INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

MATHS Rappels
Intégration
Solutions de la série 2

Pascal Floquet
Xuân Meyer
Jean-Claude Satge

Première Année à Distance

Septembre 2006

Chapitre 2

Intégration : solution série 2

- ***Exercice 2.1:*** *Calculer* $I_1 = \int xe^x dx$

Solution : On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u = x & ; \quad dv = e^x dx \\ du = dx & ; \quad v = e^x \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} I_1 & = & \int xe^x dx \\ & = & xe^x - \int e^x dx \\ & = & (x-1)e^x + C \end{array}$$

$I_1 = (x-1)e^x + C$ où C est une constante réelle.

- ***Exercice 2.2:*** *Calculer* $I_2 = \int x^2 \ln(x) dx$

Solution : On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u = \ln(x) & ; \quad dv = x^2 dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & ; \quad v = \dfrac{x^3}{3} \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} I_2 & = & \int x^2 \ln(x) dx \\ & = & \dfrac{x^3}{3}\ln(x) - \displaystyle\int \frac{1}{x}\frac{x^3}{3} dx \\ & = & \dfrac{x^3}{3}\ln(x) - \displaystyle\int \frac{x^2}{3} dx \\ & = & \dfrac{x^3}{3}\ln(x) - \dfrac{x^3}{9} + C \end{array}$$

$I_2 = \dfrac{x^3}{3}\ln(x) - \dfrac{x^3}{9} + C$ où C est une constante réelle.

- ***Exercice 2.3:*** *Calculer* $I_3 = \int x^2 \sin(x) dx$

Solution : On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & ; \quad dv = \sin(x) dx \\ du = 2x dx & ; \quad v = -\cos(x) \end{array}$$

$$I_3 = -x^2\cos(x) + 2\underbrace{\int x\cos(x)x dx}_{J}$$

J s'intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{lcl} u = x & ; & dv = \cos(x)dx \\ du = dx & ; & v = \sin(x) \end{array}$$

$$J = -x\sin(x) + \int \sin(x)dx = -x\sin(x) - \cos(x) + C$$

d'où :
$I_3 = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C = (2-x^2)\cos(x) + 2x\sin(x) + C$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 2.4:*** *Calculer* $I_4 = \displaystyle\int \frac{dx}{5+4\cos(x)}$

<u>Solution</u> : On effectue le changement de variable : $t = \tan(\frac{x}{2})$

$$dt = \frac{1}{2}\left[1 + \tan^2(\frac{x}{2})\right] dx \quad \text{soit : } dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

et

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

I_4 devient :

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{dx}{5+4\cos(x)} \\ &= \int \frac{2dt}{1+t^2} \frac{1}{5+4\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \\ &= 2\int \frac{dt}{5(1+t^2)+4(1-t^2)} \\ &= 2\int \frac{dt}{9+t^2} \\ &= 2\int \frac{dt}{9\left[1+\left(\dfrac{t}{3}\right)^2\right]} \end{aligned}$$

En posant : $\tan(u) = \dfrac{t}{3}$, on a : $(1+\tan^2(u))du = \dfrac{dt}{3}$ soit : $dt = 3(1+\tan^2(u))du$. d'où, si $(1+\tan^2(u)) \neq 0$:

$$\begin{aligned} I_4 &= 2\int \frac{3(1+\tan^2(u))du}{9(1+\tan^2(u))} \\ &= \frac{2}{3}\int du \\ &= \frac{2}{3}u + C \end{aligned}$$

d'où
$I_4 = \dfrac{2}{3}\arctan\left(\dfrac{\tan(\frac{x}{2})}{3}\right) + C$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 2.5:*** *Calculer* $I_5 = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

<u>Solution</u> : On effectue le changement de variable : $z = \sqrt{1+x^2}$, soit : $z^2 = 1+x^2$ On a : $2zdz = 2xdx$.
I_5 devient :

$$I_5 = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{zdz}{z} = \int dz = z + C$$

d'où :
$I_5 = \sqrt{1+x^2} + C$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 2.6***: *Calculer* $I_6 = \displaystyle\int \frac{dx}{3+\sqrt{2+x}}$

Solution : On effectue le changement de variable : $z = \sqrt{2+x}$, soit : $z^2 = 2 + x$ On a : $2zdz = dx$. I_6 devient :

$$I_6 = \int \frac{dx}{3+\sqrt{2+x}} = \int \frac{2zdz}{3+z}$$

d'où :

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \frac{2zdz}{3+z} \\ &= 2\int \frac{(z+3-3)dz}{3+z} \\ &= 2\int dz - 6\int \frac{dz}{3+z} \\ &= 2z - 6\ln|3+z| + C \end{aligned}$$

D'où
$I_6 = 2\sqrt{2+x} - 6\ln\left|3+\sqrt{2+x}\right| + C$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 2.7***: *Calculer* $I_7 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+6}}$

Solution :

$$\begin{aligned} I_7 &= \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+6}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + 6}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2\left[-\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right]}} \\ &= \frac{2}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left[\frac{2}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}} \end{aligned}$$

Posons : $\sin(t) = \frac{2}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)$, soit $\cos(t)dt = \frac{2}{5}dx$, d'où $dx = \frac{5}{2}\cos(t)dt$
On obtient alors :

$$\begin{aligned} I_7 &= \frac{2}{5}\int \frac{5}{2}\frac{\cos(t)dt}{\sqrt{-\sin^2(t)+1}} \\ &= \int \frac{\cos(t)dt}{|\cos(t)|} \\ &= t + C \end{aligned}$$

D'où
$I_7 = \arcsin\left(\frac{2x-1}{5}\right) + C$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 2.8:*** *Calculer* $I_8 = \displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$

Solution : Soit : $P(x) = x^4 - x^3 - x - 1$ et $Q(x) = x^3 - x^2$.
Le degré de $P(x)$ et supérieur au degré de $Q(x)$, on peut donc effectuer une division de P par Q suivant les puissances décroissantes, soit :

$$\frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} = x - \frac{x+1}{x^3 - x^2}$$

$$\begin{aligned} I_8 &= \int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx \\ &= \int x dx - \int \frac{x+1}{x^3 - x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 - \underbrace{\int \frac{x+1}{x^3 - x^2}}_{J} dx \end{aligned}$$

On intègre J en faisant une décomposition en éléments simples :

$$\frac{x+1}{x^3 - x^2} = \frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}$$

en réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$A(x-1) + Bx(x-1) + C(x^2) = x + 1$$

Soit :

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A - B = 1 \\ -A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -2 \\ C = 2 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{x+1}{x^3 - x^2} \\ &= -\int \frac{dx}{x^2} - 2\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-1} \\ &= \frac{1}{x} - 2\ln|x| + 2\ln|x-1| + C \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} I_8 &= \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + 2\ln|x| - 2\ln|x-1| + C \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + C \end{aligned}$$

$I_8 = \frac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{x} + 2\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right| + C$ où C est une constante réelle.

• ***Exercice 2.9:*** *Calculer* $I_9 = \displaystyle\int \frac{x^2}{\alpha^4 - x^4} dx$

Solution : Factorisons l'expression $\alpha^4 - x^4$:

$$\alpha^4 - x^4 = (\alpha^2 - x^2)(\alpha^2 + x^2) = (\alpha - x)(\alpha + x)(\alpha^2 + x^2)$$

On décompose ensuite la fraction $\dfrac{x^2}{\alpha^4 - x^4}$ en éléments simples :

$$\frac{x^2}{\alpha^4 - x^4} = \frac{x^2}{(\alpha - x)(\alpha + x)(\alpha^2 + x^2)} = \frac{A}{\alpha - x} + \frac{B}{\alpha + x} + \frac{Cx + D}{\alpha^2 + x^2}$$

Une réduction au même dénominateur donne :

$$A(\alpha+x)(\alpha^2+x^2)+B(\alpha-x)(\alpha^2+x^2)+(Cx+D)(\alpha^2-x^2)=x^2$$

$$x^3(A-B-C)+x^2(\alpha A+\alpha B-D)+x(\alpha^2A-B\alpha^2+C\alpha^2)+\alpha^3(A+B)+D\alpha^2=x^2$$

Soit :

$$\left\{\begin{array}{l} A-B-C=0 \\ \alpha A+\alpha B-D=1 \\ \alpha^2(A-B+C)=0 \\ \alpha(A+B)+D=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} D=-\dfrac{1}{2} \\ 2\alpha A=\dfrac{1}{2} \\ A+B=\dfrac{1}{2\alpha} \\ A-B+C=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} D=-\dfrac{1}{2} \\ A=\dfrac{1}{4\alpha} \\ B=\dfrac{1}{4\alpha} \\ C=0 \end{array}\right.$$

d'où

$$\frac{x^2}{\alpha^4-x^4}=\frac{1}{4\alpha}\frac{1}{\alpha-x}+\frac{1}{4\alpha}\frac{1}{\alpha+x}-\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha^2+x^2}$$

On peut alors calculer I_9 :

$$\begin{aligned} I_9 &= \frac{1}{4\alpha}\int\frac{1}{\alpha-x}dx+\frac{1}{4\alpha}\int\frac{1}{\alpha+x}dx-\int\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha^2+x^2}dx \\ &= -\frac{1}{4\alpha}\ln|\alpha-x|+\frac{1}{4\alpha}\frac{1}{\alpha+x}-\frac{1}{2\alpha}\arctan(\frac{x}{\alpha})+C \\ &= \frac{1}{4\alpha}\ln\left|\frac{\alpha+x}{\alpha-x}\right|-\frac{1}{2\alpha}\arctan(\frac{x}{\alpha})+C \end{aligned}$$

$I_9=\dfrac{1}{4\alpha}\ln\left|\dfrac{\alpha+x}{\alpha-x}\right|-\dfrac{1}{2\alpha}\arctan(\dfrac{x}{\alpha})+C$ où C est une constante réelle.

- ***Exercice 2.10*:** *Calculer* $I_{10}=\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin(x)-\cos(x)}$

Solution : On doit intégrer une fraction rationnelle en sin et cos. On effectue le changement de variable : $t=\tan(\dfrac{x}{2})$

$$dt=\frac{1}{2}\left[1+\tan^2(\frac{x}{2})\right]dx \quad \text{soit : } dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

et

$$\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$$

I_{10} devient :

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int\frac{dx}{1+\sin(x)-\cos(x)} \\ &= \int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(1+\dfrac{2t}{1+t^2}-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \\ &= 2\int\frac{dt}{2t(1+t)} \end{aligned}$$

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{dt}{t(1+t)}=\frac{dt}{t}-\frac{dt}{1+t}$$

D'où :

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1+t} \\ &= \ln|t| - \ln|1+t| + C \\ &= \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + C \end{aligned}$$

$I_{10} = \ln\left|\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + C$ où C est une constante réelle.

- ***Exercice 2.11:*** *Calculer* $I_{11} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{1+e^x}dx$

Solution : Posons : $u = e^x$. On a alors :

$$du = e^x dx \quad dx = \frac{du}{u}$$

Les valeurs aux bornes deviennent : pour $x = 0$,$u(0) = 1$ et pour $x = 1$, $u(1) = e$. D'où :

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_0^1 \frac{e^x - 1}{1+e^x}dx \\ &= \int_1^e \frac{u-1}{u(1+u)}du \end{aligned}$$

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{u-1}{u(1+u)} = -\frac{1}{u} + \frac{2}{1+u}$$

d'où :

$$\begin{aligned} I_{11} &= -\int_1^e \frac{du}{u} + 2\int_1^e \frac{du}{u+1} \\ &= -\left[\ln|u|\right]_1^e + 2\left[\ln|u+1|\right]_1^e \end{aligned}$$

D'où : $I_{11} = 2\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right) - 1$

- ***Exercice 2.12:*** *Calculer* $I_{12} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin(x)}$

Solution : On doit intégrer une fraction rationnelle en sin . On effectue le changement de variable :

$$t = \tan(\frac{x}{2})$$

$$dt = \frac{1}{2}\left[1 + \tan^2(\frac{x}{2})\right] dx \quad \text{soit : } dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

et

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Les valeurs aux bornes deviennent : pour $x = 0$, $t(0) = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$, $t = 1$.

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin(x)} \\
&= \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)\left(2+\dfrac{2t}{1+t^2}\right)} \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1} \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}} \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{dt}{\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\dfrac{1}{2}\right)\right]^2+1}
\end{aligned}$$

On pose :

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

$$du = \frac{2}{\sqrt{3}}dt$$

Les valeurs aux bornes deviennent : pour $t = 0$, $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et pour $t = 1$, $u = \sqrt{3}$ D'où :

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{du}{(u^2+1)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan(u)\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

d'où $I_{12} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$

- ***Exercice 2.13*:** *Calculer* $I_{13} = \displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

Solution :

$$\begin{aligned}
I_{13} &= \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}} \\
&= \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}}} \\
&= \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(\left[2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right]^2-1\right)}} \\
&= \int_3^4 \frac{2dx}{\sqrt{\left[2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right]^2-1}}
\end{aligned}$$

Posons :

$$t = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$dt = 2dx$$

Les valeurs aux bornes deviennent : pour $x = 3$, $t = 3$ et pour $x = 4$, $t = 5$

D'où

$$\begin{aligned} I_{13} &= \int_3^5 \frac{dt}{2\sqrt{t^2-1}} \\ &= \left[\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|\right]_3^5 \end{aligned}$$

$I_{13} = \ln\left(\dfrac{5+2\sqrt{6}}{3+2\sqrt{2}}\right)$

- ***Exercice 2.14*:** *Calculer* $I_{14} = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)(x-1)}dx$

<u>Solution</u> : On décompose ensuite la fraction $\dfrac{x^2+1}{(x^2+x+1)(x-1)}$ en éléments simples :

$$\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Une réduction au même dénominateur donne :

$$A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) = x^2+1$$

$$x^2(A+B) + x(A-B+C) + A - C = x^2+1$$

Soit :

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2}{3} \\ B = \dfrac{1}{3} \\ C = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

d'où

$$\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)(x-1)} = \frac{2}{3(x-1)} + \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$$

On peut alors calculer I_{14} :

$$\begin{aligned} I_{14} &= \int_{-1}^0 \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)(x-1)}dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{2}{3(x-1)}dx + \int_{-1}^0 \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{2}{3(x-1)}dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{2x-2}{3(x^2+x+1)} \\ &= \int_{-1}^0 \frac{2}{3(x-1)}dx + \frac{1}{6}\int_{-1}^0 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)}dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x^2+x+1)} \end{aligned}$$

Le calcul de $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2+x+1)}$ a été fait dans le calcul de l'intégrale I_{12}. Avec le changement de variable :

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})$$

. Les valeurs aux bornes sont pour $x=-1$, $t=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et pour $x=0$, $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. D'où :

$$\begin{aligned}
I_{14} &= \frac{2}{3}\left[\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}+\frac{1}{6}\left[\ln\left|x^2+x+1\right|\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\right]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}\right)\\
&= -\frac{2}{3}\ln(2)-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}\\
&= -\frac{1}{3}(2\ln(2)+\frac{\pi}{\sqrt{3}})
\end{aligned}$$

$I_{14}=-\dfrac{1}{3}\left(2\ln(2)+\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$

- ***Exercice 2.15:*** *Calculer* $I_{15}=\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

  Solution :

$$I_{15}=\int_0^1 \frac{dx}{\left[a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}dx$$

Posons : $t=\dfrac{x}{a}$.On a alors :

$$dt=\frac{dx}{a}\quad dx=adt$$

Les valeurs aux bornes deviennent : pour $x=0$, $t(0)=0$ et pour $x=1$, $t(1)=\dfrac{1}{a}$.

$$\begin{aligned}
I_{15} &= \int_0^1 \frac{dx}{\left[a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\\
&= \int_0^{1/a}\frac{adt}{a^3\left[(1+t^2)\right]^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{1}{a^2}\int_0^{1/a}\frac{dt}{\left[(1+t^2)\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Posons :

$$sh(u)=t$$
$$ch(u)du=dt$$

Les valeurs aux bornes deviennent : pour $t=0$, $u=0$ et pour $t=\frac{1}{a}$, $u(1)=Argsh\left(\frac{1}{a}\right)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
I_{15} &= \frac{1}{a^2}\int_0^{Argsh\left(\frac{1}{a}\right)}\frac{ch(u)du}{\left[ch^2(u)\right]^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{1}{a^2}\int_0^{Argsh\left(\frac{1}{a}\right)}\frac{ch(u)du}{ch^3(u)}\\
&= \frac{1}{a^2}\int_0^{Argsh\left(\frac{1}{a}\right)}\frac{du}{ch^2(u)}
\end{aligned}$$

D'où :

$$I_{15}=\frac{1}{a^2}\left[th(u)\right]_0^{Argsh\left(\frac{1}{a}\right)}=\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

Cette expression est équivalente à :

$$I_{15} = \left[\frac{x}{a^2}(a^2+x^2)^{-1/2}\right]_0^1 = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

- ***Exercice 2.16***:
  Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel $k \leq n$, on pose :

$$I_{k,n} = \int_0^1 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} dx$$

A l'aide d'une intégration par parties, comparer $I_{k,n}$ et $I_{k+1,n}$.
En déduire $I_{k,n}$ en fonction de n.

__Solution :__ On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{lcl} u = (1-x)^{n-k} & ; & dv = x^k dx \\ du = -(n-k)(1-x)^{n-k-1}dx & ; & v = \frac{1}{k+1}x^{k+1} \end{array}$$

$$I_{k,n} = C_n^k\left[\frac{1}{k+1}(1-x)^{n-k}x^{k+1}\right]_0^1 + C_n^k\int_0^1 \frac{1}{k+1}x^{k+1}(n-k)(1-x)^{n-k-1}dx$$

Or :

$$\frac{(n-k)C_n^k}{k+1} = C_n^{k+1}$$

et

$$\left[\frac{1}{k+1}(1-x)^{n-k}x^{k+1}\right]_0^1 = 0$$

d'où :

$$I_{k,n} = \frac{(n-k)C_n^k}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}dx = I_{k+1,n}$$

On peut en déduire $I_{k,n}$ en fonction de n. En effet

$$I_{k,n} = I_{k+1,n} = I_{k+1,n} = \cdots = I_{n,n}$$

et

$$I_{n,n} = \int_0^1 C_n^n x^n (1-x)^{n-n}dx = \int_0^1 x^n dx$$

d'où :

$I_{k,n} = I_{k+1,n} = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$

- ***Exercice 2.17***:
  Calculer, si cela est possible : $J_1 = \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

__Solution :__ Soit $\alpha \in [0,3[$. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ est continue et donc intégrable sur $[0,\alpha[$.

$$J_1(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

On pose : $u = \dfrac{x}{3}$ soit, $du = \dfrac{dx}{3}$.

Les valeurs aux bornes deviennent : pour $x=0$, $u=0$ et pour $x=\alpha$, $u=\dfrac{\alpha}{3}$.

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \int_0^{\alpha/3}\frac{3du}{\sqrt{9-(3u)^2}} \\ &= \int_0^{\alpha/3}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \end{aligned}$$

D'où :

$$J_1(\alpha) = [\arcsin(u)]_0^{\alpha/3} = \arcsin(\frac{\alpha}{3})$$

et

$$\lim_{\alpha \to 3} \arcsin(\frac{\alpha}{3}) = \frac{\pi}{2}$$

$J_1 = \dfrac{\pi}{2}$. L'intégrale J_1 est convergente.

- ***Exercice 2.18*:** *Calculer, si cela est possible :* $J_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)dx}{\sqrt{1-\sin(x)}}$

  <u>Solution</u> :
  Soit $\alpha \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$. $x \mapsto \dfrac{\cos(x)dx}{\sqrt{1-\sin(x)}}$ est continue et donc intégrable sur $[0, \alpha[$.

$$J_2(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{d(\sin(x))}{\sqrt{1-\sin(x)}}$$

D'où :

$$J_2(\alpha) = -2\left[\sqrt{1-\sin(x)}\right]_0^{\alpha} = -2\sqrt{1-\sin(\alpha)} + 2$$

et

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} J_2(\alpha) = 2$$

Donc J_2 est convergente et $J_2 = 2$