INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

MATHS Rappels
Intégration
Enoncés de la série 3

Pascal Floquet
Xuân Meyer
Jean-Claude Satge

Première Année à Distance

Septembre 2006

Chapitre 2

Intégration : série 3

• ***Exercice 2.1*:** Soit $I_{p,q} = \int_a^b (x-a)^p (b-x)^q dx$ où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

1. montrer que : $I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$
2. Calculer $I_{p,0}$ et en déduire $I_{p,q}$

• ***Exercice 2.2*:** Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos)^{2n+1} \theta d\theta$ pour n entier positif et en prenant $\sin\theta$ comme variable d'intégration.

• ***Exercice 2.3*:** a étant un réel strictement positif, Calculer l'intégrale définie : $I_1 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$

• ***Exercice 2.4*:** Calculer l'intégrale définie $I_2 = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2+1} dx$

• ***Exercice 2.5*:** Calculer l'intégrale définie $I_3 = \int_1^2 t\sqrt{t^2 - 2t + 5} dt$

• ***Exercice 2.6*:** Calculer l'intégrale définie $I_4 = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1+\tan(x)}{1+\sin(2x)} dx$

• ***Exercice 2.7*:** Pour tout naturel $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1
2. Démontrer que pour tout naturel $n \geq 1$, on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$$

3. En déduire, par récurrence que pour tout naturel $n \geq 1$, on a :

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!} + I_n$$