INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

MATHS Rappels
Intégration
Enoncés de la série 2

Pascal Floquet
Xuân Meyer
Jean-Claude Satge

Première Année à Distance

Septembre 2006

Chapitre 2

Intégration : série 2

- ***Exercice 2.1:*** *Calculer* $I_1 = \int xe^x dx$

  ▶ ***Indication :*** Intégrer par parties en posant : $u = x$ et $dv = e^x dx$

  Solution : $I_1 = (x-1)e^x + C$ où C est une constante réelle.

- ***Exercice 2.2:*** *Calculer* $I_2 = \int x^2 ln(x) dx$

  ▶ ***Indication :*** Intégrer par parties en posant : $u = ln(x)$ et $dv = x^2 dx$

  Solution : $I_2 = \frac{x^3}{3} ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$ où C est une constante réelle.

- ***Exercice 2.3:*** *Calculer* $I_3 = \int x^2 sin(x) dx$

  ▶ ***Indication :*** faire deux intégrations par parties en posant successivement : $u = x^2$ et $dv = sin(x)dx$, puis $u = x$ et $dv = cos(x)dx$

  Solution : $I_3 = -x^2 cos(x) + 2x sin(x) + 2cos(x) + C = (2 - x^2)cos(x) + 2x sin(x) + C$ où C est une constante réelle.

- ***Exercice 2.4:*** *Calculer* $I_4 = \int \frac{dx}{5 + 4cos(x)}$

  ▶ ***Indication :*** Faire les changements de variable : $t = tan(\frac{x}{2})$, puis $tan(u) = \frac{t}{3}$

  Solution : $I_4 = \frac{2}{3} Arctan\left(\frac{tan(\frac{x}{2})}{3}\right) + C$ où C est une constante réelle.

- ***Exercice 2.5:*** *Calculer* $I_5 = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

  ▶ ***Indication :*** Faire le changement de variable : $z = \sqrt{1+x^2}$

  Solution : $I_5 = \sqrt{1+x^2} + C$ où C est une constante réelle.

- ***Exercice 2.6:*** *Calculer* $I_6 = \int \frac{dx}{3 + \sqrt{2+x}}$

  ▶ ***Indication :*** Faire le changement de variable : $z = \sqrt{2+x}$, puis une division de polynômes.

  Solution : $I_6 = 2\sqrt{2+x} - 6ln\left|3 + \sqrt{2+x}\right| + C$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 2.7***: *Calculer* $I_7 = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+6}}$

▶ ***Indication :*** Faire le changement de variable :$sin(t) = \frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

<u>**Solution**</u> **:** $I_7 = Arcsin\left(\frac{2x-1}{5}\right) + C$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 2.8***: *Calculer* $I_8 = \int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$

▶ ***Indication :*** Faire une division de polynômes suivant les puissances décroissantes, puis une décomposition en éléments simples.

<u>**Solution**</u> **:** $I_8 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + 2ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 2.9***: *Calculer* $I_9 = \int \frac{x^2}{\alpha^4 - x^4} dx$ où α est une constante réelle.

▶ ***Indication :*** Faire une factorisation de $\alpha^4 - x^4$ puis une décomposition en éléments simples.

<u>**Solution**</u> **:** $I_9 = \frac{1}{4\alpha} ln\left|\frac{\alpha + x}{\alpha - x}\right| - \frac{1}{2\alpha} Arctan(\frac{x}{\alpha}) + C$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 2.10***: *Calculer* $I_{10} = \int \frac{dx}{1 + sin(x) - cos(x)}$

▶ ***Indication :*** Faire le changement de variable :$t = tan(\frac{x}{2})$

<u>**Solution**</u> **:** $I_{10} = ln\left|\frac{tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + C$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 2.11***: *Calculer* $I_{11} = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{1 + e^x} dx$

▶ ***Indication :*** Poser $u = e^x$ puis décomposer en éléments simples la fraction $\frac{u+1}{u(1+u)}$

<u>**Solution**</u> **:** $I_{11} = 2\ln\frac{1+e}{2} - 1$

• ***Exercice 2.12***: *Calculer* $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + sin(x)}$

▶ ***Indication :*** Poser : $t = tan(\frac{x}{2})$

<u>**Solution**</u> **:** $I_{12} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

• ***Exercice 2.13***: *Calculer* $I_{13} = \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

▶ ***Indication :*** Ecrire $x^2 - 3x + 2$ sous forme canonique et poser : $t = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$

<u>**Solution**</u> **:** $I_{13} = ln\left(\frac{5 + 2\sqrt{6}}{3 + 2\sqrt{2}}\right)$

- ***Exercice 2.14***: *Calculer* $I_{14} = \int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)(x-1)}dx$

▶ ***Indication :*** Décomposer la fraction $\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)(x-1)}$ en éléments simples

$$\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Pour intégrer $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+x+1)}$, écrire x^2-3x+2 sous forme canonique et poser : $t = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$

<u>**Solution**</u> **:** $I_{14} = -\frac{1}{3}\left(2ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$

- ***Exercice 2.15***: *Calculer* $I_{15} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

▶ ***Indication :*** Faire deux changements de variables successifs :$t = \frac{x}{a}$ puis $sh(u) = t$.

<u>**Solution**</u> **:**

$$I_{15} = \frac{1}{a^2}\left[th(u)\right]_0^{Argsh\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

Cette expression est équivalente à :

$$I_{15} = \left[\frac{x}{a^2}(a^2+x^2)^{-1/2}\right]_0^1 = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

- ***Exercice 2.16***:

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel $k \leq n$, on pose :

$$I_{k,n} = \int_0^1 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} dx$$

A l'aide d'une intégration par parties, comparer $I_{k,n}$ et $I_{k+1,n}$.
En déduire $I_{k,n}$ en fonction de n.

▶ ***Indication :*** Intégrer par parties en posant :$u = (1-x)^{n-k}$ et $dv = x^k dx$.On se servira de la relation :

$$\frac{(n-k)C_n^k}{k+1} = C_n^{k+1}$$

<u>**Solution**</u> **:** $I_{k,n} = I_{k+1,n} = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

- ***Exercice 2.17***: *Calculer, si cela est possible :* $J_1 = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

▶ ***Indication :*** Soit $\alpha \in [0,3[$. Calculer $J_1(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ en posant $u = \frac{x}{3}$ puis déterminer la limite du résultat lorsque x tend vers 3.

<u>**Solution**</u> **:** $J_1 = \frac{\pi}{2}$

- ***Exercice 2.18***:

Calculer, si cela est possible : $J_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{cos(x)dx}{\sqrt{1-sin(x)}}$

▶ ***Indication :*** Soit $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Calculer $J_2(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{d(sin(x))}{\sqrt{1-sin(x)}}$ puis déterminer la limite du résultat lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

<u>**Solution**</u> **:** J_2 est convergente et $J_2 = 2$