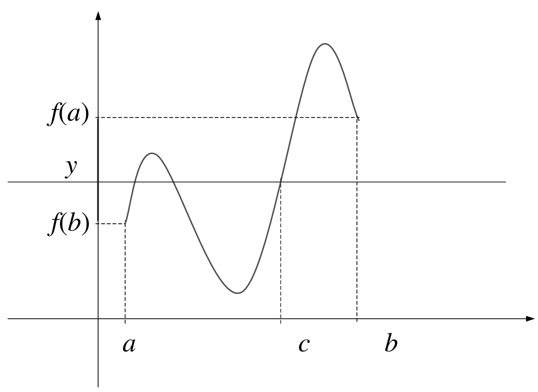


Fig. 2.4 – Théorème des valeurs intermédiaires

2.2.4 Fonction continue strictement monotone

Théorème 2.2.8 *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*
En particulier si f est continue et croissante [respectivement décroissante] sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$ [respectivement $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$]

Théorème 2.2.9 *Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$ alors f établit une bijection de $[a; b]$ sur $[f(a); f(b)]$ (ou $[f(b); f(a)]$).*

Théorème 2.2.10 *Toute fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ est bornée et atteint ses bornes*

2.3 Dérivation

2.3.1 Définitions

Définition 2.3.1 *une fonction f définie sur un intervalle I contenant le réel a est dérivable au point a s'il existe un réel A tel que :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A$$

ou encore

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A$$

Le nombre A est appelé nombre dérivé de la fonction f au point a.

Définition 2.3.2 *Si f est une fonction dérivable en tout point d'un intervalle I ouvert, on dit que f est dérivable sur I. f étant une fonction dérivable sur I, la fonction, notée f', qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f au point x, s'appelle fonction dérivée de f .*

Remarque 2.3.1 *Si f est une fonction de la variable réelle x, f' se note aussi $\dfrac{df}{dx}$*

Pour tout $a \in I$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

on peut donc écrire :

$$f(a+h)-f(a)=h(f'(a)+\varphi(h))\text{avec } \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$$

ou encore :

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h\varphi(h)\text{ avec } \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$$

Cette écriture est appelée développement limité d'ordre 1 de f en a.

Exemple 2.3.1 *soit $f : x\mapsto \sqrt{x}$*

On a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{1}{2}$$

Donc

$$\sqrt{1+h}=1+\frac{1}{2}h+h\varphi(h)\text{ avec } \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$$

On en déduit que, pour h voisin de 0

$$\sqrt{1+h}\approx 1+\frac{1}{2}h$$

Théorème 2.3.3 *Si f est dérivable en a alors f est continue en a*

ATTENTION : la réciproque de ce théorème est fausse !

2.3.2 Interprétation géométrique

Soient $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$ deux points de la courbe C_f représentative de f . Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Lorsque h tend vers 0, le point M " tend " vers le point A et la droite (AM) devient donc tangente à la courbe, et son coefficient directeur devient :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

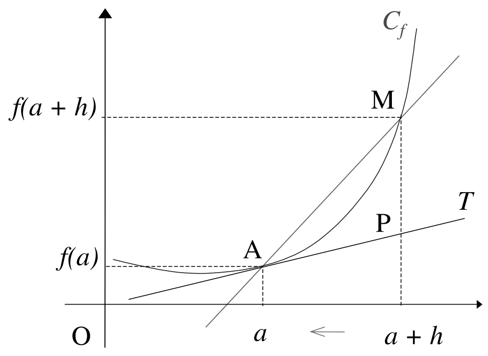


FIG. 2.5 – Interprétation géométrique

On obtient donc une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a : cette droite passe par le point $A(a, f(a))$et admet comme coefficient directeur $f'(a)$.

On obtient :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

2.3.3 Nombre dérivé à gauche, à droite

La fonction $f : x \mapsto |x(x-1)|$ est dérivable sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. Mais au point $x = 1$, il n'est pas possible de conclure.

On calcule

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)h}{h} = \lim_{h \to 0^+} (1+h) = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(1+h)h}{h} = \lim_{h \to 0^+} (-(1+h)) = -1$$

La fonction f n'est pas dérivable au point 1, car les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement en ce point sont différentes, il n'existe donc pas de nombre dérivé au point 1. La courbe admet au point 1 deux demi-tangentes de coefficients directeurs 1 et -1.

Définition 2.3.4 *Une fonction f définie sur un intervalle I contenant le réel a est dérivable à droite [respectivement à gauche] en a si et seulement si* $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *[respectivement* $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$*] existe et est finie.*
Cette limite est alors notée $f'_d(a)$ [respectivement $f'_g(a)$]

$f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ sont les coefficients directeurs des demi-tangentes au point a.

Théorème 2.3.5 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.*
De plus, sous ces hypothèses, on a : $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$.

Définition 2.3.6 *Si f est une fonction dérivable en tout point d'un intervalle $I =]a; b[$, dérivable à gauche en b et à droite en a, on dit que f est dérivable sur $J = [a; b]$.*

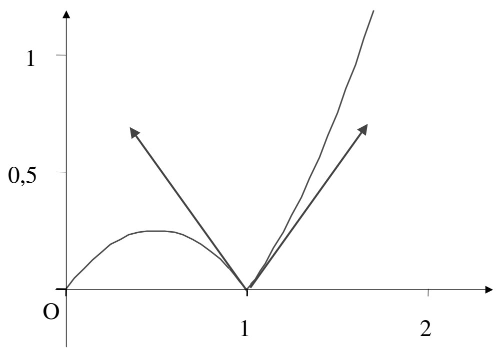


FIG. 2.6 – Nombre dérivé à gauche, à droite

2.3.4 TABLEAUX DES FONCTIONS DÉRIVÉES

• *Opérations*
u et v sont deux fonctions dérivables sur D, k est une constante réelle.

fonction	dérivée	commentaire
$u+v$	$u'+v'$	dérivable sur D
ku	ku'	dérivable sur D
uv	$vu'+uv'$	dérivable sur D
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$	dérivable sur D, si v ne s'annule pas sur D
$\frac{u}{v}$	$\frac{vu'-uv'}{v^2}$	dérivable sur D, si v ne s'annule pas sur D

• *Fonctions usuelles*

fonction définie par $f(x)$	fonction dérivée : $f'(x)$	domaine de dérivabilité
k (k constante réelle)	0	$\mathbb{R}$
$x^p \quad (p \in \mathbb{Z})$	px^{p-1}	$\mathbb{R}$ si $p>0$ $\mathbb{R}^*$si $p<0$
$x^{\frac{1}{q}} \quad (q \in \mathbb{Q}_+^*)$	$\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$	$\mathbb{R}_+$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathrm{Sh}x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\mathrm{Ch}x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{Ch}x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\mathrm{Sh}x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{Th}x = \frac{\mathrm{Sh}x}{\mathrm{Ch}x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$	$\frac{1}{\mathrm{Ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$

2.3.5 Dérivées sucessives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

f' est la dérivée première de f , on la note aussi $f^{(1)}$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

si f' est dérivable sur I, sa dérivée f'' est appelée fonction dérivée seconde de f , on la note aussi $f^{(2)}$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$

Par itération, la fonction dérivée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), notée $f^{(n)}$, est la dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n-1$. On la note aussi $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$. On dit alors que f est n fois dérivable.

2.3.6 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 2.3.7 *Soit u une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 et g une fonction définie sur un intervalle J contenant $u(x_0)$. Si u est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y_0 = u(x_0)$ alors la fonction : $f = g \circ u$ est dérivable en x_0 et : $f'(x_0) = g'(u(x_0)) \times u'(x_0)$.*
Si u est dérivable sur I, si g est dérivable sur J et si pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J, alors f est dérivable sur I, et pour tout x de I, $f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)$
On note

$$(g \circ u)' = (g' \circ u)\, u'$$

Démonstration : en supposant que si $x \neq x_0$ on a $u(x) \neq u(x_0)$, on peut alors écrire :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g[u(x)] - g[u(x_0)]}{x - x_0} = \frac{g[u(x)] - g[u(x_0)]}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$$

u étant dérivable en x_0, on obtient :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0)$$

de plus, u étant dérivable en x_0, u est continue en x_0, donc :

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = u(x_0)$$

et donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g[u(x)] - g[u(x_0)]}{u(x) - u(x_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0)$$

Finalement

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0) \times u'(x_0)$$

Proposition 2.3.1 *En particulier, u est une fonction dérivable sur I, les fonctions suivantes sont dérivables sur I :*

a . Pour $p \in \mathbb{Z}$, si $f(x) = [u(x)]^p$, alors $f'(x) = p[u(x)]^{p-1} \times u'(x)$. (avec $u(x) \neq 0$ sur I, lorsque $p < 0$)

b . Pour $q \in \mathbb{Q}_+^*$, si $f(x) = [u(x)]^{\frac{1}{q}}$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{q}[u(x)]^{\frac{1}{q}-1} \times u'(x)$. (avec $u(x) > 0$ sur I)

c . si $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ alors $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

d . si $f(x) = \ln u(x)$ alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) > 0$ sur I.

Exemple 2.3.2

- *$f(x) = cos^3 x$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :*

$$f'(x) = 3cos^2 x \times (-sinx) = -3sinxcos^2 x$$

- *$f(x) = cos(x^2 + 1)$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :*

$$f'(x) = -sin(x^2 + 1) \times 2x = -2xsin(x^2 + 1)$$

- $f(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$, *f est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a :*

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

- $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$, *f est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a :*

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2+1}$$

2.3.7 Variations des fonctions

Théorème 2.3.8 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I inclus dans D_f.*

- *Si $f' > 0$ sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I ;*
- *Si $f' < 0$ sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I ;*
- *Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.*

L'étude des variations d'une fonction dérivable est donc la recherche des intervalles sur lesquels la dérivée garde un signe constant (on dit que sur ces intervalles, la fonction est monotone).

2.3.8 Extremum d'une fonction

Définition 2.3.9 *Une fonction f admet, au point x_0, un maximum local [respectivement minimum local] $f(x_0)$ sur l'intervalle I ouvert inclus dans son ensemble de définition et contenant x_0, lorsque, pour tout x réel de I, $f(x) \leq f(x_0)$ [respectivement $f(x) \geq f(x_0)$]*

On appelle extremum local un minimum ou maximum local.

Théorème 2.3.10 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point de I. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$ Si la dérivée f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f sur I.*

Remarque 2.3.2 *ATTENTION : la fonction $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, mais admet un minimum local (0) en 0.*
Et la fonction $g : x \mapsto x^3$ n'admet pas d'extremum au point 0, pourtant $g'(0) = 0$

2.3.9 Dérivée de la réciproque d'une fonction bijective

Théorème 2.3.11 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I. Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$ [ou bien $f'(x) < 0$], alors f est une bijection de I sur $f(I)$ et l'application réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et :*

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Application : dérivées des réciproques des fonctions trigonométriques

- La fonction arcsin est une bijection dérivable de $]-1;1[$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- La fonction arccos est une bijection dérivable de $]-1;1[$ sur $]0;\pi[$ et

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- La fonction arctan est une bijection dérivable de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Application : dérivées des réciproques des fonctions hyperboliques

- ***Fonction argument sinus hyperbolique*** : la fonction Sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque notée argSh, définie de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} y = \text{argSh}x \\ x \in]-\infty;+\infty[\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \text{Sh}y \\ y \in]-\infty;+\infty[\end{array}\right.$$

Après calcul, on obtient une expression logarithmique de cette fonction, sous la forme :

$$\text{argSh}x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on obtient :

$$\text{argSh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

- ***Fonction argument cosinus hyperbolique*** : de même la fonction Ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1\,;+\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque notée argCh, définie de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} y = \text{argCh}x \\ x \in]1\,;+\infty[\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \text{Ch}y \\ y \in]0\,;+\infty[\end{array}\right.$$

Après calcul, on obtient une expression logarithmique de cette fonction, sous la forme :

$$\text{argCh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad \text{avec} \quad x \geq 1$$

Cette fonction est dérivable sur son domaine de définition $[1\,;\,+\infty[$ et on obtient :

$$\text{argCh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

- ***Fonction argument tangente hyperbolique*** : de même la fonction Th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;\,1[$. Elle admet donc une fonction réciproque notée argTh, définie de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} y = \text{argTh}x \\ x \in]-1\,;\,1[\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \text{Th}y \\ y \in]-\infty\,;+\infty[\end{array}\right.$$

Après calcul, on obtient une expression logarithmique de cette fonction, sous la forme :

$$\text{argTh}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad \text{avec} -1 < x < 1$$

Cette fonction est dérivable sur son domaine de définition $]-1\,;\,1[$ et on obtient :

$$\text{argTh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

2.3.10 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

Théorème 2.3.12 (de Rolle) *Soit f une fonction continue sur $\overline{I} = [a;b]$, dérivable sur $I =]a;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.*
Alors il existe $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$

Théorème 2.3.13 (des accroissements finis) *Soit f une fonction continue sur $\overline{I} = [a;b]$, et dérivable sur $I =]a;b[$.*
Alors il existe $c \in I$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

Théorème 2.3.14 (Inégalité des accroissements finis) *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux points de I tels que $a < b$. S'il existe deux réels m et M tels que, pour tout x de I, on ait : $m < f'(x) < M$, alors on a :*

$$m(b-a) < f(b) - f(a) < M(b-a)$$

Pour démontrer ce théoréme, il suffit d'étudier les variations de deux fonctions auxiliaires définies sur I : $g(x) = f(x) - Mx$ et $h(x) = f(x) - mx$. En calculant les dérivées de g et h, on prouve aisément que g est décroissante et que h est croissante.

On en déduit que,

$$\text{si } a < b, \text{ alors : } g(a) > g(b)$$

c'est à dire :

$$f(a) - Ma > f(b) - Mb$$

ou encore :

$$f(b) - f(a) < M(b - a) \tag{E1}$$

De même,

$$\text{si } a < b, \text{ alors : } h(a) < h(b)$$

c'est à dire :

$$f(a) - ma < f(b) - mb$$

ou encore :

$$f(b) - f(a) > m(b - a) \tag{E2}$$

En utilisant (2.1) et (2.2), on obtient le théoréme précédent

Exemple 2.3.3 *Soit la fonction f définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \tan x$.*

On a $f'(x) = 1 + \tan^2 x$

Pour $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$, on a $0 < \tan x < 1$, car la fonction tangente est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$

Donc, pour $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$, on a $0 < \tan^2 x < 1$

et donc $1 < 1 + \tan^2 x < 2$

On en déduit que, pour $b \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $1(b - 0) < \tan b - \tan 0 < 2(b - 0)$

Et donc : , pour $b \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $b < \tan b < 2b$

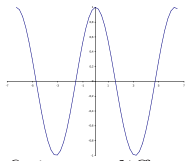
Chapitre 3

Fonctions usuelles

3.1 Fonctions trigonométriques et réciproques

3.1.1 Fonctions circulaires

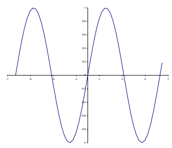
- *Fonction cosinus* $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [-1,\ 1] \\ x \mapsto \cos x \end{array} \right.$



Il s'agit d'une fonction paire, périodique de période 2Π. Cosinus est infiniment différentiable.

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

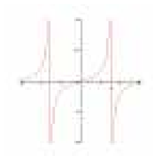
- *Fonction sinus* $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [-1,\ 1] \\ x \mapsto \sin x \end{array} \right.$



Il s'agit d'une fonction impaire, périodique de période 2Π. Sinus est infiniment différentiable.

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

- *Fonction tangente* $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array} \right.$



Il s'agit d'une fonction impaire, périodique de période π.
Tangente est infiniment différentiable.

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = 1 + \tan^2 x$$

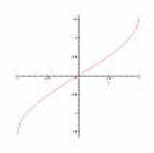
3.1.2 Fonctions circulaires réciproques

- *Fonction Arcosinus* $\left\{ \begin{array}{l} [-1,1] \to [0,\pi] \\ x \mapsto \arccos x \end{array} \right.$

Par définition $y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \quad et \quad y \in [0, \Pi]$

$$\frac{d(\arccos x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

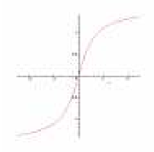
- *Fonction Arcsinus* $\left\{\begin{array}{l}[-1,1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2] \\ x \mapsto \arcsin x\end{array}\right.$



Par définition $y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \quad et \quad y \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- *Fonction Arctan* $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2] \\ x \mapsto \arctan x\end{array}\right.$



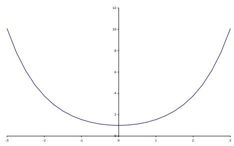
Par définition $y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x \quad et \quad y \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\frac{d(\arctan x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

3.2 Fonctions hyperboliques et réciproques

3.2.1 Fonctions hyperboliques

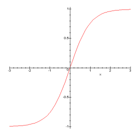
- *Fonction cosinus hyperbolique* $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\end{array}\right.$



Il s'agit d'une fonction strictement positive, paire, infiniment différentiable.

$$\frac{d(chx)}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$$

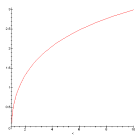
- *Fonction sinus hyperbolique* $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\end{array}\right.$



Il s'agit d'une fonction croissante, impaire, infiniment différentiable.

$$\frac{d(shx)}{dx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$$

- *Fonction tangente hyperbolique* $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} \rightarrow]-1,\, 1] \\ x \mapsto thx = \dfrac{shx}{chx}\end{array}\right.$

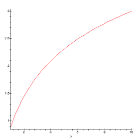


Il s'agit d'une fonction impaire, strictement croissante, infiniment différentiable

$$\frac{d(thx)}{dx} = 1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$$

3.2.2 Fonctions hyperboliques réciproques

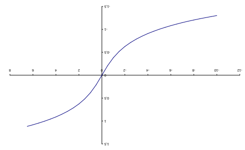
- *Fonction Argcosinus hyperbolique* $\left\{\begin{array}{l}[1, \infty[\rightarrow [0, \infty[\\ x \mapsto Argchx = Log(x + \sqrt{x^2-1})\end{array}\right.$



Par définition $y = Argch(x) \Leftrightarrow ch(y) = x \, et \, y \geq 0$

$$\frac{d(Argchx)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

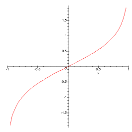
Fonction Argsinus hyperbolique $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Argsh(x) = Log(x + \sqrt{x^2+1}) \end{cases}$



Par définition $y = Argsh(x) \Leftrightarrow sh(y) = x$

$$\frac{d(Argshx)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

- *Fonction Argtangente hyperbolique* $\begin{cases}]-1,1] \to R \\ x \mapsto Argth(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} \end{cases}$



Par définition $y = Argth(x) \Leftrightarrow th(y) = x$

$$\frac{d(Argthx)}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$$

Chapitre 4

Développements Limités

4.1 Définition du développement limité

Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage du réel a.
S'il existe $(n+1)$ constantes a_0, a_1, $\ldots$, a_n telles que, pour tout élément $x \neq a$ de E, on puisse écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

où ε est une fonction de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, on dit que l'égalité ci-dessus est un **développement limité d'ordre n de la fonction f autour de a (ou en a), souvent abrégé en $DL_n(a)$.**

D'une manière générale, la fonction ε dépend aussi du nombre réel a.

La fonction polynomiale $a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n$ est appelée **partie principale (ou régulière) du développement limité**, tandis que le terme $(x-a)^n\varepsilon(x)$ est appelé **reste d'ordre n du développement limité**.

4.2 Unicité du développement limité

Soit $f : E \to F$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n autour d'un point a. Ce développement est unique.

Démonstration
Soient

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x)$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_2(x)$$

deux $DL_n(a)$.

Nous allons d'abord démontrer que $a_0 = b_0, \ldots a_n = b_n$.

Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il n'en soit pas ainsi.

Soit k le plus petit entier naturel tel que $a_k \neq b_k$. Alors, pour tout élément $x \neq a$ de E, on peut écrire que

$$(a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1})(x-a) + \ldots + (a_n - b_n)(x-a)^{n-k} + (x-a)^{n-k}(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = 0$$

Par suite, en calculant la limite de cette expression lorsque x tend vers a, on obtient que

$$a_k = b_k$$

ce qui est absurde. On a ainsi démontré que $a_0 = b_0, \ldots a_n = b_n$. Il découle immédiatement de ce résultat que pour tout élément $x \neq a$ de E : $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$. D'où l'unicité du développement limité.

Remarque
Supposons que $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$ soit le développement limité d'ordre n de la fonction f autour de a. Alors, pour tout entier naturel $p<n$, la fonction f admet un développement limité d'ordre p autour de a dont la partie principale est $a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_p(x-a)^p$.

4.3 Développement limité d'une fonction paire ou impaire

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ayant zéro pour centre de symétrie et $f : E \to F$ une fonction admettant $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$ comme $DL_n(0)$.
Si f est fonction paire [*f(x)=f(-x)*], les coefficients a_1, a_3, ... dont l'indice est impair sont tous nuls.
Si f est fonction impaire [*f(x)=-f(-x)*], les coefficients a_0, a_2, ... dont l'indice est pair sont tous nuls.

Démonstration
Pour la démonstration, supposons que $f$soit une fonction paire, l'autre cas se traitant de façon analogue. Pour tout élément $x \neq a$ de E, on peut écrire

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + ... + (-1)^n a_n x^n + x^n((-1)^n\varepsilon(-x))$$

En constatant que $\lim\limits_{x\to 0}(-1)^n\varepsilon(-x) = 0$, on obtient, grâce à l'unicité du développement limité, que les coefficients a_1, a_3, ... dont l'indice est impair sont tous nuls.

4.4 Opérations algébriques sur les développements limités

Soient $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant respectivement

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x)$$

et

$$g(x) = b_0 + b_1(x-a) + ... + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_2(x)$$

comme développement limité d'ordre n autour de a. Alors,

- pour tout couple de nombres réels α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ admet un $DL_n(a)$ dont la partie principale est
$$(\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1)(x-a) + ... + (\alpha a_n + \beta b_n)(x-a)^n$$
.
- la fonction fg admet un $DL_n(a)$ dont la partie principale s'obtient en effectuant le produit
$$[a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n]\,[b_0 + b_1(x-a) + ... + b_n(x-a)^n]$$
et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.
- si $b_0 \neq 0$, la fonction f/g admet un $DL_n(a)$ dont la partie principale s'obtient en effectuant la division, suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n de $[a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n]$ par $[b_0 + b_1(x-a) + ... + b_n(x-a)^n]$.

Exemple 4.4.1 *Calculer la partie principale du développement limité d'ordre 4 autour de* 0 *de la fonction*

$$f(x) = \frac{1+x^3}{1+x^2}$$

Nous pouvons utiliser la méthode dite des " coefficients indéterminés ".
Désignons par $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + x^4\varepsilon(x)$ *le* $DL_4(0)$. *On peut écrire, pour tout* x *non nul :*

$$1 + x^3 = f(x).(1+x^2)$$

donc par unicité du développement limité

$$1 + x^3 = a_0 + a_1x + (a_0 + a_2)x^2 + (a_1 + a_3)x^3 + (a_2 + a_4)x^4$$

ce qui implique que

$$a_0 = 1 = a_1 + a_3; \;\; a_1 = 0 = a_0 + a_2 = a_2 + a_4$$

soit en résolvant ce système

$$a_0 = 1;\; a_1 = 0;\; a_2 = -1;\; a_3 \; = 1;\; a_4 = 1$$

Nous aurions pu également effectuer la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 4 de $(1+x^3)$ *par* $(1+x^2)$, *ce qui donne :*

$$
\begin{array}{l|l}
1 + \quad\quad x^3 & 1 + x^2 \\
1 + x^2 & \\
\hline
\quad -x^2 + x^3 & 1 - x^2 + x^3 + x^4 \\
\quad -x^2 \quad -x^4 & \\
\hline
\quad\quad x^3 + x^4 & \\
\quad\quad x^3 \quad + x^5 & \\
\hline
\quad\quad\quad x^4 - x^5 & \\
\quad\quad\quad x^4 \quad + x^6 & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad -x^5 - x^6 &
\end{array}
$$

4.5 Développement limité d'une fonction composée

Soit $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x)$ le $DL_n(a)$ de la fonction $f : E \to F$. Soit G un sous ensemble de $\mathbb{R}$ contenant zéro et $g(y) = g(0) + b_1 y + ... + b_n y^n + y^n \varepsilon_2(y)$ le $DL_n(0)$ de la fonction $g : G \to H$.

Alors, si *f(E)* $\subset G$, la fonction composée $g \circ f : E \to H$ admet un développement limité d'ordre n autour de a, dont la partie principale est :

$$
\begin{array}{l}
g(0) + a_1 b_1 (x-a) + (a_2 b_1 + a_1^2 b_2)(x-a)^2 + (a_3 b_1 + 2a_1 a_2 b_2 + a_1^3 b_3)(x-a)^3 \\
+ ... + (a_n b_1 + ... + a_1^n b_n)(x-a)^n
\end{array}
$$

Cette expression s'obtient en substituant, dans la partie principale du développement limité de g, y par la partie principale du développement limité de f et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Démonstration

Pour tout élément $x \neq a$ de E, on peut écrire

$$g(f(x)) = g(0) + b_1 f(x) + ... + b_n (f(x))^n + (f(x))^n \varepsilon_2(f(x))$$

soit

$$
\begin{aligned}
g(f(x)) = {} & g(0) + b_1(a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x)) + ... \\
& + b_n(a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x))^n \\
& + (a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x))^n \varepsilon_2(a_0 + a_1(x-a) + ... \\
& + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x))
\end{aligned}
$$

ce qui donne en développant

$$g(f(x)) = g(0) + a_1 b_1(x-a) + (a_2 b_1 + a_1^2 b_2)(x-a)^2 + ... + (a_n b_1 + ... + a_1^n b_n)(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_3(x)$$

On vérifie ensuite facilement que $\lim_{x \to a} \varepsilon_3(x) = 0$. D'où le résultat.

Exemple 4.5.1 *Calculer le développement limité d'ordre 4 de la fonction $f(x) = \ln(\cos x)$ autour de 0.*

$$f(x) = \ln(\cos x - 1 + 1) = \ln(u+1) \;\; \textit{avec} \;\; u = \cos x - 1 \;\; \textit{et} \;\; \lim_{x \to 0} u = 0$$

$u = \cos x - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_1(x)$

et

$\ln(u+1) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} - \dfrac{u^4}{4} + u^4 \varepsilon_2(u)$

en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 4 de :

$$\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right]^2 + \frac{1}{3}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right]^3 - \frac{1}{4}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right]^4$$

on obtient :

$$f(x) = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right] - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon_3(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon_3(x)$$

4.6 Formule de Taylor

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a et $f : I \to F$ une fonction $(n+1)$ fois différentiable sur I. On peut alors associer à tout élément x de I un nombre réel $0 < \theta_x$ <1, dépendant à la fois de a et de x, tel que la relation suivante soit vérifiée :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + ... + f^{(p)}(a)\frac{(x-a)^p}{p!} \\ &+ ... + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(a + \theta_x(x-a))\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Cette relation est appelée **formule de Taylor**. Il est d'usage d'appeler **formule de MacLaurin** la formule obtenue en remplaçant a par zéro dans celle de Taylor.

4.7 Développement limité d'une fonction $(n+1)$ fois différentiable

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a et $f : I \to F$ une fonction (n+1) fois différentiable sur$I$. On suppose également qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ et une constante $M > 0$ tels que les relations $x \in I$ *et* $|x - a| \leq \alpha$ impliquent $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$.
Alors la formule de Taylor fournit le développement limité d'ordre n de la fonction f autour de a.

Démonstration
La formule de Taylor est applicable à f.

$$\begin{aligned} &\forall x \in I \quad \exists\ \theta_x,\ 0 < \theta_x < 1 \ \textit{tel que} \\ &f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + f^{(p)}(a)\frac{(x-a)^p}{p!} \\ &\quad + ... + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(a + \theta_x(x-a))\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in I$,vérifiant $|x - a| \leq \alpha$, $\left|f^{(n+1)}(a + \theta_x(x-a))\right| \leq M$

En posant$\varepsilon(x) = f^{(n+1)}(a + \theta_x(x-a))\dfrac{(x-a)}{(n+1)!}$, on obtient $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Ainsi $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + f^{(n)}(a)\dfrac{(x-a)^n}{n!} + (x-a)^n\varepsilon(x)$
est le développement limité d'ordre n de la fonction f autour de a.

Remarques

- Si f est continue en 0, pour tout x de I, f admet un $DL_0(0)$ dont la partie principale est $f(0)$.
- Si f est dérivable en 0, pour tout x de I, f admet un $DL_1(0)$ dont la partie principale est

$$f(0) + xf'(0)$$

- Une fonction peut admettre un $DL_n(0)$ sans être n fois dérivable en 0. Ainsi la fonction f définie par
  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x^2}) & \textit{si} \ \ x \neq 0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$
  admet un $DL_2(0)$, bien qu'elle ne soit pas deux fois dérivable en 0 !

4.8 Table de développements limités autour de 0

L'ensemble des éléments ci-dessus nous permet de dresser une table des développements limités de fonctions " usuelles " autour de 0 (cf forumulaire). Pour chercher un développement limité d'une fonction f autour d'un point a, on pourra translater la fonction en posant $X = x - a$ pour se ramener au voisinage de 0 et utiliser la table 4.1.

TAB. 4.1 – développements limités

Fonctions	***DL$_n$(0)***
e^x	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$
sin x	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}\varepsilon(x)$
cos x	$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$
tg x	$tgx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + x^8\varepsilon(x)$
sh x	$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}\varepsilon(x)$
ch x	$cosx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$
th x	$thx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + x^8\varepsilon(x)$
$\frac{1}{1+x}$	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^n\varepsilon(x)$
$\frac{1}{(1+x)^2}$	$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + ... + (-1)^n(n+1)x^n + x^n\varepsilon(x)$
$\sqrt{1+x}$	$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2.4}x^2 + ... + (-1)^{n+1}\frac{1.3.5...(2n-3)}{2.4.6...(2n)}x^n + x^n\varepsilon(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4}x^2 + ... + (-1)^n\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}x^n + x^n\varepsilon(x)$
$(1+x)^\alpha, \alpha \in$ Q	$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$
ln(1+ x)	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$
Arcsin x	$Arc\sin x = x + \frac{1}{2.3}x^3 + ... + \frac{1.3.5...(2p-1)}{2.4.6...(2p)(2p+1)}x^{2p+1} + x^{2p+2}\varepsilon(x)$
Argsh x	$Argshx = x - \frac{1}{2.3}x^3 + ... + (-1)^p\frac{1.3.5...(2p-1)}{2.4.6...(2p)(2p+1)}x^{2p+1} + x^{2p+2}\varepsilon(x)$
Arctg x	$Arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)} + x^{2p+2}\varepsilon(x)$
Argth x	$Argthx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)} + x^{2p+2}\varepsilon(x)$
$\ln(\frac{1+x}{1-x})$	$\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{x^{2p+1}}{2p+1}) + x^{2p+2}\varepsilon(x)$

4.9 Dérivation et intégration de développements limités

4.9.1 Dérivation

Si une fonction $f$admet un $DL_n(a)$ sur Iet si f' admet un $DL_{n-1}(a)$sur$I$, alors la partie principale du développement de f' s'obtient en dérivant terme à terme la partie principale du développement de f .

4.9.2 Intégration

Si une fonction f admet un $DL_n(a)$ sur I alors $F : x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t)dt$ admet un $DL_{n+1}(a)$. La partie principale du développement de celui-ci s'obtient en intégrant terme à terme la partie principale du développement de f .

Exemple 4.9.1 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}\varepsilon(x),$
alors $\cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$

Exemple 4.9.2 $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x),$
alors

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} = [\ln|1+t|]_0^x = \ln(1+x)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)$$

4.10 Applications des développements limités

D'une manière générale, les développements limités permettent d'avoir une approximation " locale " d'une fonction autour d'un point. Quelques cas classiques d'utilisation des développements et de leur extension sont présentés ci-après.

4.10.1 Calcul de limites et résolution de " formes indéterminées

Au voisinage de a, le premier terme non nul du développement limité de f fournit un équivalent de $f(x)$, ce qui peut permettre de trouver la limite de $f(x)$ lorsque $x$tend vers a, ou de résoudre certaines " indéterminations ".

Exemple 4.10.1 *Déterminer la limite, lorsque x tend vers 0 de la fonction*

$$f :]-\pi/2, 0] \cup]0, \pi/2] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^2(1-\cos x)}$$

On calcule les $DL_4(0)$ du numérateur et du dénominateur :

$$\sin^2 x - x^2 \cos x = \frac{1}{6}x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$$

$$x^2(1-\cos x) = \frac{1}{2}x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

Il suit $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$.

Exemple 4.10.2 *Déterminer la limite, lorsque x tend vers 0 de la fonction*$f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

$$f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x+x\varepsilon_1(x))} = e^{\frac{1}{x}(x+x\varepsilon_2(x))}$$

donc$\lim_{x\to 0} f(x) = e$

4.10.2 Développement limité en a à gauche et à droite

On peut considérer une fonction f définie sur un intervalle ouvert dont une extrémité est a (au lieu d'un intervalle ouvert contenant a). On peut ainsi former un $DL_n(a)$ à droite et un $DL_n(a)$ à gauche. Si f admet un $DL_n(a)$, f admet un $DL_n(a)$ à droite et un $DL_n(a)$ à gauche et ces développements sont égaux. Par contre, une fonction peut admettre un $DL_n(a)$ à droite et un $DL_n(a)$ à gauche sans pour autant admettre de $DL_n(a)$.

4.10.3 Développement limité au voisinage de l'infini

Une fonction f définie sur un intervalle $I =]a, +\infty[$ admet un $DL_n(+\infty)$ au voisinage de $+\infty$, si la fonction $h : u \mapsto h(u) = f(\frac{1}{u})$ admet un $DL_n(0)$ à droite.

$h(u) = a_0 + a_1 u + ... + a_n u^n + u^n \varepsilon(u)$; ce qui donne $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x})$.

On définit de même le développement limité d'ordre n au voisinage de $-\infty$.

Exemple 4.10.3 *Déterminer le développement limité d'ordre 2 en $+\infty$ de* $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

On pose $u = \frac{1}{x}$, *soit* $x = \frac{1}{u}$ *et on obtient* $g(u) = \sqrt{\frac{1}{1-u}} = (1-u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + u^2\varepsilon(u)$

Finalement $f(x) = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x})$.