

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE



MATHS Rappels
Suites, Fonctions et Développements
Limités
Énoncés de la série 2

Chapitre 1

Suites, Fonctions et Développements Limités : série 2

- **Exercice 1.1:** Calculer la dérivée première de la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

► **Indication :** Appliquer les résultats concernant la dérivée d'une fonction composée.

Solution : $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{2x}{x^2 - 1}$

- **Exercice 1.2:** Calculer les dérivées successives de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

► **Indication :** Prouver la propriété par récurrence après avoir validé les premières dérivées.

Solution : $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$

- **Exercice 1.3:** Etudier les variations de la fonction $f(x) = \ln(e^x + 1)$. On vérifiera que lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe représentative de f est asymptote à la droite d'équation $y = x$. Montrer que cette fonction admet une fonction réciproque f^{-1} et expliciter cette dernière.

► **Indication :**

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Asymptote : Prouver

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0 \text{ (en factorisant } e^x \text{ dans } f(x), \text{ par exemple)}$$

La fonction réciproque $f^{-1} \left\{ \begin{array}{l}]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(e^x - 1) \end{array} \right.$

- **Exercice 1.4:** Ecrire le développement limité à l'ordre 4 de la fonction définie sur $\mathbb{R} - 1$ par $f(x) = \frac{\sin x}{1 - x}$ en 0.

► **Indication :** Trouver le $DL_4(0)$ de $\sin x$ et effectuer la division...

Solution : $f(x) = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + x^4\varepsilon(x)$

- **Exercice 1.5:** Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 4 fois continûment différentiable telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x - x} = 1$$

Trouver son développement limité à l'ordre 3 autour de 0 .

► **Indication** : Ecrire de manière générale le $DL_3(0)$ de $f(x)$

Solution : $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

• **Exercice 1.6:** Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

► **Indication** : Utiliser les $DL_2(0)$ des fonctions

Solution : $-\frac{1}{12}$

• **Exercice 1.7:** Etudier la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \text{Arccos}(4x^3 - 3x)$$

► **Indication** : f est bien définie sur $[-1, 1]$

$$f'(x) \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1/2, 1/2[\\ -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1, -1/2] \cup]1/2, 1[\end{cases} ..$$

Point d'inflexion en $x = 0$