INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

Intégrales généralisées

1.1 Définition

On parle d'*intégrales généralisées* d'une fonction $f(x)$ dans deux situations:

1. quand on intègre sur un intervalle $[a, b]$ avec $f(x)$ qui tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers a^+ (c.a.d. x tend vers a en restant supérieur à a) ou quand x tend vers b^- (notion symétrique) ou bien même quand $f(x)$ n'a pas de limite.

   Par exemple $\frac{1}{x}$ sur $[0, 1]$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[0, 1]$, $\frac{1}{(x-2)^2}$ sur $[2, 3]$, $\sin\frac{1}{x}$ sur $[0, 1]$.

2. ou bien quand on intégre sur un intervalle non borné du type $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ ou $]-\infty, +\infty[$.

Par exemple $\frac{1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$, e^{-x^2} sur $]-\infty, +\infty[$.

Pour rester en cohérence avec le module d'Intégration qui suivra, on adopte une définition des intégrales généralisées convergentes qui porte sur la *valeur absolue.* C'est ce que l'on appelait auparavant les *intégrales généralisées absolument convergentes.* De même pour simplifier la présentation, on se place systématiquement sur $[0, 1]$ ou sur $[0, +\infty[$, les adaptations à des intervalles différents mais du même type se font aisément.

Définition 1 *i) On dit que la fonction f n'ayant pas de limite en 0 est intégrable sur $[0, 1]$ ou que l'intégrale généralisée converge en 0 ou encore que la fonction est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^{1}|f(x)|\,dx \text{ \textit{existe et est finie}}$$

On montre alors que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^{1}f(x)\,dx \text{ \textit{existe et est finie}}$$

et on pose

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 f(x)\, dx$$

ii) On dit que la fonction f *est intégrable sur* $[0, +\infty[$ *ou que l'intégrale généralisée converge en* $+\infty$ *ou encore que la fonction est intégrable au voisinage de* $+\infty$ *si et seulement si*

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X |f(x)|\, dx \textit{ existe et est finie}$$

On montre alors que

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X f(x)\, dx \textit{ existe et est finie}$$

et on pose

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X f(x)\, dx$$

Lorsqu'une intégrale généralisée ne converge pas, on dit aussi qu'elle diverge.

Commentaires

1. Bien noter que la condition d'intégrabilité ou de convergence de l'intégrale généralisée porte sur la *valeur absolue.* Comme indiquée dans l'introduction ceci est en cohérence avec la définition plus générale de fonctions intégrables que nous introduirons dans le cours.

2. Nous verrons l'exemple de la fonction $\frac{\sin x}{x}$ sur $[0, +\infty[$ qui est telle que

$$\lim_{X \to +\infty^+} \int_0^X \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$$

avec

$$\lim_{X \to +\infty^+} \int_0^X \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

C'est ce que l'on appelait autrefois des *intégrales généralisées semi convergentes.* Il est intéressant de savoir que $\lim_{X \to +\infty^+} \int_0^X \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ mais, avec notre définition, la fonction $\frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

3. Si l'on veut étudier l'intégrabilité de $\frac{1}{x}$ sur $[0, +\infty[$ on a deux problèmes de convergence: en 0 puisque $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et en $+\infty$. On découpe l'intégrale en deux et on étudie séparément la convergence de $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ et de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ la valeur intermédiare 1 étant arbitraire et n'ayant aucun influence sur la convergence de chaque morceau.

Voici un tableau avec un ensemble de fonctions intégrables de références.

1.2 Fonctions intégrables

$$\boxed{\frac{1}{x^a} \text{ est intégrable au voisinage de 0 pour } a<1}$$

$$\boxed{\frac{1}{(x-b)^a} \text{ est intégrable au voisinage de } b \text{ pour } a<1}$$

$$\boxed{\frac{1}{x^a} \text{ est intégrable au voisinage de } +\infty \text{ pour } a>1}$$

$$\boxed{e^{-x} \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[}$$

$$\boxed{e^{-x^2} \text{ est intégrable sur }]-\infty,+\infty[}$$

$$\boxed{x^n e^{-x} \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

$$\boxed{x^n e^{-x^2} \text{ est intégrable sur }]-\infty,+\infty[\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

$$\boxed{\ln x \text{ est intégrable sur } [0,1]}$$

Preuve. Pour $a \neq 1$ une primitive de x^{-a} est $\frac{x^{-a+1}}{-a+1} = \frac{1}{(1-a)\,x^{1-a}}$ on a donc

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{(1-a)}\left[\frac{1}{x^{a-1}}\right]_\epsilon^1 = \frac{1}{(1-a)}\left[1-\frac{1}{\epsilon^{a-1}}\right]$$

Si $a>1$ on a $a-1>0$ et donc $\frac{1}{\epsilon^{a-1}} \to +\infty$ quand $\epsilon \to 0^+$ et l'intégrale diverge.
Si $a<1$ on a $a-1<0$ et $\frac{1}{\epsilon^{a-1}} \to 0$ quand $\epsilon \to 0^+$ et l'intégrale converge et vaut

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{1-a} \quad \text{pour } a<1$$

Pour $a=1$ on a $\int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_\epsilon^1 = 1-\ln\epsilon \to +\infty$ quand $\epsilon \to 0^+$.

Sur $[1,+\infty[$ le calcul est le même avec ϵ remplacé par X avec X qui tend vers l'infini, ce qui inverse les cas de convergence. Calcul à faire à titre d'exercice. ■

Voila deux cas importants qui peuvent servir comme aide mémoire.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} \text{ converge}}$$

et

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} \text{ converge}}$$

Commentaires

D'après ce que l'on vient de voir $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge alors que $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverge. Dans les deux cas la fonction que l'on intègre tend vers l'infini quand x tend vers 0. Mais $\frac{1}{x}$ t*end trop vite vers l'infini* pour que l'intégrale converge. Ceci prend tout son sens si l'on se souvient que l'intégrale mesure (la fonction étant positive) l'aire du domaine compris entre la courbe et l'axe des x. La fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tend assez lentement vers l'infini pour que l'aire soit finie, même si une branche est infinie, alors que c'est faux pour $\frac{1}{x}$.

La façon de tendre vers l'infini est donc ce qui importe pour la convergence de l'intégrale.

Preuve. (suite) La primitive de e^{-x} est $-e^{-x}$ donc

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-x}\,dx = \lim_{X\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^X = \lim_{X\to+\infty}\left[-e^{-X}+1\right] = 1$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

Pour la fonction e^{-x^2} la calcul n'est pas aussi simple, car on n'a pas de primitive sous forme de fonction explicite de e^{-x^2}. En utilisant un calcul d'intégrale double et un changement de coordonnées polaires, on montrera (cours de Transformée de Fourier et d'Intégration) que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$

Ceci suffit à montrer que l'intégrale converge.

On montre également que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^n\,e^{-x}\,dx = n! \quad \forall n\in\mathbb{N}}$$

La démonstration se fait par récurrence, en faisant des intégations par parties. Faire à titre d'exercices les cas $n=1$ et $n=2$.

On donnera plus loin une démonstration de l'intégrabilité de $x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

Enfin, on verifie facilement qu'une primitive de $\ln x$ est $x\ln x - x$.Alors

$$\int_\epsilon^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_\epsilon^1 = -1-\epsilon\ln\epsilon+\epsilon$$

On sait que $\lim_{\epsilon\to0^+}\epsilon\ln\epsilon = 0$ donc

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\epsilon\to0^+}\int_\epsilon^1 \ln x\,dx = -1$$

■

Ce catalogue de fonctions intégrables de références est d'un usage constant. En effet, on se ramène souvent à ces fonctions pour démontrer la convergence d'intégrales grâce à deux méthodes importantes: *majoration* et *équivalence.*

1.3 Propriétés de majoration et d'équivalence

Proposition 2 *Si $|f(x)|\le g(x)$ avec g est intégrable alors f est intégrable.*

A contrario, si $|f(x)|\ge h(x)$ avec h non intégrable alors f n'est pas intégrable.

Exemple 3 *$\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $[0,1]$ car on a la majoration $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui est intégrable sur $[0,1]$. Par contre, cet argument ne donne pas la valeur de $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$.*

Exemple 4 *$\frac{\sin x}{x^3+1}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. En effet, il n'y a pas de problème en 0 puisque $\frac{\sin x}{x^3+1}$ vaut 0 pour $x=0$. L'intégrabilité en $+\infty$ est assurée par les majorations*

$$\left|\frac{\sin x}{x^3+1}\right| \leq \frac{1}{x^3+1} \leq \frac{1}{x^3}$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ converge.

Proposition 5 *Si $|f(x)| \sim g(x)$ avec g intégrable alors f est intégrable. Par contre si g est non intégrable alors f ne l'est pas.*

Rappelons que $|f(x)| \sim g(x)$ signifie que $\frac{|f(x)|}{g(x)}$ tend vers 1. On peut donc s'attendre à ce que les comportements des intégrales généralisées soient de même type.

Exercice 6 *Etudier l'intégrabilité de $\frac{x^2}{\left(x+x\sqrt{x^2+1}\right)^3}$ sur $[1,+\infty[$.*

Correction

La fonction étant positive, les valeurs absolues sont inutiles. On a la suite d'équivalences suivantes

$$\begin{array}{rcl}
x^2+1 & \sim & x^2 \quad \text{quand } x \to +\infty \quad \text{(facteur de plus haut degré)} \\
\sqrt{x^2+1} & \sim & x \quad \text{quand } x \to +\infty \\
x + x\sqrt{x^2+1} & \sim & x + x^2 \sim x^2 \quad \text{quand } x \to +\infty \quad \text{(facteur de plus haut degré)} \\
\dfrac{x^2}{\left(x+x\sqrt{x^2+1}\right)^3} & \sim & \dfrac{x^2}{(x^2)^3} = \dfrac{1}{x^4} \quad \text{converge sur } [1,+\infty[
\end{array}$$

Exercice 7 *Etudier l'intégrabilité de $f(x) = \frac{\sin x}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$ sur $[0,+\infty[$.*

Correction

On a deux problèmes de convergence, en 0 et en $+\infty$. On a $\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)} \to 1$ quand $x \to 0^+$ et donc $|f(x)| \sim \left|\frac{\sin x}{x}\right|$ et $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \to 1$ quand $x \to 0^+$ donc est intégrable. (On peut dire aussi directement que $f(x) \to 1$ quand $x \to 0^+$ donc est intégrable).

Mentionnons encore une méthode très utile pour démontrer la convergence d'une intégrale. Elle est dite *méthode de $x^a f(x)$*. Elle utilise un argument de majoration/minoration en comparant la fonction à étudier avec les fonctions $\frac{1}{x^a}$.

Proposition 8 (C1) *i) S'il existe $a > 1$ tel que $x^a f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ alors $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.*

ii) S'il existe $a \leq 1$ tel que $|x^a f(x)| \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ alors $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Preuve. Démontrons par exemple le point *ii).* Si $|x^a f(x)| \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ on peut trouver un réel positif A tel que pour $x \geq A$ on ait $|x^a f(x)| \geq 1$. Ou encore, pour $x \geq A$ on a $|f(x)| \geq \frac{1}{x^a}$. Comme $a \leq 1$ cette dernière fonction donne une intégrale divergente d'où le résultat. La valeur 1 dans la minoration $|x^a f(x)| \geq 1$ a été prise arbitriarement, on pourrait prendre 2.51... mais ceci n'apporte rien de plus! ■

Par exemple, un tel argument permet de montrer que l'intégrale de $f(x) = x^n e^{-x^2}$ ($n \in \mathbb{N}$) converge sur $]-\infty, +\infty[$. En effet $x^2 |f(x)| = x^{n+2} e^{-x^2}$ tend vers 0 quand $x \to \pm\infty$ (l'exponentielle l'*emporte* sur la puissance) et d'après le point i) l'intégrale converge en $\pm\infty$.

La raison profonde est que e^{-x^2} tend vers 0 *plus vite que n'importe quelle puissance* de $\frac{1}{x}$ c'est à dire

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^m}} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

ce qui équivaut à

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^m e^{-x^2} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Proposition 9 (C2) *i) S'il existe $a < 1$ tel que $x^a f(x) \to 0$ quand $x \to 0^+$ alors $\int_0^1 f(x)\, dx$ converge.*

ii) S'il existe $a \geq 1$ tel que $|x^a f(x)| \to +\infty$ quand $x \to 0^+$ alors $\int_0^1 f(x)\, dx$ diverge.

Exercice 10 *Ecrire, sur le modèle précédent, les démonstrations de ces différents points.*

Par exemple, $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$ diverge. En effet $x \left|\frac{\ln x}{x}\right| = |\ln x| \to +\infty$ quand $x \to 0^+$ et d'après *ii)* l'intégrale diverge.

1.4 Exercices

Exercice 11 *Etudier l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{3/4}(1+x)^{1/4}} dx$*

Correction

En $+\infty$ on a $(1+x)^{1/4} \sim x^{1/4}$ (facteur de plus haut degré) donc $\left|\frac{\ln x}{x^{3/4}(1+x)^{1/4}}\right| \sim \left|\frac{\ln x}{x}\right|$. Or $x \left|\frac{\ln x}{x}\right| \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ d'après (C1) l'intégrale diverge. K diverge en $+\infty$ et donc K diverge.

Exercice 12 *Etudier l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{1}{(x^2-1)^2} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx$*

Correction

Les problèmes de convergence apparaissent en $x = 0$ et $x = 1$ puisque la fonction tend vers l'infini au voisinage de ces points.

On a $\frac{1}{(x^2-1)^2} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers 0 puisque $\frac{1}{(x^2-1)^2} \sqrt{1-x}$ tend vers 1. Or on sait que l'intégrale de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est convergente en 0.

Quand x tend vers 1^- on a $\frac{1}{(x^2-1)^2}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{(1+x)^2(1-x)^2}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)^{3/2}}$. Cette intégrale diverge au voisinage de 1.

Globalement, l'intégrale J est divergente. Si on modifie la fonction à intégrer en $\frac{1}{(x^2-1)}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, vérifier qu'alors elle converge.

Exercice 13 *Etudier l'intégrale* $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2x^2-3x+1}}\,dx$

Correction

Au voisinage de $+\infty$ on a $2x^2 - 3x + 1 \sim 2x^2$ (facteur de plus haut degré) et $\frac{1}{x\sqrt{2x^2-3x+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\,x^2}$ qui est convergente en $+\infty$

Pour identifier les autres problèmes éventuels de convergence de l'intégrale sur le domaine, il faut chercher les racines du polynôme $2x^2 - 3x + 1$. On a $2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)(x-1/2)$. La seule racine contenue dans le domaine $[1, +\infty[$ est $x = 1$. On a $\frac{1}{x\sqrt{2(x-1)(x-1/2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{(x-1)}}$ pour x voisin de 1 et cette intégrale converge. Finalement l'intégrale I est convergente.

Exercice 14 *Etudier l'intégrale* $L = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\cos x}{x}\,dx$

Correction

Au voisinage de 0 la fonction $\frac{e^{-x}\cos x}{x}$ est équivalente à $\frac{1}{x}$ puisque $e^{-x}\cos x$ vaut 1 pour $x = 0$ et l'intégrale L diverge.

Bien qu'inutile ici, regardons ce qui se passe au voisinage de $+\infty$. On a la majoration $\left|\frac{e^{-x}\cos x}{x}\right| \leq \frac{e^{-x}}{x}$ puisque $|\cos x| \leq 1$. la fonction $\frac{e^{-x}}{x}$ donne une intégrale convergente en $+\infty$ puisque $x^2\,\frac{e^{-x}}{x} = xe^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$ (C1) . Autre argument possible : pour $x \geq 1$ - et cela nous suffit puisque l'on regarde ce qui se passe quand $x \to +\infty$ - on a $\frac{1}{x} \leq 1$ et donc $\left|\frac{e^{-x}}{x}\right| \leq e^{-x}$ qui est convergente.

En général, il n'y a pas qu'un seul argument possible!

Ainsi l'intégrale *modifiée* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}\cos x}{x}\,dx$ est convergente.

Exercice 15 *Etudier l'intégrale* $M = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x\ln(1+x)}}\,dx$

Correction

Avec l'habitude que l'on a maintenant, *on voit bien que* c'est e^{-x} qui fait converger l'intégrale en $+\infty$. On peut dire que $x^2\frac{e^{-x}}{\sqrt{x\ln(1+x)}} \to 0$ quand $x \to +\infty$ et on utilise (C1) . Ou bien dire que pour x assez grand $x\ln(1+x) \geq 1$ et donc $\left|\frac{e^{-x}}{\sqrt{x\ln(1+x)}}\right| \leq e^{-x}$.

Au voisinage de 0 on sait que $\ln(1+x) \sim x$ et donc $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x\ln(1+x)}} \sim \frac{1}{x}$ qui diverge.

L'intégrale M diverge.

Exercice 16 *Etudier l'intégrale* $N = \int_0^1 \sqrt{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}\,dx$

Correction

Le seul problème est en 0. On a $\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{-2\ln x}$. On sait que $x\ln x \to 0$ quand $x \to 0^+$ (la puissance de x *l'emporte* sur le $\ln x$) et donc $x^{1/2}\sqrt{-2\ln x} \to 0$ quand $x \to 0^+$. d'après (C2) l'intégrale N converge.

Exercice 17 ** *Etudier l'intégrabilité de* $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$ *en fonction de* $\alpha > 0$. *En déduire pour quelles valeurs de a l'intégrale* $P = \int_0^{+\infty} \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^a}\,dx$ *converge?*

Correction

Intuitivement le logarithme tend très lentement vers l'infini quand x tend vers l'infini, donc l'intégrale va se comporter comme $\frac{1}{x^\alpha}$. Plus précisément:

1. pour $\alpha \le 1$ on a $x^\alpha \frac{\ln x}{x^\alpha} = \ln x \to +\infty$ quand x tend vers l'infini et par (C1) l'intégrale diverge.

2. pour $\alpha > 1$ posons $h = \alpha - 1$. on $x^{1+h/2}\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln x}{x^{\alpha-1-h/2}} = \frac{\ln}{x^{h/2}} \to 0$ quand x tend vers l'infini et par (C1) l'intégrale converge.

Pour l'intégrale P il n'y a pas de problème en 0 puisque $\frac{1}{(1+x^2)^a} \to 1$ quand $x \to 0$ et $x\ln x \to 0$ quand $x \to 0$ (la puissance de x l'*emporte* sur le ln).

En $+\infty$ il est clair que si $a \le 0$ on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^a} = +\infty$ et l'intégrale ne peut converger. Prenons $a > 0$. Au voisinage de $+\infty$ on a $\frac{2x\ln x}{(1+x^2)^a} \sim \frac{2\ln x}{x^{2a-1}}$ et donc d'après l'étude préliminaire, cette fonction donne une intégrale convergente pour $2a - 1 > 1$ c'est à dire que $a > 1$. L'intégrale P converge si et seulement si $a > 1$.

1.5 Compléments

Proposition 18 *Le théorème de changement de variable pour calculer les intégrales ou la méthode d'intégration par parties, subsistent pour les intégrales généralisées sous réserve d'existence de chacun des termes intervenants dans le calcul.*

Par exemple, soit à calculer $I = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ dont on sait qu'elle existe. On intègre par parties, en posant

$$\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{cases}$$

Alors

$$I = \left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

Le terme tout intégré vaut 0 car xe^{-x} est nul pour $x = 0$ et tend vers 0 quand x tend vers l'infini. Quant à l'intégrale on sait qu'elle vaut 1 donc finalement $I = 1$. Calculer de la même façon $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx$ puis $\int_0^{+\infty} x^ne^{-x}\,dx$ qui - rappelons le - vaut $n!$.

Proposition 19 *On a* $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$ *alors que* $\lim_{X\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ *est finie (et vaut* $\frac{\pi}{2}$*).*

Il s'agit de l'exemple classique d'une fonction qui n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ puisque $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$ mais pour laquelle néanmoins $\lim_{X\to+\infty} \int_0^{X} \frac{\sin x}{x} dx$ existe et est finie.

Remarquons qu'il n'y a pas de problème d'intégrabilité en 0 puisque $\frac{\sin x}{x} \to 1$ quand $x \to 0$. On étudie donc l'intégrabilité en $+\infty$.

Faisons une intégration par parties sur $\int_1^{X} \frac{\sin x}{x} dx$. On pose

$$\begin{cases} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{1}{x^2}\, dx \\ dv = \sin x\, dx & v = -\cos x \end{cases}$$

Alors

$$\int_0^X \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{1}{x}\cos x\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\, dx = \cos 1 - \frac{1}{X}\cos X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

Quand X tend vers l'infini on a $\frac{1}{X}\cos X$ qui tend vers 0 et d'autre part l'intégrale $\int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ est convergente grâce à la majoration $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ ce qui assure l'existence de la limite $\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\, dx$. Finalement

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{\sin x}{x} dx \text{ existe et est finie}$$

Par contre, on a $|\sin x| \geq (\sin x)^2$ puisque $\sin x$ est un réel plus petit que 1. Les formules de trigonométrie donnent $(\sin x)^2 = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Alors on a

$$\int_0^X \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \int_0^X \frac{1-\cos 2x}{2x}\, dx = \int_0^X \frac{1}{2x}\, dx - \frac{1}{2}\int_0^X \frac{\cos 2x}{x}\, dx$$

Il est facile de voir que la dernière intégrale converge, en faisant une intégration par parties comme précédemment. Par contre, on sait que

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{1}{2x}\, dx = +\infty$$

et donc finalement

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{1-\cos 2x}{2x}\, dx = +\infty$$

et à plus forte raison

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$$