2. Notions de trigonométrie hyperbolique

Soit $\begin{cases} e^a = \text{Ch}\,a + \text{Sh}\,a \\ e^b = \text{Ch}\,b + \text{Sh}\,b \end{cases}$ $\begin{cases} e^{-a} = \text{Ch}\,a - \text{Sh}\,a \\ e^{-b} = \text{Ch}\,b - \text{Sh}\,b \end{cases}$

En multipliant $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ et $e^{-a} \cdot e^{-b} = e^{-(a+b)}$ en additionnant ou en soustrayant, on obtient les formules d'addition :

$$\mathbf{Ch}(a+b) = \mathbf{Ch}\,a\,\mathbf{Ch}\,b + \mathbf{Sh}\,a\,\mathbf{Sh}\,b \qquad \mathbf{Sh}(a+b) = \mathbf{Sh}\,a\,\mathbf{Ch}\,b + \mathbf{Sh}\,b\,\mathbf{Ch}\,a$$

d'où

$$\mathbf{Th}(a+b) = \frac{\mathbf{Th}\,a + \mathbf{Th}\,b}{1 + \mathbf{Th}\,a\,\mathbf{Th}\,b} \tag{1}$$

de même en remplaçant b par $-b$ et en tenant compte du fait que :

$\text{Sh}(-b) = -\text{Sh}\,b$; $\text{Ch}(-b) = \text{Ch}\,b$; $\text{Th}(-b) = -\text{Th}\,b$, on a :

$$\mathbf{Ch}(a-b) = \mathbf{Ch}\,a\,\mathbf{Ch}\,b - \mathbf{Sh}\,a\,\mathbf{Sh}\,b \quad ; \quad \mathbf{Sh}(a-b) = \mathbf{Sh}\,a\,\mathbf{Ch}\,b - \mathbf{Sh}\,b\,\mathbf{Ch}\,a$$

$$\mathbf{Th}(a-b) = \frac{\mathbf{Th}\,a - \mathbf{Th}\,b}{1 - \mathbf{Th}\,a\,\mathbf{Th}\,b} \tag{2}$$

En posant $a = b$ dans (1), on obtient les formules de duplication :

$$\mathbf{Ch}\,2a = \mathbf{Ch}^2\,a + \mathbf{Sh}^2\,a ; \mathbf{Sh}\,2a = 2\,\mathbf{Sh}\,a\,\mathbf{Ch}\,a ; \mathbf{Th}\,2a = \frac{2\,\mathbf{Th}\,a}{1 + \mathbf{Th}^2\,a} \tag{3}$$

De même en additionnant $\text{Sh}(a+b)$ et $\text{Sh}(a-b)$, puis $\text{Ch}(a+b)$ et $\text{Ch}(a-b)$ et en posant $a + b = p$ et $a - b = q$ d'où $a = \frac{p+q}{2}$; $b = \frac{p-q}{2}$, on obtient les formules de transformation d'une somme en produit :

$\text{Sh}(a+b) + \text{Sh}(a-b) = \text{Sh}\,a\,\text{Ch}\,b + \text{Sh}\,b\,\text{Ch}\,a + \text{Sh}\,a\,\text{Ch}\,b - \text{Sh}\,b\,\text{Ch}\,a = 2\,\text{Sh}\,a\,\text{Ch}\,b.$

$$\mathbf{Sh}\,p + \mathbf{Sh}\,q = 2\,\mathbf{Sh}\frac{p+q}{2}\,\mathbf{Ch}\frac{p-q}{2} \quad ; \quad \mathbf{Sh}\,p - \mathbf{Sh}\,q = 2\,\mathbf{Sh}\frac{p-q}{2}\,\mathbf{Ch}\frac{p+q}{2}$$

de même (4)

$$\mathbf{Ch}\,p + \mathbf{Ch}\,q = 2\,\mathbf{Ch}\frac{p+q}{2}\,\mathbf{Ch}\frac{p-q}{2} \quad ; \mathbf{Ch}\,p - \mathbf{Ch}\,q = 2\,\mathbf{Ch}\frac{p-q}{2}\,\mathbf{Ch}\frac{p+q}{2}$$

Généralement, pour tout a réel et pour tout m appartenant à $\mathbb{N}$

$$e^{ma} = (e^a)^m = (\mathbf{Ch}\,a + \mathbf{Sh}\,a)^m = \mathbf{Ch}\,ma + \mathbf{Sh}\,ma \tag{5}$$

analogue à la formule de Moivre, ainsi

$$\text{Sh}\,3a = 3\,\text{Sh}\,a + 4\,\text{Sh}^3\,a$$

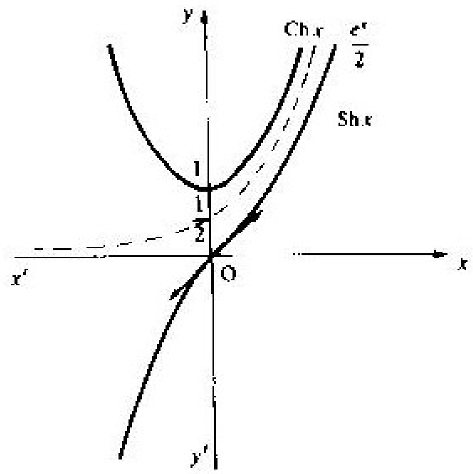
$$\text{Ch}\,3a = 4\,\text{Ch}^3\,a - 3\,\text{Ch}\,a$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \int \mathbf{Sh}\,x dx &= \frac{1}{2}\int e^x\,dx - \frac{1}{2}\int e^{-x}\,dx = \mathbf{Ch}\,x + C \\ \int \mathbf{Ch}\,x dx &= \frac{1}{2}\int e^x\,dx + \frac{1}{2}\int e^{-x}\,dx = \mathbf{Sh}\,x + C \\ \int \mathbf{Th}\,x dx &= \int \frac{\mathbf{Sh}\,x}{\mathbf{Ch}\,x} dx = \ln(\mathbf{Ch}\,x) + C \end{aligned} \tag{6}$$

Méthodologie

A. Définitions



■ sinus hyperbolique : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{Sh} x$$

Sh est une fonction impaire, croissante

■ cosinus hyperbolique : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

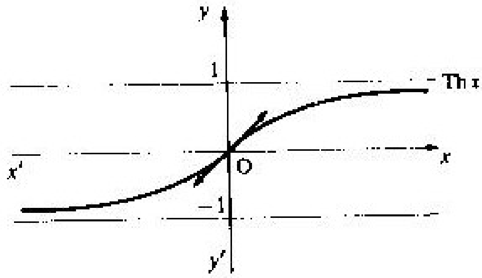
$$x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{Ch} x$$

Ch est une fonction paire, croissante pour $x > 0$

■ tangente hyperbolique $\mathbb{R} \to]-1, 1[$

$$x \longmapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x} = \operatorname{Th} x$$

Th est une fonction impaire, croissante.



B. Généralités

Les fonctions hyperboliques vérifient des formules analogues aux fonctions trigonométriques : ces formules peuvent être retrouvées soit en revenant à la définition par les exponentielles, soit en utilisant les relations

$$\cos x = \operatorname{Ch} ix \qquad i \sin x = \operatorname{Sh} ix$$

D'autre par $\operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{Sh}^2 x = 1$

C. Expressions de Sh nx *et* Ch nx *en fonction de* Sh x *et* Ch x

On part des égalités $\begin{cases} e^{nx} = \operatorname{Ch} nx + \operatorname{Sh} nx = (\operatorname{Ch} x + \operatorname{Sh} x)^n \\ e^{-nx} = \operatorname{Ch} nx - \operatorname{Sh} nx = (\operatorname{Ch} x - \operatorname{Sh} x)^n \end{cases}$

On développe $(\operatorname{Ch} x + \operatorname{Sh} x)^n$ et $(\operatorname{Ch} x - \operatorname{Sh} x)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. En effectuant la somme membre à membre on obtient Ch nx et en effectuant la différence membre à membre on obtient Sh nx.

D. Expressions de $\operatorname{Sh}^n x$ *et* $\operatorname{Ch}^n x$ *en fonction de* Sh nx *et* Ch nx

On obtiendra les formules cherchées en développant les seconds membres des égalités :

$$\operatorname{Ch}^n x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad \operatorname{Sh}^n x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n$$

II. FONCTIONS HYPERBOLIQUES INVERSES

1. Fonction argument sinus hyperbolique

Définition

La fonction Sh est définie, continue, monotone, croissante pour tout x de $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle admet une fonction réciproque notée Arg Sh définie par :

$$\begin{cases} y = \mathrm{Arg\,Sh}\,x \\ x \in]-\infty, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \mathrm{Sh}\,y \\ y \in]-\infty, +\infty[\end{cases}$$

Expression logarithmique

Soit $y = \mathrm{Arg\,Sh}\,x$ d'où $x = \mathrm{Sh}\,y$

Or $\mathrm{Ch}^2 y - \mathrm{Sh}^2 y = 1$, donc

$\mathrm{Ch}\,y = \sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 y} = \sqrt{1 + x^2}$

et $e^y = \mathrm{Sh}\,y + \mathrm{Ch}\,y = x + \sqrt{1 + x^2}$

d'où :

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{Arg\,Sh}\,x \\ &= \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \end{aligned}$$

Dérivée

La fonction Sh étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annulant pas, la fonction Arg Sh est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$. On a :

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\mathrm{Ch}\,y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

car

$\mathrm{Ch}^2 y = 1 + \mathrm{Sh}^2 y$ d'où $\mathrm{Ch}\,y > 0$

$$\mathrm{Ch}\,y = \sqrt{1 + x^2}$$

$$(\mathbf{Arg\,Sh}\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

2. Fonction argument cosinus hyperbolique

Définition

La restriction de la fonction Ch à $\mathbb{R}^+$ est continue, strictement croissante, elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$, et admet une fonction réciproque notée Arg Ch définie par :

$$\begin{cases} y = \mathrm{Arg\,Ch}\,x \\ x \in [1, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \mathrm{Ch}\,y \\ y \in [0, +\infty[\end{cases}$$

Expression logarithmique

Soit $y = \mathrm{Arg\,Ch}\,x$ avec $x \geq 1$

on a alors $x = \mathrm{Ch}\,y$ et $y \geq 0$.

Sh y est donc positif et

$\mathrm{Sh}\,y = \sqrt{\mathrm{Ch}^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$

$e^y = \mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Sh}\,y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

$$\mathbf{Arg\,Ch}\,x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

avec $x \geq 1$

Dérivée

La fonction Ch est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et sa dérivée ne s'annule que pour $y = 0$. La fonction Arg Ch est dérivable sur $]1, +\infty[$. On a :

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\mathrm{Sh}\,y}$$

or

$$\mathrm{Sh}\,y = \sqrt{\mathrm{Ch}^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$(\mathbf{Arg\,Ch}\,x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

3. Fonction argument tangente hyperbolique

Définition

La fonction Th est continue, monotone, croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et admet une fonction réciproque notée Arg Th définie par :

$$\begin{cases} y = \mathrm{Arg\,Th}\,x \\ x \in]-1, 1[\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \mathrm{Th}\,y \\ y \in]-\infty, +\infty[\end{cases}$$

Expression logarithmique

Soit $y = \mathrm{Arg\,Th}\,x$ avec $|x| < 1$

on a alors $x = \mathrm{Th}\,y = \dfrac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$

d'où

$e^{2y} = \dfrac{1 + x}{1 - x}$; $2y = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

$$\mathbf{Arg\,Th}\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$$

avec $|x| < 1$

Dérivée

La fonction Th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $y \to \dfrac{1}{\mathrm{Ch}^2 y}$ ne s'annule pas. La fonction Arg Th est dérivable en tout point de $]-1, 1[$

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{1 - \mathrm{Th}^2 y}$$

or $\mathrm{Th}\,y = x$, d'où

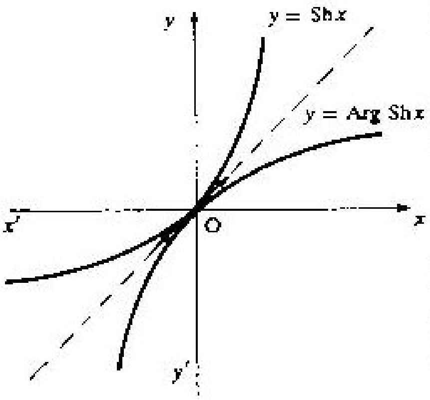
$$(\mathbf{Arg\,Th}\,x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(\operatorname{Arg Sh} x)'$	$+$	1	$+$
$\operatorname{Arg Sh} x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative

Elle est symétrique de la courbe représentative de la fonction $x \longrightarrow \operatorname{Sh} x$ par rapport à la droite $y = x$



Primitive

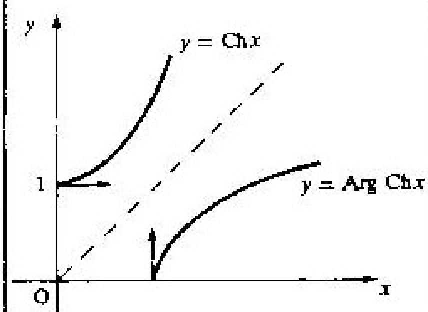
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \operatorname{Arg Sh} x + C$$
$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

Tableau de variations

x	1		$+\infty$
$(\operatorname{Arg Ch} x)'$	$\|$	$+\infty$	$+$
$\operatorname{Arg Ch} x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative

Elle est symétrique par rapport à la première bissectrice de la courbe d'équation $y = \operatorname{Ch} x$ avec $x > 0$



Primitive

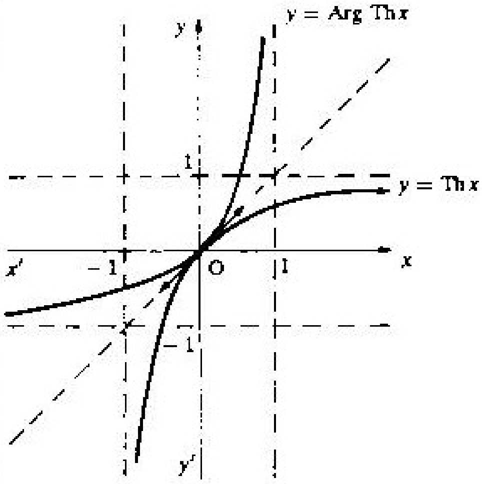
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{Arg Ch} x + C$$
$x > 1$
$\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$
avec $|x| > 1$

Tableau de variations

x	-1	0	1
$(\operatorname{Arg Th} x)'$			
$\operatorname{Arg Th} x$	$-\infty$	0	$+\infty$

Courbe représentative

Elle est symétrique par rapport à la première bissectrice de la courbe d'équation $y = \operatorname{Th} x$.



Primitive

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{Arg Th} x + C;$$
$|x| < 1$
$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C$$
$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$