**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE**

# Limites et Equivalents

## 1.1 Introduction

Savoir qu'une fonction $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ ou vers 0 lorsque $x$ est voisin de $x_0$ ne suffit pas: il est souvent indispensable de savoir en plus à quelle *vitesse* cette convergence a lieu ou encore d'être capable de *comparer* la façon de converger de plusieurs fonctions.

Par exemple, les fonctions $f(x) = x$ , $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = x^2$ tendent toutes les trois vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$. Mais

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

Ainsi $h(x)$ *tend plus vite* vers l'infini que $f(x)$ qui elle même tend plus vite vers l'infini que $g(x)$. Numériquement c'est clair : prendre $x = 10^6$ alors $g(x) = 1000$ , $f(x) = 1000000$ et $h(x) = 10^{12}$.

Noter qu'il ne s'agit pas seulement d'une *comparaison* au sens habituel des fonctions *i.e.* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ (pour $x \geq 1$) mais d'une vitesse de convergence différente, exactement traduite dans les limites précédentes. Ainsi $f(x)$ et $k(x) = 10^{12}x$ convergent vers $+\infty$ à la *même vitesse* quand $x$ tend vers $+\infty$ car

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{k(x)} = \frac{1}{10^{12}} \quad \text{finie}$$

même si $f(x) < k(x)$!

Pour préciser le comportement d'une fonction au voisinage d'un point, l'un des outils fondamental est l'utilisation d'un *développement limité* qui fournit un *équivalent* de la fonction au voisinage du point. De façon moins précise, il est important dans les problèmes de limite d'avoir quelques résultats de comparaison de convergence pour quelques fonctions de base comme $\ln x$, $e^x$ et $x^\alpha$. Nous rappelons les principaux résultats dans ce qui suit.

**Définition 1** *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions, lorsque*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

*on dira que $f(x)$ et $g(x)$ sont équivalentes au voisinage de $x_0$ et on écrira*

$$f(x) \sim_{x \to x_0} g(x)$$

Dans ce qui précède, on avait $k(x) \sim 10^{12} f(x)$ ce qui traduit l'idée, qu'à un facteur près, le comportement à l'infini est le même.

## 1.2 $\sin x \sim x$ quand $x \to 0$

Une autre façon d'écrire ce résultat est donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Signalons au passage une inégalité utile à **connaître absolument**

$$\boxed{\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

en convenant que $\frac{\sin x}{x} = 1$ pour $x = 0$ grâce à la limite précédente.

**Exercice 2** *Montrer que* $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}(x^2+1)} = 0$

Numérateur et dénominateur tendent vers 0 c'est donc une *forme indéterminée.* Mais pour $x$ voisin de 0 on a $\sin x \sim x$ et $x^2 + 1 \to 1$ donc

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}\,(x^2+1)} \sim \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \to 0$$

L'équivalence de $\sin x$ permet de résoudre l'indétermination.

## 1.3 $\ln(1+x) \sim x$ quand $x \to 0$

**Exercice 3** *Déduire de ce résultat que (et c'est un résultat à connaître)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Erreur à ne pas commettre ...** dire que $1 + \frac{x}{n} \to 1$ quand $n \to +\infty$ et donc $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to 1$ quand $n \to +\infty$.

Noter que pour tout $x$ fixé, on a $\frac{x}{n}$ qui tend vers 0. On pose alors $g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. On passe au logarithme ($x$ étant fixé, pour $n$ assez grand $1 + \frac{x}{n}$ est proche de 1, en particulier $1 + \frac{x}{n} > 0$ et on peut prendre le logarithme)

$$\ln g_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

C'est toujours une forme indéterminée quand $n \to +\infty$ puisque $n \to \infty$ et $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \to 0$. Mais l'équivalence du logarithme permet de lever l'indétermination.

$$\begin{cases} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim \frac{x}{n} & \text{car } \frac{x}{n} \to 0 \text{ quand } n \to \infty \\ n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim x & \\ \text{donc} & \\ g_n(x) \to e^x & \end{cases}$$

Par contre, montrer avec la même technique que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n^2}\right)^n = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x<0 \\ +\infty & \text{si } x>0 \end{cases}$$

## 1.4 Quelques autres équivalents utiles

Au voisinage de 0, nous avons les équivalents suivants :

| | | |
|---|---|---|
| $\cos x$ | $\sim$ | $1-\frac{x^2}{2}$ |
| $\sqrt{1+x}$ | $\sim$ | $1+\frac{1}{2}x$ |
| $(1+x)^\alpha$ | $\sim$ | $1+\alpha x$ |
| $\frac{1}{1+x}$ | $\sim$ | $1-x$ |
| $\frac{1}{1-x}$ | $\sim$ | $1+x$ |
| $e^x$ | $\sim$ | $1+x$ |

**Exercice 4** *Trouver les équivalents de*

$$\frac{1}{(1-x)^2} \text{ et } \frac{2}{(1-x)^3}$$

Solution :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &\sim 1+2x \\ \frac{2}{(1-x)^3} &\sim 2+6x \end{aligned}$$

## 1.5 Comparaison de $\ln x$ , $e^x$ et $x^\alpha$ $(\alpha > 0)$

Il est commode d'avoir en tête cette formulation.

**Remarque 5** *Dans les formes indéterminées, l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme.*

*Plus précisément*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall\alpha > 0}$$

Quelques commentaires:

Le deuxième résultat se déduit du premier. Poser $X = \frac{1}{x}$ avec $X \to +\infty$. Alors

$$x\ln x = \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{\ln X}{X} \to 0 \quad \text{quand } X \to +\infty$$

Des valeurs numériques donnent une bonne idée des différences des vitesses de croissance de ces fonctions vers $= \infty$. Prendre $x = 100$ , $e^{100} = 2.7\ 10^{43}$, $\ln(100) = 4.6$.

On a

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x\, e^x = -\infty$$

En effet quand $x \to 0^+$ , $e^x$ tend vers 1 et $\ln x \to -\infty$. Ce n'est pas une forme indéterminée et la limite est $-\infty$. Dans ce cas ce n'est pas l'exponentielle qui donne la limite.

On a

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0}$$

Poser $X = \sqrt{x}$ avec $X \to +\infty$, alors $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 2\frac{\ln X}{X} \to 0 \quad$ quand $X \to +\infty$

Plus généralement, avec le même argument

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall\alpha > 0}$$

**Exercice 6** *Déterminer* $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x^2} =? \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On pose $X = x^2$ et $X \to +\infty$. Alors

$$x^n e^{-x^2} = X^{\frac{n}{2}} e^{-X} = \frac{1}{\left(\frac{e^X}{X^{\frac{n}{2}}}\right)} = 0$$

## 1.6 Complément : développements limités

Parfois il est nécessaire d'avoir un développement plus précis de la fonction au voisinage de $x_0$. Par exemple, si on veut étudier $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x - x}{x^2}$. L'équivalent $\sin x \sim x$ ne suffit pas. En effet, le numérateur serait identiquement nul, ce qui n'est évidemment pas le cas quelques soit $x$.

On donne dans ce qui suit les développements limités (D.L.) des principales fonctions :

| | | |
|---|---|---|
| $e^x$ | $=$ | $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$ |
| $\sin x$ | $=$ | $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$ |
| $\cos x$ | $=$ | $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + x^{2n} \varepsilon(x)$ |
| $(1+x)^\alpha$ | $=$ | $1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$ |
| $\frac{1}{1+x}$ | $=$ | $1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$ |
| $\frac{1}{1-x}$ | $=$ | $1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^n \varepsilon(x)$ |
| $\ln(1+x)$ | $=$ | $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + .... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$ |

avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

Revenons à l'exemple d'introduction. Si nous prenons un équivalent du sinus allant jusqu'à l'ordre 3, nous avons pour le numérateur l'équivalent suivant :

$$\sin x - x \sim \left( x - \frac{x^3}{3!} \right) - x = -\frac{x^3}{3!}$$

et donc l'équivalent de la fonction dont nous cherchons la limite est :

$$\frac{\sin x - x}{x^2} \sim -\frac{x}{3!}$$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. La limite cherchée est donc égale à 0.