INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

MATHS Rappels
Intégration
Solutions de la série 3

Pascal Floquet
Xuân Meyer
Jean-Claude Satge

Première Année à Distance

Septembre 2006

Chapitre II

Intégration : solutions de la série 3

- ***Exercice II.1:*** *Soit* $I_{p,q} = \int_a^b (x-a)^p (b-x)^q dx$ *où* $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

1. montrer que : $I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$
2. Calculer $I_{p,0}$ et en déduire $I_{p,q}$

Solution :

1. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u = (b-x)^q & ; \quad dv = (x-a)^p dx \\ du = -q(b-x)^{q-1}dx & ; \quad v = \dfrac{(x-a)^{p+1}}{p+1} \end{array}$$

d'où

$$I_{p,q} = \underbrace{\left[(b-x)^q \frac{(x-a)^{p+1}}{p+1} \right]_a^b}_{0} + \int_a^b \frac{q}{p+1} (x-a)^{p+1} (b-x)^{q-1} dx$$

d'où

$$I_{p,q} = \int_a^b \frac{q}{p+1} (x-a)^{p+1} (b-x)^{q-1} dx$$

Soit :

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$

2.

$$I_{p,0} = \int_a^b (x-a)^p dx = \left[\frac{(x-a)^{p+1}}{p+1} \right]_a^b$$

$$I_{p,0} = \frac{(b-a)^{p+1}}{p+1}$$

D'après la première question :

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$

d'où

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} \frac{q-1}{p+2} \cdots \frac{1}{p+q} I_{p+q,0}$$

$$I_{p,q} = \frac{q(q-1)\cdots 3.2.1}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q-1)(p+q)} I_{p+q,0}$$

Or

$$I_{p+q,0} = \frac{(b-a)^{p+q+1}}{p+q+1}$$

d'où :

$$I_{p,q} = \frac{q!p!}{(p+q+1)!} (b-a)^{p+q+1}$$

- ***Exercice II.2*:**
Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2n+1} d\theta$ *pour* n *entier positif et en prenant* $\sin\theta$ *comme variable d'intégration*

Solution :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2n+1} d\theta = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(\theta))^n \cos(\theta) d\theta$$

Posons :

$$u = \sin(\theta)$$
$$du = \cos(\theta) d\theta$$

les valeurs aux bornes deviennent : $x = 0$, $u = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, $u = 1$. D'où :

$$I_n = \int_0^1 (1-u^2)^n du$$

En utilisant la formule du binôme de newton :

$$(1+u^2)^n = 1 - C_n^1 u^2 + C_n^2 u^4 + \cdots + (-1)^p C_n^p u^{2p} + \cdots + (-1)^n u^{2n}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \left[1 - C_n^1 u^2 + C_n^2 u^4 + \cdots + (-1)^p C_n^p u^{2p} + \cdots + (-1)^n u^{2n}\right] du \\ &= \left[x - C_n^1 \frac{u^3}{3} + C_n^2 \frac{u^5}{5} + \cdots + (-1)^p C_n^p \frac{u^{2p+1}}{2p+1} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 \end{aligned}$$

D'où :

$$I_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2p+1} C_n^p$$

- ***Exercice II.3*:** *Calculer l'intégrale définie* $I_1 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$, où a *étant un réel strictement positif.*

Solution : On pose : $\sin(t) = \frac{x}{a}$, $dx = a\cos(t)dt$.
les valeurs aux bornes deviennent : $x = 0$, $t = 0$, $x = a$, $t = \frac{\pi}{2}$. D'où :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t) dt \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dt + a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{a^2}{2} [t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a^2}{4} [\sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

D'où :

$$I_1 = \frac{\pi a^2}{4}$$

- ***Exercice II.4***: *Calculer l'intégrale définie* $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx$

  Solution : On pose : $u = \arctan(x)$, $du = \frac{1}{1+x^2}dx$.

Les valeurs aux bornes deviennent : $x = 0$,$u = 0$, $x = 1$, $u = \dfrac{\pi}{4}$. D'où :

$$I_2 = \int_0^1 \frac{arctan(x)}{x^2+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} udu$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[u^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$$

- ***Exercice II.5***: *Calculer l'intégrale définie* $I_3 = \int_1^2 t\sqrt{t^2-2t+5}dt$

  Solution :

$$I_3 = \underbrace{\int_1^2 (t-1)\sqrt{t^2-2t+5}dt}_{A} + \underbrace{\int_1^2 \sqrt{t^2-2t+5}dt}_{B}$$

- Calculons A en posant : $u = t^2 - 2t + 5$, $du = (2t-2)dt = 2(t-1)dt$
  Les valeurs aux bornes deviennent : $t = 1$, $u = 4$, $t = 2$, $u = 5$. D'où :

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^2 (t-1)\sqrt{t^2-2t+5}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_4^5 \sqrt{u}du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^5 \\
&= \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-8)
\end{aligned}$$

- Calculons B

$$B = \int_1^2 \sqrt{t^2-2t+5}dt = \int_1^2 \sqrt{(t-1)^2+4}dt = 2\int_1^2 \sqrt{(\frac{t-1}{2})^2+1}dt$$

Posons : $sh(x) = \dfrac{t-1}{2}$, $ch(x)dx = \dfrac{dt}{2}$.

Les valeurs aux bornes deviennent : $t = 1$,$x = 0$, $t = 2$, $x = argsh(\dfrac{1}{2})$. D'où :

$$\begin{aligned}
B &= 2\int_1^2 \sqrt{(\frac{t-1}{2})^2+1}dt \\
&= 2\int_0^{argsh(\frac{1}{2})} \sqrt{(sh^2(x)+1}2ch(x)dx \\
&= 4\int_0^{argsh(\frac{1}{2})} ch^2(x)dx \\
&= 4\int_0^{argsh(\frac{1}{2})} \frac{1+ch(2x)}{2}dx \\
&= 2\left[x + \frac{sh(2x)}{2}\right]_0^{argsh(\frac{1}{2})} \\
&= 2(argsh(\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{5}}{4} \\
&= 2\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

D'où :

$$I_3 = \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-8) + 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$I_3 = \frac{1}{6}(13\sqrt{5}-16) + 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

• ***Exercice II.6***: *Calculer l'intégrale définie* $I_4 = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1+\tan(x)}{1+\sin(2x)}dx$

Solution : On pose :$u = \tan(x)$, $du = (1+\tan^2(x))dx$, soit $dx = \dfrac{du}{1+u^2}$

Les valeurs aux bornes deviennent : $x = -\dfrac{\pi}{6}$,$u = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\sin(2x) = \frac{2u}{1+u^2}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1+\tan(x)}{1+\sin(2x)}dx \\
&= \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1+u}{1+\dfrac{2u}{1+u^2}} \frac{du}{1+u^2} \\
&= \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{(1+u^2)(1+u)}{u^2+2u+1} \frac{du}{1+u^2} \\
&= \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{du}{1+u} \\
&= [\ln|u+1|]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)
\end{aligned}$$

• ***Exercice II.7***: *Pour tout naturel* $n \geq 1$*, on pose :* $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1}n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}dt$

1. *A l'aide d'une intégration par parties, calculer* I_1
2. *Démontrer que pour tout naturel* $n \geq 1$*, on a :*

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$$

3. *En déduire, par récurrence que pour tout naturel* $n \geq 1$*, on a :*

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!} + I_n$$

Solution :

1.

$$I_1 = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}dt$$

On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{lcl} u = 1-t & ; & dv = e^{\frac{t}{2}}dt \\ du = -dt & ; & v = 2e^{\frac{t}{2}} \end{array}$$

D'où

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{2}\left[(1-t)e^{\frac{t}{2}}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{\frac{t}{2}}\,dt \\ &= -\frac{1}{2} + \left[e^{\frac{t}{2}}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} + e^{\frac{1}{2}} - 1 \\ &= \sqrt{e} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2. $I_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+2}(n+1)!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^{\frac{t}{2}}\,dt$. On intègre par parties I_{n+1} en posant :

$$\begin{array}{lcl} u = (1-t)^{n+1} & ; & dv = e^{\frac{t}{2}}\,dt \\ du = -(n+1)(1-t)^n dt & ; & v = 2e^{\frac{t}{2}} \end{array}$$

D'où

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{2^{n+2}(n+1)!}\underbrace{\left[2e^{\frac{t}{2}}(1-t)^{n+1}\right]_0^1}_{=-2} + \frac{2(n+1)}{2^{n+2}(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}\,dt \\ &= \frac{-2}{2^{n+2}(n+1)!} + \frac{1}{2^{n+1}(n)!}\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}\,dt \\ &= \frac{-2}{2^{n+2}(n+1)!} + I_n \end{aligned}$$

D'où

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$$

3. On a montré que $I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{2^n(n)!}$ et $I_1 = \sqrt{e} - \frac{3}{2}$. D'où :

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} &= -\frac{1}{2^n(n)!} \\ I_{n-1} - I_{n-2} &= -\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \\ \vdots\quad &= \vdots \\ I_3 - I_2 &= -\frac{1}{2^3(3)!} \\ I_2 - I_1 &= -\frac{1}{2^2(2)!} \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre on obtient :

$$I_n - I_1 = -\frac{1}{2^n(n)!} - \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} - \cdots - \frac{1}{2^3(3)!} - \frac{1}{2^2(2)!}$$

$$I_1 = \frac{1}{2^n(n)!} + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} + \cdots - \frac{1}{2^3(3)!} + \frac{1}{2^2(2)!} + I_n$$

$$\sqrt{e} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2^n(n)!} + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} + \cdots - \frac{1}{2^3(3)!} + \frac{1}{2^2(2)!} + I_n$$

$$\sqrt{e} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2(2)!} + \frac{1}{2^3(3)!} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} + \frac{1}{2^n(n)!} + I_n$$

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2(2)!} + \frac{1}{2^3(3)!} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} + \frac{1}{2^n(n)!} + I_n$$

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1!} + \frac{1}{2^2(2)!} + \frac{1}{2^3(3)!} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} + \frac{1}{2^n(n)!} + I_n$$