Institut National Polytechnique de Toulouse

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES INGENIEURS EN ARTS CHIMIQUES ET TECHNOLOGIQUES DE TOULOUSE

Rappels de Mathématique Fonctions – Dérivation - Développements Limités

***Module PAD** (Première Année A Distance) 2007-2008*

Exercices – Série 3

Pascal Floquet
Xuan Meyer

Correction de l'exercice 1 :
Calculer la dérivée première de la fonction $f(x) = Arctg(\sin x)$.

$$Arctg'(u) = \frac{1}{1+u^2}$$

$f'(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x} = \dfrac{\cos x}{2-\cos^2 x}$ (dérivée d'une fonction composée et $cos^2x + sin^2x = 1$)

Correction de l'exercice 2 :
Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon(x)$$

avec

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Correction de l'exercice 3 :
Trouver le développement limité d'ordre 3, autour de 0, de la fonction $f(x) = (x+1)e^{-2x}$

On a $e^{-2x} = 1 + (-2x) + \dfrac{(-2x)^2}{2} + \dfrac{(-2x)^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$ *avec* $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$

$$(x+1)e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + x - 2x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon_2(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

Donc

$$(x+1)e^{-2x} = 1 - x + \frac{2x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

Correction de l'exercice 4 :

Etudier (domaine de définition, sens de variation et limites, branches infinies, points particuliers et tracé) la fonction donnée par $f(x) = Arctg(\dfrac{1-x}{1+x})$

<u>Domaine de définition</u> $D_f = \ ]-\infty, +\infty] - \{-1\}$

Dérivée

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$Arctg'(u) = \frac{1}{1+u^2}$$

Donc $f'(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^2}\,\dfrac{1}{1+\dfrac{(1-x)^2}{(1+x)^2}} = \dfrac{-2}{(1+x)^2+(1-x)^2}$

$$f'(x) = \frac{-2}{2(1+x^2)} = \frac{-1}{(1+x^2)} < 0$$

$f''(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ *s'annule en changeant de signe au point d'inflexion* $x=0, y=\Pi/4$.

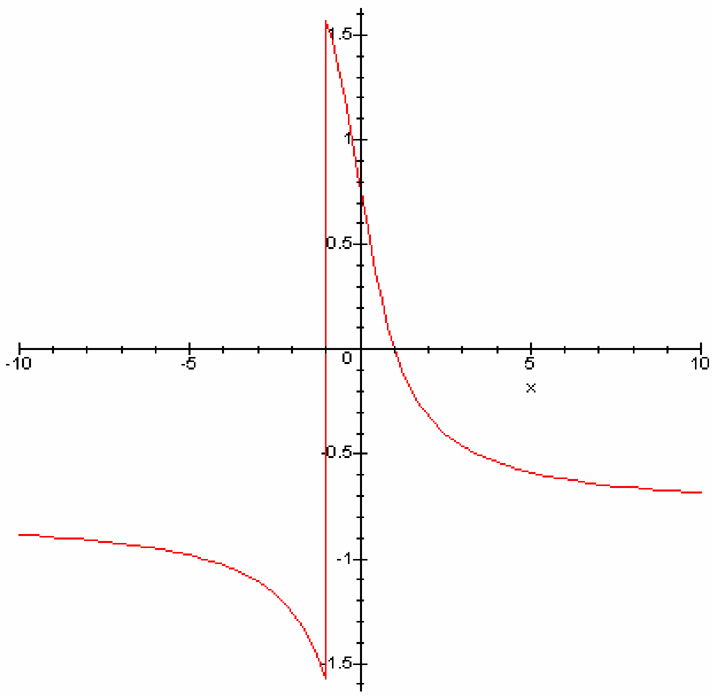
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \dfrac{-\Pi}{2}$ $\qquad\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \dfrac{+\Pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \dfrac{-\Pi}{4}$ *La droite d'équation* $y = \dfrac{-\Pi}{4}$ *est asymptote à la courbe représentative de* f.

Tableau de variation

x	-∞	-1 +∞
f'(x)	-	-
f(x)	−Π/4 ↘ −Π/2	Π/2 ↘ −Π/4

Tracé



Correction de l'exercice 5 :

Déterminer les réels a et b de telle façon que $f(x) = \sin x - \dfrac{x + ax^3}{1 + bx^2}$ *soit au voisinage de 0 un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible. Quelle est alors sa partie principale ?*

La division selon les puissances croissantes de $(x+ax^3)$ par $(1+bx^2)$ vaut $x+(a-b)x^3 - b(a-b)x^5 + b^2(a-b)x^7\ldots$

A priori, deux équations indépendantes en a et b suffisent à les déterminer.

Le $DL_7(0)$ de $f(x)$ vaut

$$f(x) = (-\frac{1}{6} - (a-b))x^3 + (\frac{1}{120} + b(a-b))x^5 + (\frac{-1}{5040} - b^2(a-b))x^7 + x^7\varepsilon(x)$$

On veut un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible, d'où :

$$\begin{cases} (-\frac{1}{6} - (a-b)) = 0 \\ (\frac{1}{120} + b(a-b)) = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = \frac{-7}{60} \\ b = \frac{1}{20} \end{cases}$$

et

$$f(x) = \frac{11}{50400}x^7 + x^7\varepsilon(x)$$

Correction de l'exercice 6 :

Calculer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f , définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

a) *au voisinage de 0*
b) *au voisinage de 2*
c) *au voisinage de* $+\infty$

Voisinage de 0 : La division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3, de $1-x$ par $1+x$ donne $1-2x+2x^2-2x^3$, d'où :

$f(x) = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec lim ε(x) = 0 quand $x \to 0$

Voisinage de 2 : On pose u = x-2 pour se ramener au voisinage de 0.

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-1-u}{3+u}$$

La division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3, de $-1-u$ par $3+u$ donne $-1/3-2/9u+2/27u^2-2/81u^3$, d'où :

$f(x) = -1/3 - 2/9(x-2) + 2/27(x-2)^2 - 2/81(x-2)^3 + x^3\varepsilon'(x)$ avec lim ε' (x) = 0 quand $x \to 2$

Voisinage de l'infini : On pose $u = 1/x$ pour se ramener au voisinage de 0.

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-1/u}{1+1/u} = \frac{u-1}{u+1} = -\left(\frac{1-u}{1+u}\right)$$

La division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3, de $1-u$ par $1+u$ a déjà été effectuée à la question a) (ouf !) , d'où :

$f(x) = -1 + 2/x - 2/x^2 + 2/x^3 + 1/x^3\varepsilon''(x)$ avec lim ε'' (x) = 0 quand $x \to \infty$

FIN