INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

# MATHS Rappels
# Suites, Fonctions et Développements Limités
## *Série 1*

**Pascal Floquet**
**Xuân Meyer**
**Jean-Claude Satge**

**Première Année à Distance**

**Septembre 2006**

# Chapitre 1

# Séries, Fonctions et Développements Limités

- ***Exercice 1.1*:** Calculer la dérivée première de la fonction $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$.

- ***Exercice 1.2*:** Calculer les dérivées successives (jusqu'à l'ordre 4) de la fonction $f(x) = e^x \cos x$.

- ***Exercice 1.3*:** Calculer les dérivées successives de la fonction $f(x) = x^n \quad n \in \mathrm{N}$.

- ***Exercice 1.4*:** Etudier les variations de la fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$. Montrer que cette fonction admet une fonction réciproque $f^{-1}$ et expliciter cette dernière.

- ***Exercice 1.5*:**

Ecrire le développement limité à l'ordre 4 de la fonction définie sur $\mathrm{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 + x}$ en 0 .

- ***Exercice 1.6*:** La fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x} & si\, x \neq 0 \\ 0 & si\, x = 0 \end{cases}$$

est-elle continue et dérivable en 0 ?

- ***Exercice 1.7*:** ¨Trouver le développement limité d'ordre 2 autour de zéro de la fonction définie par :

$$\begin{cases} f : ]-\infty, 1] \to \mathrm{R} \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - 2x + 2x^2}}{1 - x} \end{cases}$$

et en déduire que $f$ admet un minimum local en $x = 0$.

**Solution 1.1 :**

Il faut calculer la dérivées d'une somme de fonctions et de fonctions composées)
$f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = 3\cos^2 x(-\sin x) + 3\sin^2 x(\cos x)$
$f'(x) = 3\cos x \sin x(\sin x - \cos x)$

**Solution 1.2 :**

$f'(x) = e^x \cos x + e^x(-\sin x)$ (dérivée d'un produit de fonctions)

$$f'(x) = f^{(1)}(x) = e^x(\cos x - \sin x)$$

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$$

$$f^{(3)}(x) = -2e^x \sin x - 2e^x \cos x = -2e^x(\cos x + \sin x)$$

$$f^{(4)}(x) = -2e^x(\cos x + \sin x) - 2e^x(-\sin x + \cos x) = -4e^x \cos x$$

**Solution 1.3 :**

Calculons les premières dérivées pour voir apparaître une éventuelle récurrence.

$$f'(x) = nx^{n-1}\ ,\ f''(x) = n(n-1)x^{n-2}\ ,\ f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3} \quad \ldots$$

Si $0 \leq \quad p \quad < \quad n,\ f^{(p)}(x) = n(n-1)...(n-p+1)x^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}$
Si $p = n,\ f^{(n)}(x) = n!$
Si $p \quad > \quad n,\ f^{(p)}(x) = 0.$

**Solution 1.4 :**

La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, elle est également continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x-1) - e^x e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x-1)^2} \qquad < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

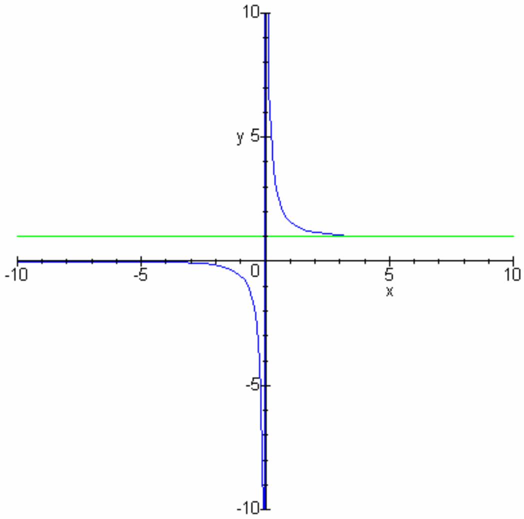
$f$ est donc continue, strictement décroissante sur chaque intervalle de l'ensemble de définition.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x-1} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x(1-e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1-e^{-x})} = 1$$

$$\lim_{x\to0-} f(x) = \lim_{x\to0-} \frac{e^x}{e^x-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} \frac{e^x}{e^x-1} = +\infty$$

| | | |
|---|---|---|
| | -∞ | 0 +∞ |
| f'(x) | 0 - | +∞ - |
| f(x) | -∞ | 1 |

$f$ est une bijection de $\mathbb{R}^* sur\ ]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Déterminons, la bijection réciproque $f^{-1}$.
Pour x non nul,
$y = \dfrac{e^x}{e^x-1} \Leftrightarrow y(e^x-1) = e^x \Leftrightarrow e^x(y-1) = y \Leftrightarrow e^x = \dfrac{y}{y-1} \quad (> 0, car\ y \in ]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[)$
soit $x = \ln(\dfrac{y}{y-1}\ )$




La fonction réciproque $f^{-1}$est donc donnée par :

$$f^{-1}\begin{cases} ]-\infty,\, 0[\cup]1,\, +\infty[\to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \ln(\dfrac{x}{x-1}) \end{cases}$$

**<u>Solution 1.5</u> :**

$$\begin{array}{l|l} 1 - \qquad\quad x^3 & 1+x \\ 1+x & \overline{\quad\quad\quad\quad} \\ \hline \;\; -x \quad -x^3 & \mathbf{1-x+x^2-2x^3+2x^4} \\ \;\; -x - x^2 & \\ \hline \qquad x^2 - x^3 & \\ \qquad x^2 + x^3 & \\ \hline \qquad\quad -2x^3 & \\ \qquad\quad -2x^3 - 2x^4 & \\ \hline \qquad\qquad 2x^4 & \end{array}$$

$$f(x) = 1 - x + x^2 - 2x^3 + 2x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

**<u>Solution 1.6</u> :**
*La fonction définie par*
$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & si\, x \neq 0 \\ 0 & si\, x = 0 \end{cases}$ *est-elle continue et dérivable en 0 ?*
Etude de la continuité en 0 :
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x)}{x} = 0$ donc $f$ est continue en 0.
Pour x $\neq 0$, $f'(x) = \dfrac{x\sin x - (1-\cos x)}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x)}{x^2} = \frac{1}{2} = f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - (1-\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} - \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} = f'(0)$$

donc $f$ est dérivable et à dérivée continue en 0.

**Solution 1.7 :**

$$\sqrt{1-2x+2x^2} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \quad avec \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$f$ est une fonction indéfiniment différentiable, dont le développement limité est donné par la formule de MacLaurin. Par conséquent, *f'(0) = 0* et *f"(0) = 1 > 0* ce qui entraîne que $f$ admet un minimum local en zéro. Ci-dessous, la " preuve " par le graphe :